

基于测地轮廓和特征函数的灰度异质图像分割

徐思敏,金正猛,闵莉花,王皓,郭小亚

(南京邮电大学理学院,江苏南京 210023)

摘要:灰度异质图像的分割是图像处理中一项非常有挑战性的任务。CVB模型虽然能较好分割灰度异质图像,但是其分割结果容易出现过度分割或欠分割问题。为了精确分割灰度异质图像,该文在CVB模型的基础上,引入基于测地轮廓的长度项来捕捉目标物体的边缘信息,提出一种新的变分分割模型。同时,为了提高计算效率,该文利用特征函数来表示测地轮廓长度,并且通过基于特征函数的热核卷积形式逼近测地轮廓的周长。进一步,结合交替极小化和迭代卷积阈值法,该文设计出一种快速数值求解算法,并且给出了该算法的收敛性和稳定性分析。最后,对合成图像、核磁共振图像以及魏茨曼分割数据集上的原始自然图像等三类灰度不均匀图像进行分割实验,并且采用Dice相似系数和Hausdorff距离作为图像分割的评价指标,实验结果表明:该方法不仅提高了图像分割精度,而且明显提升了收敛速度。

关键词:图像分割;灰度异质;测地轮廓;交替极小化;迭代卷积阈值

中图分类号:TP391

文献标识码:A

文章编号:1673-629X(2023)06-0160-08

doi:10.3969/j.issn.1673-629X.2023.06.024

Image Segmentation with Intensity Inhomogeneity Based on Geodesic Contour and Characteristic Function

XU Si-min, JIN Zheng-meng, MIN Li-hua, WANG Hao, GUO Xiao-ya

(School of Science, Nanjing University of Posts and Telecommunications, Nanjing 210023, China)

Abstract: Image segmentation with intensity inhomogeneity is a quite challenging task in image processing. CVB model can be used to segment images with intensity inhomogeneity well, but its segmentation results are prone to over-segmentation or under-segmentation. In order to accurately segment images with intensity inhomogeneity, based on the CVB model, a new variational segmentation model is proposed to capture the edge information of the object by introducing geodesic contour length term. At the same time, for improving the computational efficiency, we use a characteristic function to represent the geodesic contour length, where the perimeter of geodesic contour is approximated by a heat kernel convolution with the characteristic function. Furthermore, combining the alternating minimization and iterative convolution thresholding method, we design a fast numerical solution algorithm, and the convergence and stability of the algorithm are proved. Finally, segmentation experiments are performed on three kinds of images with intensity inhomogeneity, including synthetic images, magnetic resonance (MR) images and original natural images of Weizmann segmentation dataset. Dice similarity coefficient and Hausdorff distance are used as evaluation indicators of image segmentation. The experimental results show that the proposed method not only improves the segmentation accuracy, but also accelerates the convergence speed significantly.

Key words: image segmentation; intensity inhomogeneity; geodesic contour; alternating minimization; iterative convolution threshold

0 引言

图像分割是根据某种均匀性或一致性原则把图像分成具有特定性质区域的过程,是图像处理和计算机视觉领域的基本任务之一,在机器视觉、医学成像、自动驾驶、对象检测和交通控制系统等领域有广泛应用。在自然或医学图像成像过程中,由于光照或设备偏移

场的影响,图像会出现灰度异质问题,从而严重影响图像分割的精度。该文主要关注针对灰度异质图像的分割方法。

近年来,活动轮廓图像分割模型备受关注。现有的活动轮廓模型可分为:基于边缘的分割模型和基于区域的分割模型。基于边缘的分割模型主要依赖图像

收稿日期:2022-07-06

修回日期:2022-11-08

基金项目:国家自然科学基金(12271262);南京邮电大学校级自然科学基金(NY221097);江苏省研究生科研与实践创新计划项目(KYCX21_0694)

作者简介:徐思敏(1997-),女,硕士研究生,研究方向为基于偏微分方程的图像处理;通讯作者:郭小亚(1990-),女,博士,研究方向为基于医学影像的图像分割方法。

的边缘信息捕捉目标物体的边界,如:著名的 Snake 模型^[1]和测地活动轮廓模型(Geodesic Active Contour, GAC)^[2]等。基于区域的分割方法,主要利用图像中物体呈分片区域的特点来引导初始轮廓的演化,如:经典的 Mumford-Shan(MS)模型^[3]。由于 MS 模型的求解过于复杂,Chan 等人^[4]将不同区域的灰度值近似为分片常数,并用水平集函数^[5]来表示轮廓线,提出经典的 Chan-Vese(CV)模型。近年来,为了提高边缘处的分割精度,Bresson 等人^[6]将 GAC 模型中的测地轮廓长度项引入 CV 模型中,提出基于测地轮廓的 CV 分割模型(简称 g-CV 模型),该模型能更好地捕捉边缘信息,提高对目标物体的分割精度。由于 CV 和 g-CV 模型都是在图像灰度均匀的前提下建立的,对分割灰度异质图像,其分割精度难以得到保证。

为了有效分割灰度异质图像,Zosso 等人^[7]根据 Retinex 理论^[8-9]将图像分解为光照部分和反射部分之和,提出 CVB 模型用于图像分割和偏移场矫正。该模型能较好分割灰度异质图像,但仍然存在以下问题:一方面,CVB 模型没有整合目标物体边缘信息,容易出现过度分割或欠分割问题。另一方面,文献[7]使用结合交替极小化^[10]和阈值动力学^[11-12]的算法求解 CVB 模型,计算过程中需要求解复杂轮廓演化的偏微分方程,求解速度并不可观。

为了提高 CVB 模型的分割精度,该文在 CVB 模型的基础上引入测地轮廓长度项,提出新的变分分割模型(简称 g-CVB 模型)。此外,受轮廓长度近似公式^[13]的启发,该文提出用特征函数表示测地轮廓长度项,并结合交替极小化算法和迭代卷积阈值法设计新模型的求解算法。该算法的优势体现在:(1)可以通过简单的迭代卷积阈值法进行交替求解,计算效率高。(2)在交替求解过程中,每个子问题的求解都是稳定的。最后,实验结果表明:该算法不仅能有效分割灰度异质图像,其收敛速度还有明显提升。

1 相关工作

文中, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 表示具有 Lipschitz 边界的有界图像域, $I: x \in \Omega$ 为输入图像, Γ 为封闭边界曲线, $*$ 表示卷积运算符, ∇ 表示梯度算子。

1.1 基于特征函数的 GAC 模型

传统 GAC 模型使用水平集表示能量泛函,在求解时存在计算效率低和数值不稳定的问题。为了解决上述问题, Ma 等人^[13]使用特征函数表示能量泛函,结合迭代卷积阈值法(Iterative Convolution Threshold Method, ICTM)求解模型,其方法概括如下。定义特征函数 $u(x)$:

$$u(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega_\Gamma \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (1)$$

其中, Γ 表示待分割对象的边界, Ω_Γ 表示 Γ 内部的区域。根据文献[14],目标的测地线长度近似表示为:

$$\int_\Gamma g(I) ds \approx \lim_{\tau \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\pi}{\tau}} \int_{\mathbb{R}^2} g(I) u G_\tau * (1 - u) dx \quad (2)$$

其中: $\tau > 0$, 边缘检测函数为:

$$g(I) = \frac{1}{1 + \gamma |\nabla G_\sigma * I|^2} \quad (3)$$

其中, γ 为大于 0 的参数, G_τ 和 G_σ 均为高斯核函数。

由测地线长度项结合面积项得到基于特征函数的 GAC 模型的能量泛函近似为:

$$E^\tau(u) = \sqrt{\frac{\pi}{\tau}} \int_\Omega \sqrt{g} u G_\tau * (\sqrt{g}(1 - u)) + \lambda \int_\Omega u dx$$

文献[13]中 Ma 等人基于上式使用迭代卷积阈值法进行求解,相较于传统水平集方法,该算法求解速度更快,收敛更稳定。

1.2 CVB 模型

2017 年, Zosso 等人^[7]将 Retinex 理论应用到 CV 图像分割模型中,提出 CVB 模型。该模型不仅能有效分割灰度异质图像,且能较好地输入图像进行偏置矫正。

设 $i(x, y)$ 是灰度异质图像, Retinex 理论将其分解为光照部分 $b(x, y)$ 和反射部分 $s(x, y)$ 的乘积:

$$i(x, y) = b(x, y) \cdot s(x, y), \text{ 两边同时进行对数变换得:}$$

$$\log i(x, y) = \log b(x, y) + \log s(x, y) \quad (4)$$

令 $I = \log(i)$, $B = \log(b)$, $S = \log(s)$, 则式(4)可以简化为:

$$I = B + S \quad (5)$$

其中, B 被认为是光滑函数,表示图像中光照偏移场部分, S 被认为是分片常数函数,表示反射部分。假设输入函数 I 满足式(5),得到如下分割灰度异质图像的 CVB 模型:

$$\min_{c_1, c_2, B, S, \Gamma} \left\{ \alpha \int_\Omega |\nabla B|^2 dx + \lambda_1 \int_{\text{inside}(\Gamma)} (c_1 - S)^2 dx + \right.$$

$$\left. \lambda_2 \int_{\text{outside}(\Gamma)} (c_2 - S)^2 dx + \beta \int_\Gamma ds \right\}$$

$$\text{s. t. } I = B + S$$

其中, $\lambda_1, \lambda_2, \alpha, \beta > 0$ 为参数。使用水平集函数 φ 的零水平来表示 Γ , 引入 Heaviside 函数^[5] $H(\varphi)$, 令 $u := H(\varphi)$ 且凸松弛为 $u: \Omega \rightarrow [0, 1]$, 得到下式:

$$\min_{c_1, c_2, B, S, u} \left\{ \alpha \int_\Omega |\nabla B|^2 dx + \lambda_1 \int_\Omega (c_1 - S)^2 u dx + \right.$$

$$\left. \lambda_2 \int_\Omega (c_2 - S)^2 (1 - u) dx + \beta \int_\Omega |\nabla u| dx \right\}$$

$$\text{s. t. } I = B + S$$

模型第一项是偏移场 B 的平滑项,第二、三项是数据保真项,最后一项是长度正则项。

在文献[7]中,Zosso 等人结合交替极小化和阈值动力学算法来求解 CVB 模型,并结合相场方法^[11]和 MBO 方案^[12]设计基于阈值动力学的算法来求解关于 u 的子问题,但因为该算法需要求解复杂的轮廓演化的偏微分方程,求解速度较慢。此外,上述 CVB 模型中的长度正则项是以分割结果的长度项最小为目标,在分割尖锐边界时容易出现欠分割问题。

2 文中模型及算法

2.1 文中模型与算法

为了充分利用图像边缘信息,该文利用 GAC 模型中的测地长度项取代 CVB 模型中原有的长度项,提出如下的 g-CVB 模型:

$$\begin{aligned} \min_{c_1, c_2, B, S, \Gamma} & \left\{ \alpha \int_{\Omega} |\nabla B|^2 dx + \lambda_1 \int_{\text{inside}(\Gamma)} (c_1 - S)^2 dx + \right. \\ & \left. \lambda_2 \int_{\text{outside}(\Gamma)} (c_2 - S)^2 dx + \beta \int_{\Gamma} g ds \right\} \\ \text{s. t. } & I = B + S \end{aligned} \quad (6)$$

用式(1)中的特征函数 $u(x)$ 隐式表示 Γ ,可将 g-CVB 模型转化为:

$$\begin{aligned} \min_{\substack{c_1, c_2, B, S \\ u \in M}} & \left\{ \lambda_1 \int_{\Omega} (c_1 - S)^2 u dx + \lambda_2 \int_{\Omega} (c_2 - S)^2 (1 - u) dx + \right. \\ & \left. \sqrt{\frac{\pi}{\tau}} \int_{\Omega} \sqrt{g} u G_{\tau} * (\sqrt{g} (1 - u)) dx + \alpha \int_{\Omega} |\nabla B|^2 dx \right\} \\ \text{s. t. } & I = B + S \end{aligned} \quad (7)$$

其中, $\tau, \lambda_1, \lambda_2, \alpha$ 为正参数, $M = \{ u \in BV(\Omega, R) \mid u = \{0, 1\} \}$, $BV(\Omega, R)$ 为有界变差函数空间^[15]。

结合交替极小化和迭代卷积阈值法,该文设计一种高效的数值求解算法。将式(7)转换为无约束极值问题,其对应的增广拉格朗日函数为:

$$\begin{aligned} L(c_1, c_2, u, B, S, \theta) & = \lambda_1 \int_{\Omega} (c_1 - S)^2 u dx + \\ & \lambda_2 \int_{\Omega} (c_2 - S)^2 (1 - u) dx + \sqrt{\frac{\pi}{\tau}} \int_{\Omega} \sqrt{g} u G_{\tau} * \\ & (\sqrt{g} (1 - u)) dx + \alpha \int_{\Omega} |\nabla B|^2 dx + \\ & \frac{\rho}{2} \int_{\Omega} |I - B - S|^2 dx + \langle \theta, I - B - S \rangle_{\Omega} \end{aligned} \quad (8)$$

其中, ρ 是罚参数, θ 是拉格朗日乘子。首先固定 c_1, c_2 :

$$c_1 = \frac{\int_{\Omega} S u dx}{\int_{\Omega} u dx}, \quad c_2 = \frac{\int_{\Omega} S (1 - u) dx}{\int_{\Omega} (1 - u) dx}$$

接下来,分别对各子问题进行求解:

(1) 求解关于 u 的子问题。

$$\begin{aligned} u^{k+1} & = \arg \min_{u \in M} \lambda_1 \int_{\Omega} (c_1 - S^k)^2 u dx + \\ & \lambda_2 \int_{\Omega} (c_2 - S^k)^2 (1 - u) dx + \\ & \sqrt{\frac{\pi}{\tau}} \int_{\Omega} \sqrt{g} u G_{\tau} * (\sqrt{g} (1 - u)) dx \end{aligned}$$

这里记:

$$\begin{aligned} E^{\tau}(u) & = \sqrt{\frac{\pi}{\tau}} \int_{\Omega} \lambda_1' (c_1 - S^k)^2 u + \lambda_2' (c_2 - S^k)^2 \\ & (1 - u) + \sqrt{g} u G_{\tau} * (\sqrt{g} (1 - u)) dx \end{aligned} \quad (9)$$

λ_1', λ_2' 的参数值由 λ_1, λ_2 决定,即 $\sqrt{\pi/\tau} \lambda_1' = \lambda_1$, $\sqrt{\pi/\tau} \lambda_2' = \lambda_2$ 。随着 $\tau \rightarrow 0$, 式(9)趋于收敛^[16]。最小化式(9)中的能量泛函得到:

$$u^{k+1} = \arg \min_{u \in M} E^{\tau}(u) \quad (10)$$

注意到能量泛函最小化问题式(10)的可行集 M 是非凸的,直接求解式(10)是困难的,因此将 M 松弛到它的凸包 $K = \{ u \in BV(\Omega, R) \mid u \in [0, 1] \}$ 上,得到问题式(10)松弛后的极小化问题:

$$u^{k+1} = \arg \min_{u \in K} E^{\tau}(u) \quad (11)$$

该文在 2.2 节中给出求解式(10)与式(11)的等价性证明。

接下来,通过迭代卷积阈值法来求解关于 u 的问题式(11)。很容易证明, $E^{\tau}(u)$ 是一个凹泛函,而凹泛函的图像总是低于它的线性逼近,故可将求 $E^{\tau}(u)$ 的最小值问题近似等价于求 $E^{\tau}(u)$ 的线性逼近的最小值问题^[17]。具体来说,计算 $E^{\tau}(u)$ 在第 k 次迭代 u^k 处的一阶泰勒展开式:

$$L^{\tau}(u, u^k) = \sqrt{\frac{\pi}{\tau}} \int_{\Omega} u \varphi^k dx$$

其中:

$$\begin{aligned} \varphi^k & = \sqrt{g} G_{\tau} * \sqrt{g} (1 - 2u^k) + \lambda_1' (c_1 - S^k)^2 - \\ & \lambda_2' (c_2 - S^k)^2 \end{aligned}$$

继而,通过求解下列线性化问题得到 $k+1$ 次迭代 u^{k+1} :

$$u^{k+1} = \arg \min_{u \in K} L^{\tau}(u, u^k)$$

对于 $\forall x \in \Omega$, 可解出:

$$u^{k+1}(x) = \arg \min_{u(x) \in [0, 1]} u(x) \varphi^k(x)$$

由于凸集上的线性泛函的最小值必在边界处达到,因此:

$$u^{k+1}(x) = \begin{cases} 1, & \varphi^k(x) \leq 0 \\ 0, & \varphi^k(x) > 0 \end{cases}$$

(2) 求解关于 B 的子问题。

$$\begin{aligned} B^{k+1} & = \arg \min_{B: \Omega \rightarrow R} \alpha \int_{\Omega} |\nabla B|^2 dx + \frac{\rho}{2} \int_{\Omega} |I - B - S^k|^2 dx + \\ & \langle \theta^k, I - B - S^k \rangle_{\Omega} \end{aligned}$$

其对应的欧拉-拉格朗日方程为:

$$\rho B^{k+1} - 2\alpha \Delta B^{k+1} = \theta^k + \rho(I - S^k)$$

通过快速傅里叶变换,求解得:

$$B^{k+1} = F^{-1} \left\{ \frac{F[\rho(I - S^k) + \theta^k]}{\rho - 2\alpha F(\Delta)} \right\}$$

(3)求解关于 S 的子问题。

$$S^{k+1} = \arg \min_{S: \Omega \rightarrow R} \lambda_1 \int_{\Omega} (c_1 - S)^2 u^{k+1} dx + \lambda_2 \int_{\Omega} (c_2 - S)^2 (1 - u^{k+1}) dx + \frac{\rho}{2} \int_{\Omega} |I - B^{k+1} - S|^2 dx + \langle \theta^k, I - B^{k+1} - S \rangle_{\Omega}$$

解得:

$$S^{k+1} = \frac{Q_1}{Q_2}$$

其中:

$$Q_1 = 2[\lambda_1 u^{k+1} c_1 + \lambda_2 (1 - u^{k+1}) c_2] + \rho(I - B^{k+1}) + \theta^k$$

$$Q_2 = 2[\lambda_1 u^{k+1} + \lambda_2 (1 - u^{k+1})] + \rho$$

(4)更新 θ 。

$$\theta^{k+1} = \theta^k + \rho(I - B^{k+1} - S^{k+1})$$

依次迭代上述求解过程直到满足收敛条件。具体流程如算法1所示。

2.2 等价性证明

下面的引理1证明了求解式(10)与式(11)的等价性。

引理1:求解原问题式(10)与求解其松弛后的问题式(11)是等价的,即若 u^* 是式(10)的解,则它同样是式(11)的解,反之亦然。

证明:令 $\hat{u} = \arg \min_{u \in M} E^{\tau}(u)$, 即 $E^{\tau}(\hat{u}) = \min_{u \in M} E^{\tau}(u)$, 则 $\arg \min_{u \in M} E^{\tau}(u) \in K$, 又因为 M 为 K 的真子集,故可得 $E^{\tau}(\hat{u}) \geq \min_{u \in K} E^{\tau}(u)$ 。令 $\tilde{u} = \arg \min_{u \in K} E^{\tau}(u)$, 可以证明 $\tilde{u} = \arg \min_{u \in K} E^{\tau}(u) \in M$ 。用反证法,如果 $\tilde{u} = \arg \min_{u \in K} E^{\tau}(u) \notin M$, 记 A 表示一个非零测度集且 $A \subseteq \Omega$, 则 $\exists a \in A$, 对于 $\forall x \in A$, 使得极小值点 u^* 满足 $u^*(x) \in (a, 1-a)$ 。下一步,令 $u' = u^* + t\chi_A$, 其中 χ_A 表示 A 的特征方程。带入得:

$$E^{\tau}(u') = \sqrt{\frac{\pi}{\tau}} \int_{\Omega} \lambda_1' (c_1 - S)^2 (u^* + t\chi_A) + \lambda_2' (c_2 - S)^2 (1 - u^* - t\chi_A) + \sqrt{g} (u^* + t\chi_A) G_{\tau} * (\sqrt{g} (1 - u^* - t\chi_A)) dx$$

对于 $|t| < a$, 求得 $E^{\tau}(u')$ 的一阶导为:

$$\frac{dE^{\tau}(u')}{dt} = \sqrt{\frac{\pi}{\tau}} \int_{\Omega} \lambda_1' (c_1 - S)^2 \chi_A - \lambda_2' (c_2 - S)^2$$

$$\chi_A + \sqrt{g} \chi_A G_{\tau} * (\sqrt{g} (1 - u^* - t\chi_A)) + \sqrt{g} (u^* + t\chi_A) G_{\tau} * (-\sqrt{g} \chi_A) dx$$

二阶导为:

$$\frac{d^2 E^{\tau}(u')}{dt^2} = -2\sqrt{\frac{\pi}{\tau}} \int_{\Omega} \sqrt{g} \chi_A G_{\tau} * (\sqrt{g} \chi_A) dx$$

故 $\frac{d^2 E^{\tau}(u')}{dt^2} < 0$ 。又由 u^* 为极小值点得

$\frac{d^2 E^{\tau}(u')}{dt^2} \geq 0$, 得到矛盾。所以 $\tilde{u} \in M$, 进一步有 $E^{\tau}(\tilde{u}) = \min_{u \in K} E^{\tau}(u) \geq E^{\tau}(\hat{u})$, 故 $E^{\tau}(\hat{u}) = \min_{u \in M} E^{\tau}(u) = \min_{u \in K} E^{\tau}(u) = E^{\tau}(\tilde{u})$, 即(10)与(11)的等价性得证。

算法1:文中算法的求解流程。

1. 初始赋值: $S^0 = I$, $B^0 = (0, 0)$, $\theta^0 = 0$, u^0 取决于初始轮廓。

2. 迭代:更新 u^{k+1} , B^{k+1} , S^{k+1} 如下:

$$u^{k+1}(x) = \begin{cases} 1, & \varphi^k(x) \leq 0 \\ 0, & \varphi^k(x) > 0 \end{cases}$$

其中 $\varphi^k = \sqrt{g} G_{\tau} * \sqrt{g} (1 - 2u^k) + \lambda_1' (c_1 - S^k)^2 - \lambda_2' (c_2 - S^k)^2$

$$B^{k+1} = F^{-1} \left\{ \frac{F(\rho(I - S^k) + \theta^k)}{\rho - 2\alpha F(\Delta)} \right\}$$

$$S^{k+1} = \frac{2[\lambda_1 u^{k+1} c_1 + \lambda_2 (1 - u^{k+1}) c_2] + \rho(I - B^{k+1}) + \theta^k}{2[\lambda_1 u^{k+1} + \lambda_2 (1 - u^{k+1})] + \rho}$$

$$c_1^{k+1} = \frac{\int_{\Omega} S^{k+1} u^{k+1} dx}{\int_{\Omega} u^{k+1} dx}, c_2^{k+1} = \frac{\int_{\Omega} S^{k+1} (1 - u^{k+1}) dx}{\int_{\Omega} (1 - u^{k+1}) dx}$$

3. 迭代终止条件: $\frac{\|u^{k+1} - u^k\|}{\|u^k\|} < \text{tol}$ 。

2.3 稳定性分析

在本节中,定理1证明了对于任意的 $\tau > 0$, $E^{\tau}(u)$ 在迭代过程中逐渐减小。即算法1是无条件稳定的。

定理1 令 u^k ($k = 0, 1, 2, \dots$) 为算法1中 u 的第 k 次迭代,对任意 $\tau > 0$, 有 $E^{\tau}(u^{k+1}) \leq E^{\tau}(u^k)$ 。

证明:对式(9)做线性化处理可得:

$$L^{\tau}(u, u^k) = \sqrt{\frac{\pi}{\tau}} \int_{\Omega} u (\sqrt{g} G_{\tau} * \sqrt{g} (1 - 2u^k) + \lambda_1' (c_1 - S)^2 - \lambda_2' (c_2 - S)^2) dx$$

将 u^k 带入 $E^{\tau}(u)$ 得到:

$$E^{\tau}(u^k) = \sqrt{\frac{\pi}{\tau}} \int_{\Omega} \lambda_1' (c_1 - S)^2 u^k + \lambda_2' (c_2 - S)^2 (1 - u^k) + \sqrt{g} u^k G_{\tau} * (\sqrt{g} (1 - u^k)) dx =$$

$$L^{\tau}(u^k, u^k) + \sqrt{\frac{\pi}{\tau}} \int_{\Omega} \sqrt{g} u^k G_{\tau} * (\sqrt{g} u^k) +$$

$$\lambda_2' (c_2 - S)^2 dx$$

进一步,

$$E^{\tau}(u^{k+1}) = \sqrt{\frac{\pi}{\tau}} \int_{\Omega} \lambda_1' (c_1 - S)^2 u^{k+1} + \lambda_2' (c_2 - S)^2 (1 - u^{k+1}) + \sqrt{g} u^{k+1} G_{\tau} * (\sqrt{g} (1 -$$

$$\begin{aligned}
& u^{k+1}) \mathrm{d} x = L^{\tau}(u^{k+1}, u^k) + \\
& 2 \sqrt{\frac{\pi}{\tau}} \int_{\Omega} \sqrt{g} u^{k+1} G_{\tau} * (\sqrt{g} u^k) \mathrm{d} x - \\
& \sqrt{\frac{\pi}{\tau}} \int_{\Omega} \sqrt{g} u^{k+1} G_{\tau} * (\sqrt{g} u^{k+1}) + \\
& \lambda_2' (c_2 - S)^2 \mathrm{d} x
\end{aligned}$$

因为 u^{k+1} 是序列线性规划的一个解,故:

$$L^{\tau}(u^{k+1}, u^k) \leq L^{\tau}(u^k, u^k)$$

进而:

$$E^{\tau}(u^{k+1}) - E^{\tau}(u^k) = L^{\tau}(u^{k+1}, u^k) - L^{\tau}(u^k, u^k) + \zeta$$

其中:

$$\zeta = - \sqrt{\frac{\pi}{\tau}} \int_{\Omega} \sqrt{g} (u^{k+1} - u^k) G_{\tau} * (\sqrt{g} (u^{k+1} - u^k)) \mathrm{d} x$$

基于热核卷积的半群性质:

$$\int_{R^*} f G_{\tau} * g \mathrm{d} x = \int_{R^*} (G_{\tau/2} * f) (G_{\tau/2} * g) \mathrm{d} x$$

可得:

$$\zeta = - \sqrt{\frac{\pi}{\tau}} \int_{R^*} [G_{\tau/2} * (\sqrt{g} (u^{k+1} - u^k))]^2 \mathrm{d} x \leq 0$$

因此 $E^{\tau}(u^{k+1}) - E^{\tau}(u^k) \leq 0$ 。证毕。

3 实验结果及分析

本节中,对多幅不同类型的灰度异质的图像进行分割,并同 CV 模型^[4]、Cai 模型^[18]、CVB 模型^[7]、ICTM-GAC 算法^[13]以及 ICTM-CV 算法^[19]的分割结果进行对比,以检验文中方法的有效性。为了定量地评价不同方法的分割性能,这里采用 Dice 相似系数 (Dice Similarity Coefficient, DSC)^[20]和 Hausdorff 距离 (Hausdorff Distance, HD)^[21]作为评价指标。它们的定义分别是:

$$\text{DSC}(S_1, S_2) = \frac{2 |S_1 \cap S_2|}{|S_1| + |S_2|} \times 100\% \quad (12)$$

$$\text{HD}(A, B) =$$

$$\max \left(\frac{1}{n} \sum_{a \in A} \min_{b \in B} \|a - b\|, \frac{1}{n} \sum_{b \in B} \min_{a \in A} \|a - b\| \right) \quad (13)$$

其中, S_1 代表分割后目标物体的区域, S_2 代表对应的真实区域, A 为分割后的二值图像, B 是相应的真实二值图像, n 表示分割目标边界集的总数。DSC 值越高, HD 值越低,表示分割结果越精确。在提出的模型(7)中,设置参数 $\tau = 0.4$, $\lambda_1 = \lambda_2$,平滑参数 $\alpha = 9\,000$,不同图像对应的 λ_1 、 λ_2 的值列于表 1 中。在算法 1 中固定惩罚参数 $\rho = 92$,设置停止准则 $\text{tol} = 10^{-5}$ 。

表 1 参数 λ_1 、 λ_2 的取值

参数	图 1			图 2			
	(I)	(II)	(III)	(IV)	(V)	(VI)	(VII)
$\lambda_1 = \lambda_2$	10	13	13	28	14.5	28	27.5

3.1 合成图像与 MR 图像的数值实验结果

首先,图 1 展示了不同模型与算法对三幅合成图像的分割结果。其中,第一列为带有初始轮廓(白色线)的合成图像,后面依次是 CV 模型、Cai 模型、CVB 模型、ICTM-GAC 算法、ICTM-CV 算法和文中算法的分割结果。从图中可以看出,输入图像中的偏移场严重影响了 CV 模型和 Cai 模型的分割性能,这两种模型都未能对目标进行整体分割。CVB 模型在分割灰度异质图像时,能对输入图像进行偏移场矫正,但不能分割出一些尖角边缘。ICTM-GAC 算法分割效果不佳,ICTM-CV 算法受偏移场影响分割出错误边缘,然而文中算法能精确地分割出尖角边缘,得到最优的分割结果。进一步,观察表 2 中各个模型分割结果的 DSC、HD 值,发现文中算法有较高的 DSC 值与较低的 HD 值,分割结果较好。

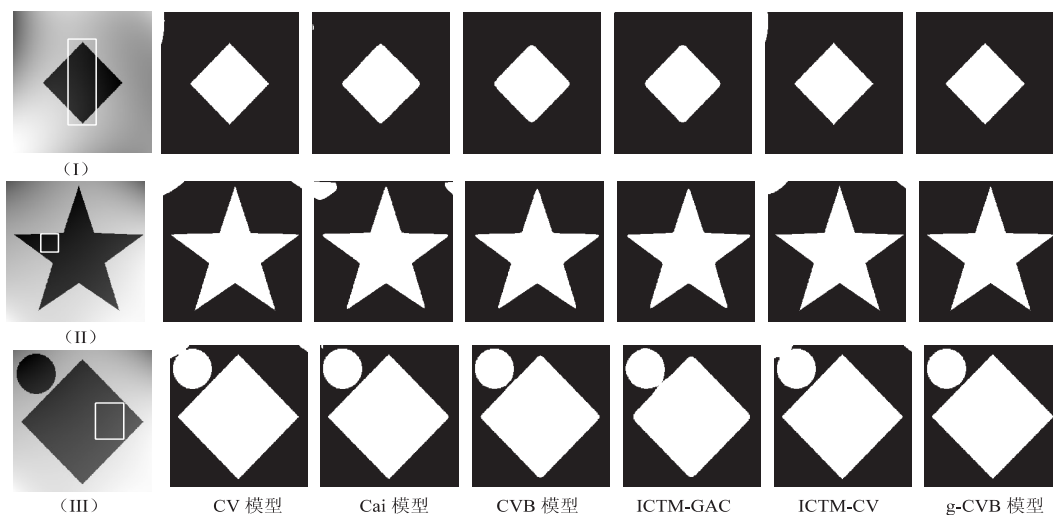


图 1 不同算法对合成图像的分割结果

表2 图1中分割结果的DSC、HD值、迭代收敛步数及收敛时间

图像	评估指标	CV模型	Cai模型	CVB模型	ICTM-GAC	ICTM-CV	g-CVB模型
图(I)	DSC/%	96.12	98.50	99.54	99.68	98.46	100.00
	HD	0.854 6	0.575 6	0.079 7	0.072 4	0.468 4	0
	Iter	62	120	24	19	7	2
	Time/s	0.307 9	0.380 2	0.139	0.036 8	0.360 7	0.062 1
图(II)	DSC/%	97.20	96.13	99.71	99.67	98.07	100.00
	HD	0.825 9	1.169	0.156 4	0.247 3	0.619 2	0
	Iter	64	87	145	52	12	3
	Time/s	1.732 8	1.651	3.927 5	0.442 4	1.293 9	0.168 9
图(III)	DSC/%	99.13	99.90	99.97	99.49	98.93	100.00
	HD	0.393 4	0.140 9	0.033 3	0.386 3	0.394 7	0
	Iter	21	53	57	136	8	3
	Time/s	0.153 1	0.281	0.292 3	0.243 4	0.434 3	0.071 6

其次,对加有不同偏移场的灰度异质MR图像中的脑白质进行分割,实验结果如图2所示。可以发现,文中算法能准确识别细微的脑灰质得到更精确的分割

结果。进一步,通过表3的数据进行定量分析,文中算法取得的DSC和HD值要优于其他算法,且其收敛速度更快。

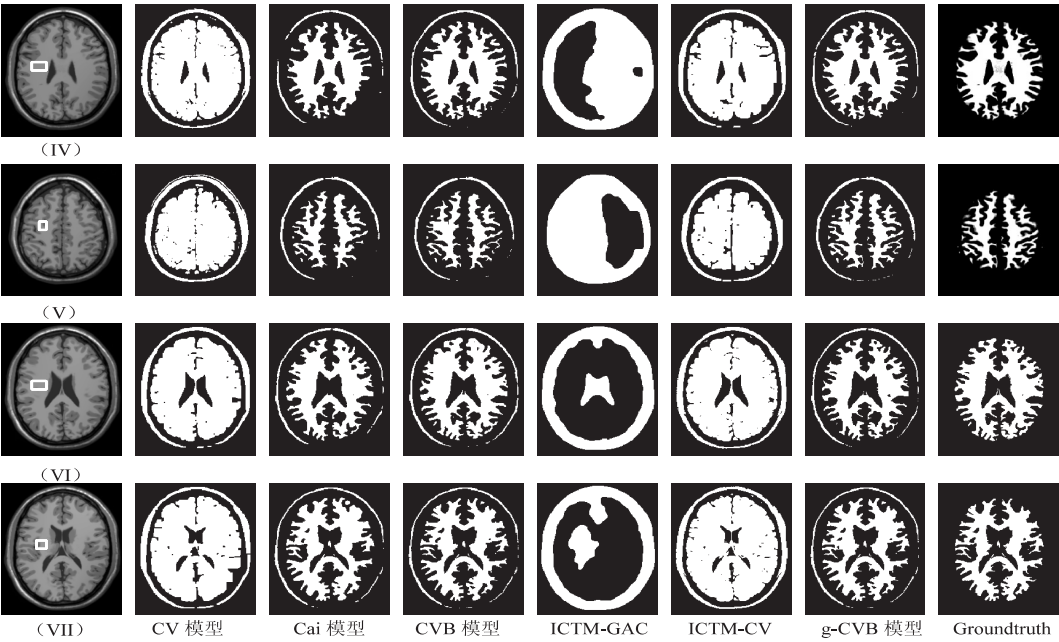


图2 不同算法对MR脑图像白质的分割结果

表3 图2中分割结果的DSC、HD值、迭代收敛步数及收敛时间

图像	评估指标	CV模型	Cai模型	CVB模型	ICTM-GAC	ICTM-CV	g-CVB模型
图(IV)	DSC/%	66.24	88.96	88.94	53.92	69.12	89.72
	HD	4.597 2	2.387 9	2.522 1	8.006 5	4.833 7	2.364 7
	Iter	153	73	11	104	14	2
	Time/s	0.307 1	0.246 6	0.192	0.110 4	1.969 7	0.063 2
图(V)	DSC/%	52.47	78.71	80.13	28.38	61.92	80.87
	HD	4.374 9	2.494 1	2.379 3	8.292 8	5.141 4	2.332 8
	Iter	118	72	11	636	14	2
	Time/s	0.219 2	0.248 7	0.176 9	0.751 9	2.408 8	0.055 6

续表 3

图像	评估指标	CV 模型	Cai 模型	CVB 模型	ICTM-GAC	ICTM-CV	g-CVB 模型
图 (VI)	DSC/%	71.90	87.93	90.37	17.39	63.43	91.55
	HD	4.538 7	3.075 9	2.841 6	8.833 3	4.725 7	2.643 1
	Iter	161	72	11	227	14	2
	Time/s	0.293 3	0.267	0.167 4	0.251 2	2.248 3	0.077 6
图 (VII)	DSC/%	64.96	88.98	90.98	45.69	49.01	91.42
	HD	4.975 9	2.907 2	2.640 4	8.483 5	4.810 6	2.583 4
	Iter	191	55	11	207	11	2
	Time/s	0.338 2	0.193	0.165 7	0.239 2	1.886 2	0.059 3

3.2 原始图像数值实验结果

为验证文中方法对原始图像分割的有效性,图 3 给出了文中方法对来自魏茨曼分割数据集^[22]上的 8 幅灰度异质原始自然图像的分割结果,并与其他方法作对比。文中方法能精准分割出目标物体边缘且在一

些细节边缘表现较好。表 4 给出了各算法对 6 幅原始图像分割结果的 DSC 值,文中算法的 DSC 均值最大,且方差较小,稳定性较强。可以说明,文中算法对原始图像分割精度较高。

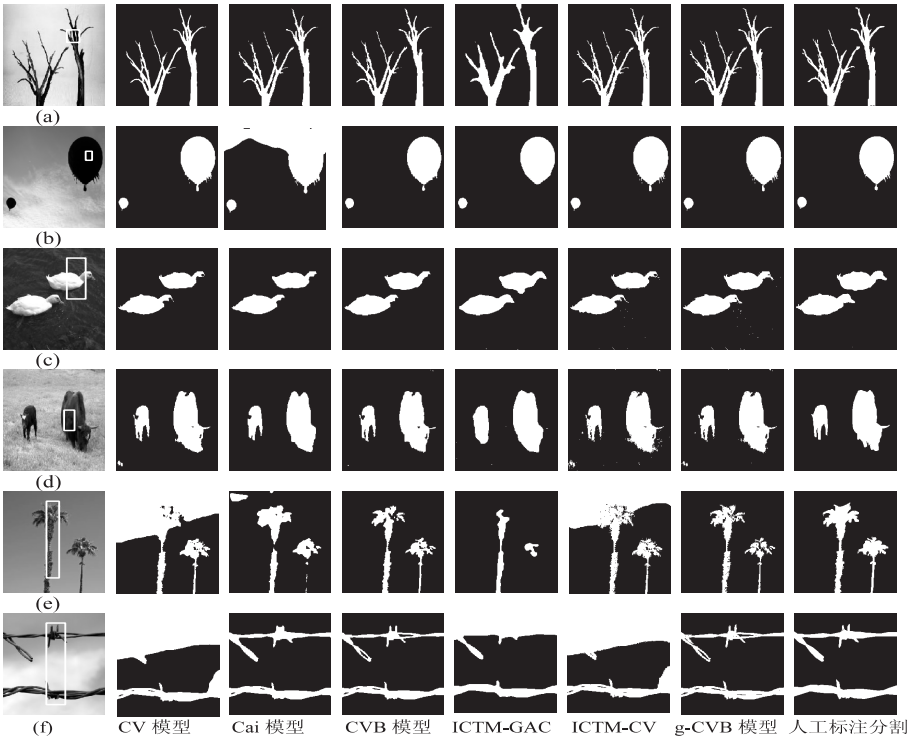


图 3 不同算法对原始图像的分割结果

表 4 图 3 中分割结果的 DSC 值 %

评估指标	图像	CV 模型	Cai 模型	CVB 模型	ICTM-GAC	ICTM-CV	g-CVB 模型
DSC	(a)	91.56	91.30	91.58	87.57	91.13	92.11
	(b)	98.58	60.84	98.82	98.50	98.58	99.00
	(c)	90.36	94.52	93.10	94.01	89.94	95.10
	(d)	94.95	94.45	96.45	93.75	94.39	94.58
	(e)	49.87	85.30	85.24	57.53	49.28	87.48
	(f)	47.57	84.67	90.08	57.59	47.50	90.44
	均值	83.24	87.37	93.22	80.67	81.22	94.05
	方差	21.48	11.52	4.73	17.81	22.63	4.22

4 结束语

在 CVB 模型的基础上,提出基于测地轮廓长度和特征函数的灰度异质图像分割方法。通过对灰度异质的合成图像、MR 图像和原始图像进行分割,结果表明该方法分割精度较高,且收敛速度明显提升。

参考文献:

- [1] KASS M, WITKIN A, TERZOPOULOS D. Snakes: active contour models [J]. International Journal of Computer Vision, 1988, 1(4): 321–331.
- [2] CASELLES V, KIMMEL R, SAPIRO G. Geodesic active contours [J]. International Journal of Computer Vision, 1997, 22(1): 61–79.
- [3] MUMFORD D, SHAH J. Optimal approximations by piecewise smooth functions and associated variational problems [J]. Communications on Pure and Applied Mathematics, 1989, 42(5): 577–685.
- [4] CHAN T, VESE L. Active contours without edges [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2001, 10(2): 266–277.
- [5] LI C, XU C, GUI C, et al. Distance regularized level set evolution and its application to image segmentation [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2010, 19(12): 3243–3254.
- [6] BRESSON X, ESEDOGLU S, VANDERGHEYNST P, et al. Fast global minimization of the active contour/snake model [J]. Journal of Mathematical Imaging and Vision, 2007, 28(2): 151–167.
- [7] ZOSSO D, AN J, STEVICK J, et al. Image segmentation with dynamic artifacts detection and bias correction [J]. Inverse Problems and Imaging, 2017, 11(3): 577–600.
- [8] LAND E H. The retinex theory of color vision [J]. Scientific American, 1977, 237(6): 108–129.
- [9] 田会娟, 蔡敏鹏, 关涛, 等. 基于 YCbCr 颜色空间的 Retinex 低照度图像增强方法研究 [J]. 光子学报, 2020, 49(2): 0210002.
- [10] ZHANG J, JAMES G. An effective alternating direction method of multipliers for color image restoration [J]. Applied Numerical Mathematics, 2021, 164: 43–56.
- [11] MERRIMAN B, BENCE J K, OSHER S. Diffusion generated motion by mean curvature [M]. Los Angeles: University of California, Los Angeles, 1992.
- [12] MERRIMAN B, BENCE J K, OSHER S J. Motion of multiple junctions: a level set approach [J]. Journal of Computational Physics, 1994, 112(2): 334–363.
- [13] MA J, WANG D, WANG X P, et al. A characteristic function-based algorithm for geodesic active contours [J]. SIAM Journal on Imaging Sciences, 2021, 14(3): 1184–1205.
- [14] MIRANDA JR M, PALLARA D, PARONETTO F, et al. Short-time heat flow and functions of bounded variation in R^N [C]//Annales de la faculté des sciences de toulouse: mathématiques. Toulouse: Université Paul Sabatier, 2007: 125–145.
- [15] REINWAND S. Functions of bounded variation: theory, methods, applications [M]. [s. l.]: Cuvillier Verlag, 2021.
- [16] HU W. Threshold dynamics: analysis and applications [M]. Hong Kong: Hong Kong University of Science and Technology, 2020.
- [17] TAO P D, AN L T H. A dc optimization algorithm for solving the trust-region subproblem [J]. SIAM Journal on Optimization, 1998, 8(2): 476–505.
- [18] CAI X, CHAN R, ZENG T. A two-stage image segmentation method using a convex variant of the Mumford–Shah model and thresholding [J]. SIAM Journal on Imaging Sciences, 2013, 6(1): 368–390.
- [19] WANG D, WANG X P. The iterative convolution–thresholding method (ICTM) for image segmentation [J]. Pattern Recognition, 2022, 130: 108794.
- [20] VAASSEN F, HAZELAAR C, VANIQUEI A, et al. Evaluation of measures for assessing time-saving of automatic organ-at-risk segmentation in radiotherapy [J]. Physics and Imaging in Radiation Oncology, 2020, 13: 1–6.
- [21] LIU Qiong, PENG Hao, CHEN Jifeng, et al. Design and implementation of parallel algorithm for image matching based on Hausdorff distance [J]. Microprocessors and Microsystems, 2021, 82: 103919.
- [22] ALPERT S, GALUN M, BRANDT A, et al. Image segmentation by probabilistic bottom-up aggregation and cue integration [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2011, 34(2): 315–327.