

全变差 Cauchy 非负张量分解高光谱解混算法

吴新浪, 叶 军

(南京邮电大学 理学院, 江苏 南京 210023)

摘 要: 高光谱图像解混是高光谱图像应用的一项重要任务, 包括了对端元的提取和丰度的估计。基于非负张量分解的光谱解混方法能很好地保留高光谱图像的空间结构信息, 但是却没有很好地利用丰度张量的分段光滑性约束, 同时噪声的存在也严重影响了高光谱图像的解混性能。针对上述问题, 全变差 Cauchy 非负张量分解 (Total Variation Cauchy Nonnegative Tensor Factorization, TV-CNTF) 方法被提出用于高光谱图像解混。该方法利用 Cauchy 损失来代替传统的最小二乘损失, 通过减小噪声点在解混模型中的权重, 来降低噪声对解混结果的影响, 同时在模型中加入了全变差算子, 保证了丰度张量的分段平滑结构。此外, 采用交替方向乘子法求解所提出的 TV-CNTF。经过模拟和真实数据实验, 同现有的其他方法相比, TV-CNTF 方法的解混效果和鲁棒性都更好。

关键词: 高光谱图像解混; 非负张量分解; 全变差; Cauchy 损失; 交替方向乘子法

中图分类号: TP751

文献标识码: A

文章编号: 1673-629X(2022)12-0021-08

doi: 10.3969/j.issn.1673-629X.2022.12.004

Hyperspectral Unmixing Algorithm Based on Total Variation Cauchy Nonnegative Tensor Factorization

WU Xin-lang, YE Jun

(School of Science, Nanjing University of Posts and Telecommunications, Nanjing 210023, China)

Abstract: Hyperspectral image unmixing is an important task in hyperspectral image application, which includes the extraction of endmembers and the estimation of abundance. The spectral unmixing method based on nonnegative tensor decomposition can well retain the spatial structure information of hyperspectral image, but does not make good use of the piecewise smoothness constraint of abundance tensor. At the same time, noise also seriously affects the performance of hyperspectral image unmixing. Therefore, a method named Total Variation Cauchy Nonnegative Tensor Factorization (TV-CNTF) is proposed for hyperspectral image unmixing. Cauchy loss was used to replace the traditional least square loss, and the influence of noise on the results was reduced by reducing the weight of noise points to the model. At the same time, total variation operator was added into the model to ensure the piecewise smooth structure of abundance tensor. Besides, the alternate direction method of multipliers is adopted to solving the proposed TV-CNTF. Through simulation and real data experiments and compared with other existing methods, the proposed TV-CNTF method has better unmixing effect and robustness.

Key words: hyperspectral images unmixing; nonnegative tensor decomposition; total variation; Cauchy loss; alternative direction method of multipliers

1 概 述

一幅完整的高光谱图像 (Hyperspectral Image, HSI) 包含着丰富的空间信息和光谱信息, 被广泛地应用多个研究领域^[1-3]。然而, 受传感器空间分辨率和自然界地物表面特征复杂性的限制, HSI 中存在大量的“混合像元”^[4], 这大大降低了高光谱图像地物识别的精度。因此, 高光谱图像解混 (Hyperspectral Image Unmixing, HU) 是高光谱图像应用的一个重要

步骤。

高光谱解混, 是指从混合像元中分解出它们所包含的纯物质特征 (端元) 并确定这些端元之间的比例 (丰度) 的过程。目前高光谱解混大多都是基于线性混合模型 (Linear Mixed Model, LMM)^[5] 进行研究的。线性混合模型通常假设混合像元光谱是纯物质特征的一个线性组合, 并以相应的丰度分数加权, 有着结构简单, 物理意义明确, 适用性广的优点。近年来, 基于线

收稿日期: 2021-12-12

修回日期: 2022-04-13

基金项目: 国家自然科学基金 (61971234); 南京邮电大学校内基金 (NY220209)

作者简介: 吴新浪 (1997-), 男, 硕士研究生, 研究方向为图像处理; 通信作者: 叶 军 (1981-), 男, 博士, 副教授, 研究方向为机器学习、图像处理。

性混合模型的各类方法中,非负矩阵分解(Nonnegative Matrix Factorization, NMF)方法^[6]备受广大研究者的关注。NMF 能够将高维 HSI 数据分解成两个非负矩阵的乘积,同时获得端元矩阵和丰度矩阵。由于目标函数的非凸性,直接对 HSI 进行分解常常会陷入局部最小值。因此,常常在 NMF 框架中加入合适的约束以减小解空间,首先被添加的约束便是丰度非负约束(Abundance Nonnegativity Constraint, ANC)和丰度和为 1 约束(Abundance Sum-to-one Constraint, ASC)。为了进一步减小解空间,避免局部最小值问题,更多关于端元矩阵和丰度矩阵的约束被加入到 NMF 模型中。

根据 HSI 的几何特征,Miao 和 Qi^[7]将单纯性体积最小化和 NMF 模型结合起来,提出了最小体积约束 NMF (Minimum Volume Constrained NMF, MVCNMF)。Lu 等^[8]在 NMF 框架中加入了流形正则化项,提出图正则化 NMF (Graph Regularized $L_{1/2}$ -NMF, GLNMF)方法。孔繁铮等^[9]在解混模型中引入丰度矩阵的空间相关性约束,提出了一种基于空间相关性约束联合子空间追踪的 HU 算法。利用 HSI 中丰富的空间与光谱相关性,袁博等^[10]提出了一种结合空间与谱间相关性分析的 NMF 解混算法。在促进丰度矩阵稀疏性方面,由于 L_0 范数的非凸性不利于模型求解, L_1 范数最早被用来代替 L_0 范数促进稀疏^[11]。但是, L_1 范数不满足完全可加性约束^[12],于是 Qian 等^[13]、EJ 等^[14]、李璠等^[15]分别利用 $L_{1/2}$ 范数、加权 L_1 范数和变形 L_1 范数代替 L_1 范数促进丰度稀疏,均取得了不错的解混效果。然而,当噪声大量存在时,上述方法的解混效果显著降低,这是因为基于 NMF 方法中的最小二乘目标函数对噪声敏感。为了减少噪声的影响,许多文献引入了鲁棒估计量来代替传统的最小二乘目标函数,提出了许多鲁棒 NMF 方法,如基于熵损失的鲁棒 NMF^[16]、基于一般损失的鲁棒 NMF^[17]等。文献^[18]利用阈值惩罚函数代替非负矩阵欠逼近中的残差非负约束,提出了 $L1/2$ 正则化的逐次高光光谱图像光谱解混,抗噪性能良好。但是,鲁棒 NMF 方法,在解混过程中会丢失一部分空间信息,其主要的原因是, NMF 是一种矩阵分解方法。张量提供了一个更自然的 HSI 立方体表示,它表征了两个空间维和一个光谱维。矩阵向量非负张量分解算法(Matrix-Vector Nonnegative Tensor Factorization, MV-NTF)^[19]将 HSI 分解为几个分量张量,每个分量张量都是矩阵和向量的外积,分别代表端元和丰度。然而, MV-NTF 缺少一些必要的约束条件。

为了能够充分利用空间信息并同时减少噪声的影响,该文在非负张量分解的框架上利用 Cauchy 损失函

数来代替最小二乘损失函数,考虑 HSI 的稀疏性和丰度张量的分段光滑性,提出了全变差 Cauchy 非负张量分解高光谱解混算法(TV-CNTF),该方法能够保证 HSI 空间信息不会丢失,同时又能减小噪声对 HSI 解混的影响。具体贡献如下:

(1) 利用张量分解的框架处理解混问题,充分保留了 HSI 的空间结构信息,由于 HSI 中相邻的像素更可能有相近的物质构成比例,因此在张量分解模型下引入 TV 正则项来保证丰度的分段光滑性。

(2) 利用 Cauchy 损失函数代替最小二乘损失函数,与最小二乘损失函数相比, Cauchy 损失函数的影响函数有上界,这意味着 HSI 中的大噪声点对解混结果的影响有限。因此, Cauchy 损失函数可以一定程度上抑制噪声对解混结果的影响。

(3) 通过交替方向乘法(ADMM),推出了 TV-CNTF 的迭代更新算法,大量实验结果表明了所提 TV-CNTF 解混方法的有效性。

2 背景

2.1 线性混合模型

线性混合模型(Linear Mixture Model, LMM)通常假设观测到的 HSI $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^{I \times J \times L}$ 可以表示成对应的丰度系数和端元光谱的模积形式,即:

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} \times_3 \mathbf{A} + \mathbf{N} \quad (1)$$

其中, $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{L \times K}$ 是端元矩阵, $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^{I \times J \times K}$ 表示对应的丰度图像, $\mathbf{N} \in \mathbf{R}^{I \times J \times L}$ 为高斯噪声和模型重构误差, I 、 J 和 L 分别是 HSI 的宽度、高度和波段数量, K 是端元数。通常丰度还应满足两个约束,丰度非负约束(ANC)和丰度和为 1 约束(ASC)。分别表示为:

$$\mathbf{x} \geq 0 \quad (2)$$

$$\mathbf{x} \times_3 \mathbf{1}_{1 \times K} = \mathbf{1}_{I \times J \times 1} \quad (3)$$

其中, $\mathbf{1}_{1 \times K}$ 为全 1 行向量, $\mathbf{1}_{I \times J \times 1}$ 为 $I \times J \times 1$ 的全 1 三阶张量。

2.2 稀疏张量分解

由于 LMM 中假设 HSI 是由多个端元光谱特征按照它们对应的丰度分数线性组合而成,因此端元矩阵 \mathbf{A} 和丰度张量 \mathbf{x} 表现出非负性。建立非负张量分解模型如下:

$$\min_{\mathbf{A}, \mathbf{x}} \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{x} \times_3 \mathbf{A}\|_F^2 \quad (4)$$

$$\text{s. t. } \mathbf{A} \geq 0, \mathbf{x} \geq 0, \mathbf{x} \times_3 \mathbf{1}_{1 \times K} = \mathbf{1}_{I \times J \times 1}$$

其中, $\|\bullet\|_F$ 表示张量的 Frobenius 范数,三阶张量 $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^{I \times J \times K}$ 的 Frobenius 范数为:

$$\|\mathbf{x}\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K |x_{ijk}|^2} \quad (5)$$

由于 HSI 图像中的混合像元往往由有限的几个端

元混合而成,因此丰度张量表现出稀疏性,建立非负稀疏张量分解模型如下:

$$\min_{A, x} \frac{1}{2} \|y - x \times_3 A\|_F^2 + \lambda \|x\|_0 \quad (6)$$

$$\text{s. t. } A \geq 0, x \geq 0, x \times_3 I_{1 \times K} = I_{I \times J \times 1}$$

其中, λ 为控制稀疏程度的参数, $\|x\|_0$ 表示张量 x 中非零元素的个数。

由于(6)是一个非凸问题,通常把 L_0 范数松弛为 L_1 范数,如下:

$$\min_{A, x} \frac{1}{2} \|y - x \times_3 A\|_F^2 + \lambda \|x\|_1 \quad (7)$$

$$\text{s. t. } A \geq 0, x \geq 0, x \times_3 I_{1 \times K} = I_{I \times J \times 1}$$

其中, $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K |x_{ijk}|$, 然而 L_1 范数不能很好地促进对丰度张量稀疏性的约束。因此,加权 L_1 范数被提出用来促进丰度张量的稀疏^[14],通过迭代地更新权值张量 M 的值,能使丰度张量 x 的稀疏性得到很好的保持,模型如下:

$$\min_{A, x} \frac{1}{2} \|y - x \times_3 A\|_F^2 + \lambda \|M \odot x\|_1 \quad (8)$$

$$\text{s. t. } A \geq 0, x \geq 0, x \times_3 I_{1 \times K} = I_{I \times J \times 1}$$

其中, \odot 表示张量元素间的乘法,权值张量 M 的更新如下:

$$M^{(k+1)} = 1. / \max(|x^{(k)}|, \text{eps}) \quad (9)$$

其中, eps 为一个很小的正值,该文取 $\text{eps} = 1e - 12$ 。

2.3 Cauchy 损失函数

Cauchy 损失函数 (Cauchy Loss Function, CLF) 定义为:

$$\varphi(x) = \log(1 + (x/c)^2) \quad (10)$$

其中, c 是常数。

对于一个损失函数 $\varphi(x)$, 影响函数 $\psi(x)$ 是用来衡量 $\varphi(x)$ 中元素变化带来的影响。其中 $\psi(x)$ 定义如下^[20]:

$$\psi(x) = \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x} \quad (11)$$

那么 CLF 的影响函数为:

$$\psi(x) = \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + c^2} \quad (12)$$

可以看出,随着元素 x 的增大, $\psi(x)$ 存在上界,并最终趋于 0,这意味着随着噪声的不断增大,其对 CLF 的影响是有限的,最终达到上限。因此 Cauchy 损失具有鲁棒性,它可以有效地抑制大噪声。

3 全变差 Cauchy 非负张量分解模型

与最小二乘损失函数相比, Cauchy 损失函数能够减轻单个元素的影响,特别是噪声较大的元素,因此 Cauchy 损失函数比最小二乘损失函数更能适应于噪

声环境下的解混。在 NTF 框架下,该文利用 Cauchy 损失函数来代替最小二乘损失函数,同时在模型中加入了 TV 算子来保证丰度张量的分段平滑结构,提出了一种新的解混算法。

3.1 Cauchy 损失函数下的重构误差

基于张量分解框架下的重构误差的最小二乘损失函数形式如下:

$$E = \|y - x \times_3 A\|_F^2 = \sum_{l=1}^L \|y_{::l} - (x \times_3 A)_{::l}\|_F^2 = \sum_{l=1}^L e_l^2 \quad (13)$$

其中, $y_{::l}$ 表示张量 y 沿第三维(光谱维)的切片, $e_l = \|Y_{::l} - (x \times_3 A)_{::l}\|_F$ 表示第 l 片的片段误差。

考虑到 Cauchy 损失函数对噪声的鲁棒性,将(13)的最小二乘损失替换成 Cauchy 损失,得到:

$$E' = \sum_{l=1}^L \varphi(e_l) \quad (14)$$

由于 $\varphi(x)$ 是非凸和非线性的,很难直接求解,因此把 $\varphi(x)$ 在 $x = 0$ 处进行泰勒展开,得到:

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \frac{\partial \varphi(x)}{\partial(x)} \times x + R_1(x) = \frac{2x^2}{x^2 + c^2} + R_1(x) \quad (15)$$

其中, $R_1(x)$ 为泰勒余项,用 $\frac{2x^2}{x^2 + c^2}$ 近似 $\varphi(x)$, 代入(14),得到:

$$E' = \sum_{l=1}^L \frac{2e_l^2}{e_l^2 + c^2} \quad (16)$$

令 $w_l = 2/(e_l^2 + c^2)$, 则基于 Cauchy 损失下的重构误差可定义如下:

$$\begin{aligned} E' &= \sum_{l=1}^L w_l e_l^2 = \sum_{l=1}^L w_l \|y_{::l} - (x \times_3 A)_{::l}\|_F^2 = \\ &= \sum_{l=1}^L \|\sqrt{w_l} \times y_{::l} - \sqrt{w_l} \times (x \times_3 A)_{::l}\|_F^2 = \\ &= \|y \times_3 \sqrt{W} - x \times_3 A \times_3 \sqrt{W}\|_F^2 = \\ &= \|\hat{y} - x \times_3 \hat{A}\|_F^2 \end{aligned} \quad (17)$$

其中:

$$W = \text{diag}(w_1, w_2, \dots, w_L) \quad (18)$$

$$\hat{y} = y \times_3 \sqrt{W}, \hat{A} = A \times_3 \sqrt{W} \quad (19)$$

3.2 TV-CNTF 算法解混模型

为了减少噪声的影响,并考虑丰度的分段光滑性,该文将 Cauchy 损失函数下的重构误差式(17)及 TV 项重新引入模型(8)中,提出了全变差 Cauchy 非负张量分解模型,如下:

$$\begin{aligned} \min_{\hat{\mathbf{A}}, \mathbf{x}} \quad & \frac{1}{2} \|\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{x} \times_3 \hat{\mathbf{A}}\|_F^2 + \lambda \|\mathbf{M} \odot \mathbf{x}\|_1 + \tau \|\mathbf{x}\|_{\text{TV}} \\ \text{s. t.} \quad & \hat{\mathbf{A}} \geq 0, \mathbf{x} \geq 0, \mathbf{x} \times_3 \mathbf{I}_{1 \times K} = \mathbf{I}_{I \times J \times 1} \end{aligned} \quad (20)$$

3.3 ADMM 算法求解

针对模型(20),为了便于求解,引入辅助变量 \mathbf{L} , 模型(20)变为:

$$\begin{aligned} \min_{\hat{\mathbf{A}}, \mathbf{x}, \mathbf{L}} \quad & \frac{1}{2} \|\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{x} \times_3 \hat{\mathbf{A}}\|_F^2 + \lambda \|\mathbf{M} \odot \mathbf{x}\|_1 + \tau \|\mathbf{L}\|_{\text{TV}} \\ \text{s. t.} \quad & \hat{\mathbf{A}} \geq 0, \mathbf{x} \geq 0, \mathbf{L} = \mathbf{x}, \mathbf{x} \times_3 \mathbf{I}_{1 \times K} = \mathbf{I}_{I \times J \times 1} \end{aligned} \quad (21)$$

将约束 $\mathbf{L} = \mathbf{x}$ 代入目标函数,模型(21) 变为:

$$\begin{aligned} \min_{\hat{\mathbf{A}}, \mathbf{x}, \mathbf{L}} \quad & \frac{1}{2} \|\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{x} \times_3 \hat{\mathbf{A}}\|_F^2 + \lambda \|\mathbf{M} \odot \mathbf{x}\|_1 + \\ & \tau \|\mathbf{L}\|_{\text{TV}} + \frac{\mu}{2} \|\mathbf{L} - \mathbf{x}\|_F^2 \end{aligned} \quad (22)$$

$$\text{s. t.} \quad \hat{\mathbf{A}} \geq 0, \mathbf{x} \geq 0, \mathbf{x} \times_3 \mathbf{I}_{1 \times K} = \mathbf{I}_{I \times J \times 1}$$

模型(22)转化为增广 Lagrange 函数如下:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\hat{\mathbf{A}}, \mathbf{x}, \mathbf{L}) = & \frac{1}{2} \|\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{x} \times_3 \hat{\mathbf{A}}\|_F^2 + \lambda \|\mathbf{M} \odot \mathbf{x}\|_1 + \\ & \tau \|\mathbf{L}\|_{\text{TV}} + \frac{\mu}{2} \|\mathbf{L} - \mathbf{x}\|_F^2 + \\ & \text{Tr}(\hat{\Psi} \hat{\mathbf{A}}) + \text{Tr}(\hat{\Gamma} \mathbf{x}) + \\ & \|\mathbf{I}_{I \times J \times 1} - \mathbf{x} \times_3 \mathbf{I}_{1 \times K}\|_F^2 \end{aligned} \quad (23)$$

其中, $\hat{\Psi} \in \mathbf{R}^{L \times K}$ 、 $\hat{\Gamma} \in \mathbf{R}^{K \times (I \times J)}$ 为矩阵形式的 Lagrange 算子。

最小化增广 Lagrange 函数(23),通过交替方向乘子法(ADMM),寻找每个变量的解,同时修正其他变量。

(1)对变量 $\hat{\mathbf{A}}$,固定 \mathbf{x} 和 \mathbf{L} ,最小化(23)得:

$$\min_{\hat{\mathbf{A}}} \frac{1}{2} \|\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{x} \times_3 \hat{\mathbf{A}}\|_F^2 + \text{Tr}(\hat{\Psi} \hat{\mathbf{A}}) \quad (24)$$

子问题(24)可以通过 KKT 条件解出:

$$\hat{\mathbf{A}}^{(k+1)} = \hat{\mathbf{A}}^{(k)} \bullet (\hat{\mathbf{Y}}_{(3)}^{(k)} \mathbf{X}_{(3)}^{(k)T}) / (\hat{\mathbf{A}}^{(k)} \mathbf{X}_{(3)}^{(K)} \mathbf{X}_{(3)}^{(k)T}) \quad (25)$$

其中, $\bullet^{(k)}$ 表示变量第 k 次迭代的值, $\hat{\mathbf{Y}}_{(3)}$ 、 $\mathbf{X}_{(3)}$ 分别表示把张量 $\hat{\mathbf{Y}}$ 、 \mathbf{X} 沿模 3 展开所得的矩阵。

(2)对变量 \mathbf{x} ,固定 $\hat{\mathbf{A}}$ 和 \mathbf{L} ,最小化(23)得:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & \frac{1}{2} \|\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{x} \times_3 \hat{\mathbf{A}}\|_F^2 + \lambda \|\mathbf{M} \odot \mathbf{x}\|_1 + \\ & \frac{\mu}{2} \|\mathbf{L} - \mathbf{x}\|_F^2 + \text{Tr}(\hat{\Gamma} \mathbf{x}) + \\ & \frac{1}{2} \|\mathbf{I}_{I \times J \times 1} - \mathbf{x} \times_3 \mathbf{I}_{1 \times K}\|_F^2 \end{aligned} \quad (26)$$

整理(26),得:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & \frac{1}{2} \|\hat{\mathbf{y}}_f - \mathbf{x} \times_3 \hat{\mathbf{A}}_f\|_F^2 + \lambda \|\mathbf{M} \odot \mathbf{x}\|_1 + \\ & \frac{\mu}{2} \|\mathbf{L} - \mathbf{x}\|_F^2 + \text{Tr}(\hat{\Gamma} \mathbf{x}) \end{aligned} \quad (27)$$

其中, $\hat{\mathbf{y}}_f$ 是增广张量, $\hat{\mathbf{A}}_f$ 是增广矩阵。

$$\hat{\mathbf{y}}_f = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{y}} \\ \delta \mathbf{I}_{I \times J \times 1} \end{bmatrix}, \hat{\mathbf{A}}_f = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{A}} \\ \delta \mathbf{I}_{1 \times K} \end{bmatrix} \quad (28)$$

其中, δ 是 ASC 约束的参数,该文取 $\delta = 15$ 。子问题(27)可以通过 KKT 条件解出:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(k+1)} = & \mathbf{x}^{(k)} \bullet (\hat{\mathbf{y}}_f \times_3 \hat{\mathbf{A}}_f^{(k+1)T} + \mu \mathbf{L}^{(k)}) / \\ & (\mathbf{x}^{(k)} \times_3 (\hat{\mathbf{A}}_f^{(k+1)T} \hat{\mathbf{A}}_f^{(k+1)}) + \lambda \mathbf{M} + \mu \mathbf{x}^{(k)}) \end{aligned} \quad (29)$$

(3)对变量 \mathbf{L} ,固定 $\hat{\mathbf{A}}$ 和 \mathbf{x} ,最小化(23)得:

$$\min_{\mathbf{L}} \frac{\mu}{2} \|\mathbf{L} - \mathbf{x}\|_F^2 + \tau \|\mathbf{L}\|_{\text{TV}} \quad (30)$$

问题(30)求解等价于问题(31)求解:

$$\min_{\mathbf{L}_{(1)}} \sum_{k=1}^K (\frac{\mu}{2} \|\mathbf{L}_{(1)}^k - \mathbf{X}_{(1)}^k\|_F^2 + \tau \|\mathbf{L}_{(1)}^k\|_{\text{TV}}) \quad (31)$$

其中, $\mathbf{L}_{(1)}^k$ 、 $\mathbf{X}_{(1)}^k$ 分别表示张量 \mathbf{L} 、 \mathbf{X} 沿模 1 展开所得矩阵的第 k 列。问题(31)的求解可以拆分成 K 个标准的最优化问题:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{L}_{(1)}^k} \quad & \frac{\mu}{2} \|\mathbf{L}_{(1)}^k - \mathbf{x}_{(1)}^k\|_F^2 + \tau \|\mathbf{L}_{(1)}^k\|_{\text{TV}} \\ & k = 1, 2, \dots, K \end{aligned} \quad (32)$$

问题(32)可以通过 FGP 算法^[21]解出:

$$\mathbf{L}_{(1)}^{k(k+1)} = \text{soft}(\mathbf{X}_{(1)}^{k(k+1)}, 2\tau/\mu) \quad (33)$$

综合以上推导,得到全变差 Cauchy 非负张量分解算法(TV-CNTF)如下:

算法 1:TV-CNTF 算法。

输入:HSI \mathbf{y} , 初始端元矩阵 \mathbf{A}_0 和丰度张量 \mathbf{x}_0 , 端元数 K , 参数 λ 、 μ 、 τ ;

输出:端元矩阵 \mathbf{A} 和丰度张量 \mathbf{x} 。

Step1 初始化 $\mathbf{A}, \mathbf{x}, \mathbf{L}$;

Step2 通过(18)计算 \mathbf{W} ;

Step3 通过(19)计算 $\hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{A}}$;

Step4 通过(25)更新 $\hat{\mathbf{A}}$;

Step5 通过(29)更新 \mathbf{x} ;

Step6 通过(33)更新 \mathbf{L} ;

Step7 重复 Step4–Step6,直到满足终止条件;

Step8 通过 $\mathbf{A} = \hat{\mathbf{A}} \times \mathbf{W}^{-1/2}$ 计算 \mathbf{A} 。

4 数值实验和结果分析

为了验证所提 TV-CNTF 方法的有效性,在模拟 HSI 数据集和真实数据集进行了实验。选取没有添加

TV 项的 Cauchy 非负张量分解算法 (CNTF) (只在模拟数据实验下对比) 和解混方法 GLNMF^[8]、MV-NTF^[19]、TV-RSNMF^[12] 进行对比实验, 并对实验结果进行分析。选取光谱角距离 (SAD) 和均方根误差 (RMSE) 对实验结果进行评价分析, 定义如下:

$$SAD_k = \arccos\left(\frac{\mathbf{A}_k^T \hat{\mathbf{A}}_k}{\|\mathbf{A}_k\| \|\hat{\mathbf{A}}_k\|}\right) \quad (34)$$

$$RMSE_k = \left(\frac{1}{M} \|\mathbf{S}_k - \hat{\mathbf{S}}_k\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad (35)$$

其中, \mathbf{A}_k 和 $\hat{\mathbf{A}}_k$ 分别表示第 k 个端元的真实光谱特征和估计的光谱特征, \mathbf{S}_k 和 $\hat{\mathbf{S}}_k$ 分别表示第 k 个端元的真实丰度和估计的丰度, SAD 和 RMSE 分别为 SAD_k 和 $RMSE_k$ 的平均值。由于真实数据无法获取 HSI 的真实丰度, 因此真实数据实验只用 SAD 评价解混效果。

4.1 模拟数据实验

从美国地质调查局 (USGS) 数字光谱库中选取 4 个光谱特征, 包含 224 个光谱波段, 取其中的 187 个低噪波段使用 LMM 来生成模拟数据^[12]。生成后的数

表 1 不同方法进行模拟数据实验得到的 SAD 值

SNR	TV-CNTF	CNTF	GLNMF	MV-NTF	TV-RSNMF
10	0.060 1	0.057 7	0.065 7	0.095 2	0.070 7
20	0.022 2	0.022 6	0.024 6	0.038 3	0.023 3
30	0.009 2	0.009 1	0.015 8	0.017 5	0.008 9
40	0.005 6	0.005 7	0.014 4	0.012 5	0.006 0

表 2 不同方法进行模拟数据实验得到的 RMSE 值

SNR	TV-CNTF	CNTF	GLNMF	MV-NTF	TV-RSNMF
10	0.069 4	0.090 3	0.090 8	0.081 9	0.077 8
20	0.021 1	0.034 4	0.042 3	0.043 2	0.027 0
30	0.016 9	0.019 0	0.023 0	0.033 1	0.018 8
40	0.016 3	0.016 5	0.021 0	0.019 6	0.018 7

4.2 真实数据实验

选取的真实数据是 AVIRIS Cuprite 数据集。该数据集由 224 个波段组成, 波长范围覆盖了 $0.4 \mu\text{m} \sim 2.5 \mu\text{m}$, 像元数为 250×191 。本次实验中, 去除了 Cuprite 数据集中的高噪声波段和水吸波段 (第 1-3, 104-113, 148-167, 221-224 波段), 保留了剩下的 187 个波段进行真实数据实验。同时, 从 USGS 数字光谱库中选取参考端元光谱特征。对真实数据实验的所有方法, 都使用顶点成分分析法 (VCA) 来初始化端元矩阵, 然后使用最小二乘法 (FCLS) 来初始化丰度矩阵。为了保证实验结果的可靠性, 所有实验都将重复 10 次。

表 3 中展示了各种常见解混方法的 SAD 值。从表中可以看出, 提出的 TV-CNTF 方法的 SAD 值更

据包含 187 个波段, 像元数为 48×48 。模拟实验中, 对生成的 HSI 添加信噪比 (Signal Noise Ratio, SNR) 为 $[10, 20, 30, 40]$ (dB) 的高斯噪声, 用这个数据来完成对比实验。

表 1 和表 2 分别展示了不同噪声水平下不同解混方法的 SAD 值和 RMSE 值。从表 1 和表 2 中可以看出, 所提方法对不同 SNR 下的模拟数据均有很好的解混效果。综合考虑 RMSE 值和 SAD 值, 在 SNR 较低即 SNR = 10 dB 时, TV-CNTF 的解混效果明显高于其他对比方法, 解混效果依次比方法 GLNMF、MV-NTF、TV-RSNMF 和 CNTF 提升了约 17.3%、26.9%、12.8% 和 12.5%, 这说明引入的 Cauchy 损失函数在噪声更大时解混性能更突出。与 CNTF 对比可以看出, TV 项的引入可以提高 TV-CNTF 方法的解混性能, 但在表 1 中 SNR = 10 dB 时, CNTF 的 SAD 值比 TV-CNTF 要小, 这说明 TV 项的引入并不能很好地降低噪声对解混的影响。在其他信噪比下, TV-CNTF 方法的解混效果与其他方法相比也有一定的优势。

小, 与其他方法相比, 解混效果提升了 10% ~ 30%, 因此证明了该方法对真实数据实验解混的有效性。图 1 是真实数据实验解混得到的端元光谱与 USGS 光谱库中真实端元的对比图。图 2 ~ 图 5 展示了真实数据实验下各方法解混得到的端元光谱与 USGS 光谱库中真实端元光谱的对比图和丰度图, 实验中选择了三种典型端元进行展示, 分别是: Alunite、Buddingtonite 和 Chalcedony。

从图 2 ~ 图 5 可以看出, TV-CNTF 和 GLNMF 得到的端元光谱图与 USGS 光谱库中的真实端元光谱拟合程度更好, 从丰度图上看, TV-CNTF 方法比其他方法保留了更多的细节, 图像表现更加丰富。因此, 可以得出结论: 提出的 TV-CNTF 的解混效果更好。

表 3 不同方法在 AVIRIS Cuprite 数据集中提取不同物质的 SAD 值

方法	TV-CNTF	GLNMF ^[8]	MV-NTF ^[19]	TV-RSNMF ^[12]
Alunite	0.119 0	0.203 0	0.074 8	0.140 8
Andradite	0.148 8	0.082 1	0.066 1	0.086 3
Buddingtonite	0.073 0	0.118 9	0.071 8	0.105 1
Dumortierite	0.129 4	0.108 1	0.165 2	0.072 9
Kaolinite_1	0.085 8	0.148 0	0.098 4	0.157 8
Kaolinite_2	0.118 2	0.092 2	0.084 1	0.071 1
Muscovite	0.092 1	0.147 9	0.078 6	0.200 6
Montmorillonite	0.067 7	0.069 7	0.053 5	0.060 3
Nontronite	0.099 4	0.078 1	0.251 8	0.097 0
Pyrope	0.082 7	0.054 1	0.108 6	0.082 1
Sphene	0.063 0	0.100 5	0.143 1	0.225 8
Chalcedony	0.124 6	0.121 8	0.070 0	0.113 2
平均值	0.100 3	0.110 4	0.117 6	0.117 7

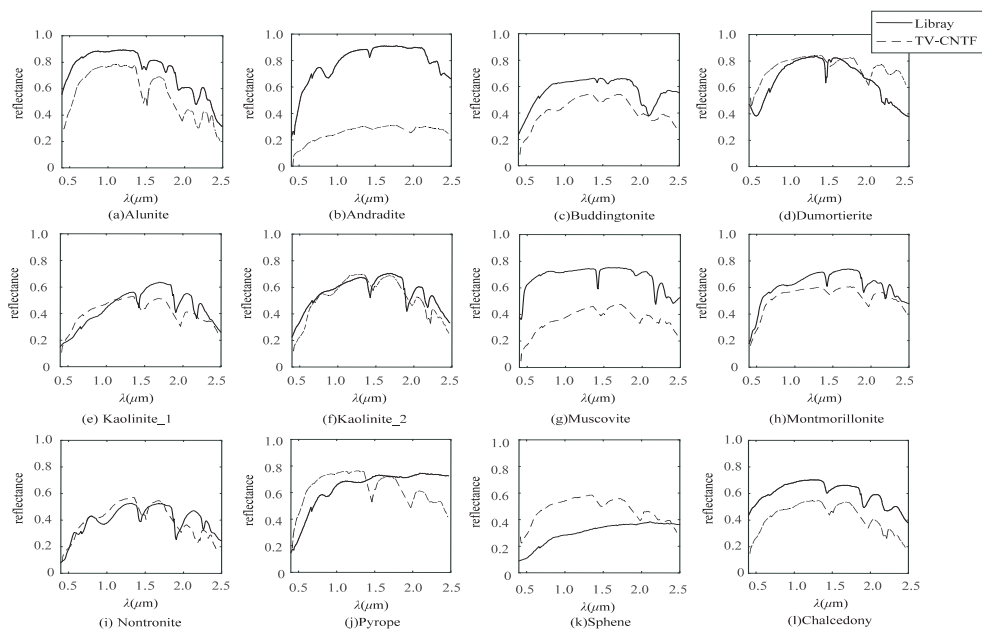


图 1 真实数据实验解混得到的端元光谱与 USGS 光谱库中真实端元的对比图

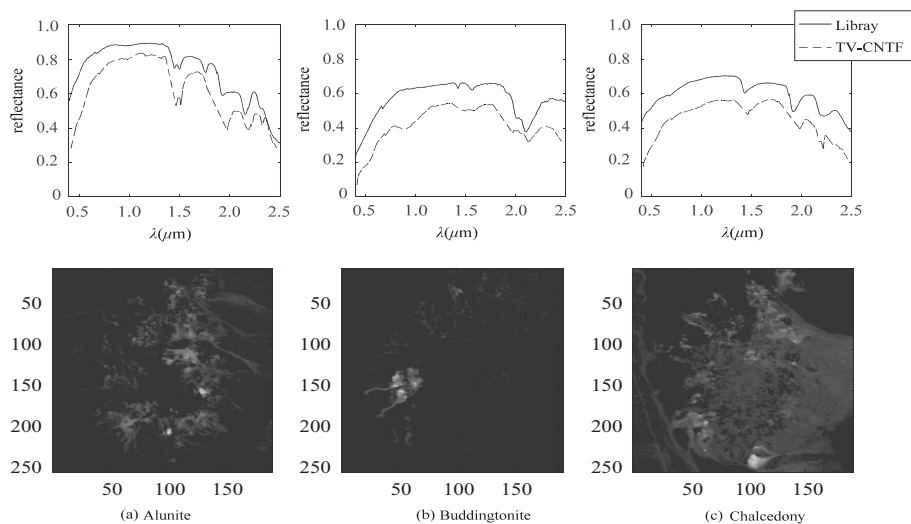


图 2 真实数据实验下 TV-CNTF 得到的端元光谱图和丰度图

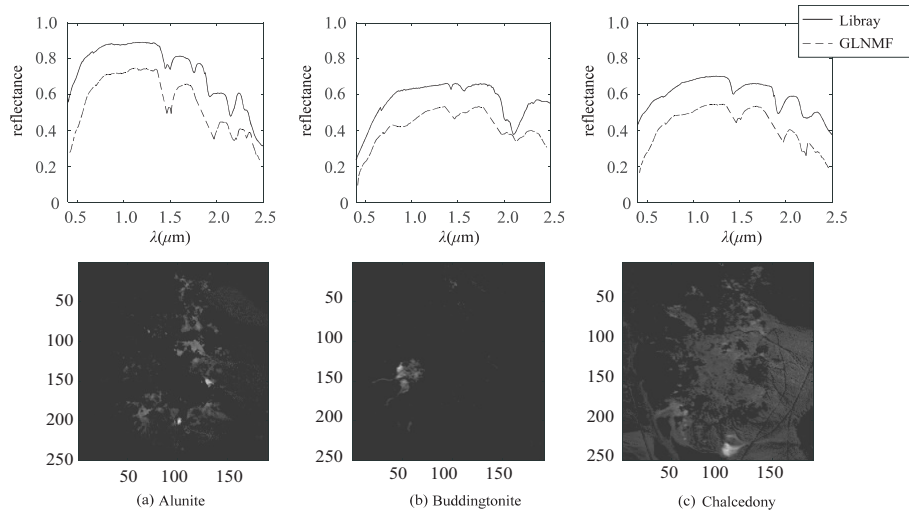


图 3 真实数据实验下 GLNMF 得到的端元光谱图和丰度图

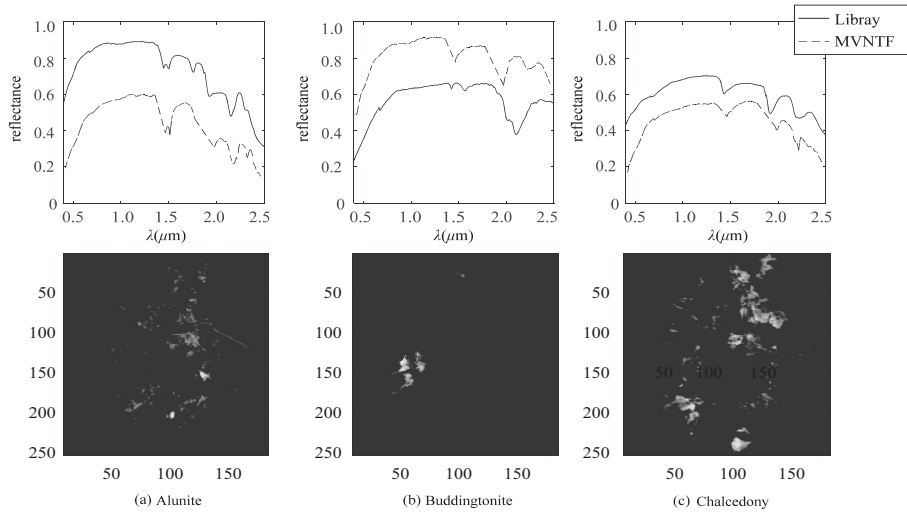


图 4 真实数据实验下 MV-NTF 得到的端元光谱图和丰度图

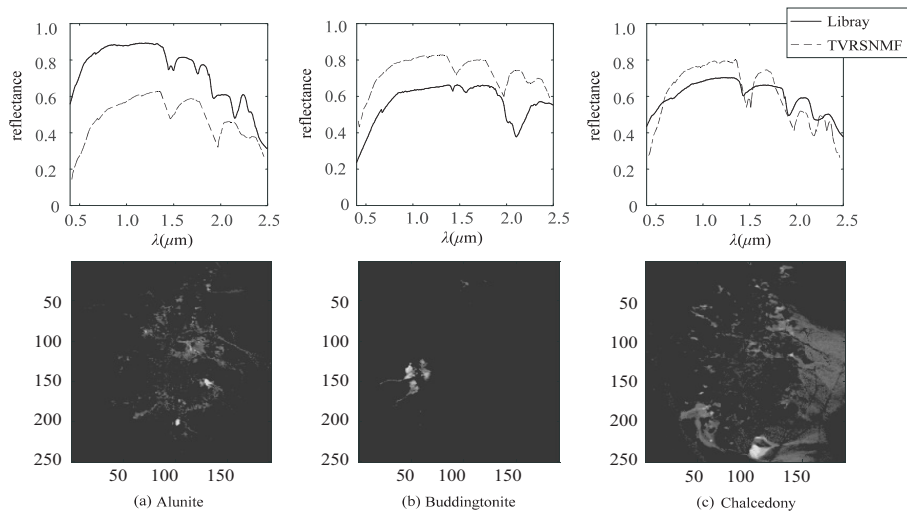


图 5 真实数据实验下 TV-RSNMF 得到的端元光谱图和丰度图

4.3 参数分析

首先对模拟数据实验 $\text{SNR}=20\text{ dB}$ 时的参数 λ 、 μ 和 τ 进行分析。给定 λ 的取值范围为 $[5\text{e-}4, 1\text{e-}3, 5\text{e-}3, 0.01, 0.05, 0.1]$, μ 的取值范围为 $[1, 10, 1\text{e}2, 1\text{e}3, 1\text{e}4, 1\text{e}5]$, τ 的取值范围为 $[1\text{e-}4, 1\text{e-}3, 1\text{e-}2, 1\text{e-}$

$1]$ 。固定 $\mu = 1\text{e}2$, 对参数 λ 和 τ 的不同取值进行解混实验, 结果如图 6 所示。从图 6 中可以看出, 当两个参数的值接近于 0 时, SAD 和 RMSE 值显著增加, 这表明稀疏正则项和 TV 正则项的加入对实验结果有着积极的影响。当 $\lambda = 0.01$, $\tau = 0.01$ 时, SAD 和 RMSE 值

同时达到一个很小的值,综合考虑取 $\lambda = 0.01$, $\tau = 0.01$ 。再固定 $\lambda = 0.01$, 对参数 μ 和 τ 的不同取值组合进行解混实验,结果如图 7 所示。从图 7 中可以看出,当 $\mu = 1e2$, $\tau = 0.01$ 时, SAD 和 RMSE 值同时达到一个很小的值,综合考虑取 $\mu = 1e2$ 。因此,不同 SNR 下

的模拟数据实验的参数确定为 $\lambda = 0.01$, $\mu = 1e2$, $\tau = 0.01$ 。

通过多次真实数据实验的结果,取 $\mu = 500$, $\tau = 0.01$, $\lambda = 0.1$, 其他参数设置与模拟实验相同。

Performance of TV-CNTF with respect to parameters λ and τ in terms of SAD and RMSE

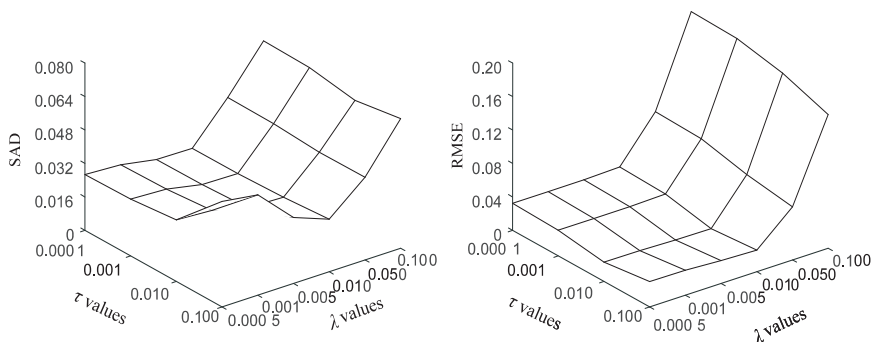


图 6 模拟数据实验在参数 λ 和 τ 的不同组合下的解混结果 SAD 和 RMSE

Performance of TV-CNTF with respect to parameters μ and τ in terms of SAD and RMSE

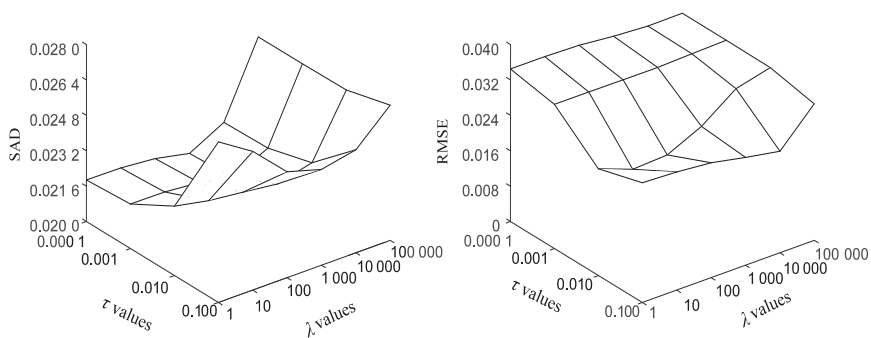


图 7 模拟数据实验在参数 μ 和 τ 的不同组合下的解混结果 SAD 和 RMSE

5 结束语

该文提出了 TV-CNTF 算法用于 HSI 解混,充分保留了 HSI 的空间结构信息,TV 项的引入保证了丰度张量的分段光滑性,同时使用 Cauchy 损失函数来代替最小二乘损失函数,通过减小噪声点在解混模型中的权重,来降低噪声对解混结果的影响。最后的模拟数据和真实数据实验结果表明,无论是在目视效果还是定量评价指标上,该方法对图像解混效果的提升都很显著。然而,在 HSI 解混过程中,张量分解的方法远不如非负矩阵分解的方法成熟,如何改进张量分解的方法使其更适合 HSI 图像解混将会是未来重点研究方向。

参考文献:

- [1] 童庆禧,张兵,张立福. 中国高光谱遥感的前沿进展[J]. 遥感学报,2016,20(5):689-707.
- [2] 李伟,吕蒙,陈天虹,等. 高光谱图像在生物医学中的应用[J]. 中国图象图形学报,2021,26(8):1764-1785.
- [3] 叶成名,李尧,崔鹏,等. 高光谱遥感地质灾害信息提

取系统设计与实现[J]. 中国地质灾害与防治学报,2018,29(5):89-94.

- [4] MA W, BIOUCAS-DIAS J, CHAN T, et al. A signal processing perspective on hyperspectral unmixing: insights from remote sensing[J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2014, 31(1):67-81.
- [5] HEINZ D C, CHANG C I. Fully constrained least squares linear spectral mixture analysis method for material quantification in hyperspectral imagery[J]. IEEE Transactions on Geoscience & Remote Sensing, 2002, 39(3):529-545.
- [6] LEE D D, SEUNG H S. Learning the parts of objects by non-negative matrix factorization[J]. Nature, 1999, 401(6755):788-791.
- [7] MIAO L, QI H. Endmember extraction from highly mixed data using minimum volume constrained nonnegative matrix factorization[J]. IEEE Transactions on Geoscience & Remote Sensing, 2007, 45(3):765-777.
- [8] LU X, WU H, YUAN Y, et al. Manifold regularized sparse NMF for hyperspectral unmixing[J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2013, 51(5):2815-2826.
- [9] 孔繁铨,朱成,徐诚,等. 空间相关性约束联合子空间

(下转第 36 页)