迭代收缩非线性状态约束滤波算法

贺 姗[1],刘沫萌[1,2,3],李 迎[1]

(1. 西安工程大学 计算机科学学院,陕西 西安 710048;
2. 陕西省服装设计智能化重点实验室,陕西 西安 710048;
3. 新型网络智能信息服务国家地方联合工程研究中心,陕西 西安 710048)

摘 要:在状态估计理论的实际应用中,系统的状态向量可能受到线性或者非线性约束条件的限制,如果可以将这些约束条件有效地施加到滤波过程中,则从理论上可以获得更高的滤波精度。针对非线性状态约束滤波,可以通过泰勒级数展开将非线性约束函数线性化,该方法需求解非线性约束函数的雅可比矩阵,然而实际问题中总有雅克比矩阵不存在的情况。采用水平滑动估计算法,该算法无需求解雅可比矩阵,然而该方法需要计算非线性约束最优化问题,算法时间复杂度较高。为此,在状态向量的高斯假定下,提出了一类迭代收缩非线性状态约束滤波方法。该方法结合容积卡尔曼滤波、求积分卡尔曼滤波、中心差分卡尔曼滤波和不敏卡尔曼滤波思想,分别采用几种不同的数值方法对积分进行近似,获得了几种解决非线性状态约束的实现算法。在实现过程中,为了减小基点误差对于滤波结果的影响,采用迭代的方法,给非线性状态约束函数施加一系列噪声,使得在量测更新步骤中方差逐步收敛,使约束逐渐增强,提高了状态估计的精度。实验结果表明,该类方法的几种实现算法滤波精度较高,时间复杂度较为适中,无需求解雅可比矩阵或黑森矩阵。

关键词:非线性状态约束;状态估计;不敏卡尔曼滤波;容积卡尔曼滤波;求积分卡尔曼滤波;中心差分卡尔曼滤波

中图分类号:TP39;TN911.23 **文献标识码**:A **文章编号**:1673-629X(2022)11-0095-05

doi:10.3969/j.issn.1673-629X.2022.11.014

Iterative Shrinkage Nonlinear State Constraints Filter

HE Shan[1],LIU Mo-meng[1,2,3],LI Ying[1]

(1. School of Computer Science,Xi'an Polytechnic University,Xi'an 710048,China;
2. Shaanxi Key Laboratory of Clothing Intelligence,Xi'an 710048,China;
3. State and Local Joint Engineering Research Center for Advanced Networking & Intelligent Information Services,
Xi'an 710048,China)

Abstract:In the practical application of state estimation theory,the state vector of the system may be restricted by linear or nonlinear constraints. If these constraints can be effectively applied to the filtering process,higher filtering accuracy can be obtained theoretically. For nonlinear state constrained filtering,the nonlinear constraint function can be linearized by Taylor series expansion. This method needs to solve the Jacobian matrix of the nonlinear constraint function,but there will always be situations where the Jacobian matrix does not exist in practical problems. The horizontal sliding estimation algorithm is adopted. The algorithm does not need to solve the Jacobian matrix,but the method needs to calculate nonlinear constrained optimization problems,and the time complexity of algorithm is high. Therefore,under the assumption that the state vector is subject to the Gaussian distribution,we present a class of iterative shrinkage nonlinear state constraints filter. The method combines with the cubature Kalman filter (CKF),quadrature Kalman filter (QKF),central divided differences Kalman filter (CDKF),unscented Kalman filter (UKF),respectively,and uses several different numerical methods to approximate the integrals appeared in the process. Consequently,some implemental algorithms are obtained and can be used to solve the problem of nonlinear state constraints. In the process of implementation,in order to diminish the influence of base point error in the filtering results,we apply a series of noises to the nonlinear state constraints function by using the iterative style,as a result,the variance gradually converge in the measurement update step,and the constraints are gently tighten step by step,which improves the precision of the state estimation. The experimental results show the proposed algorithms have higher precision and lower time complexity compared with the other available algorithms. Besides,they can work well without solving the Jacobian matrix or the Hessian matrix.

Key words:nonlinear state constraints;state estimation;unscented Kalman filter;cubature Kalman filter;quadrature Kalman filter;central

收稿日期:2021-10-27 **修回日期**:2022-02-27

基金项目:国家自然科学基金项目(61902303);陕西省自然科学基础研究计划资助项目(2020JQ-832)

作者简介:贺 姗(1989-),女,硕士研究生,工程师,通讯作者,研究方向为信息融合与目标跟踪。

divided differences Kalman filter

0 引 言

在状态估计问题中,系统的状态向量可能会受到许多约束条件的限制,如果可以用这些约束条件对状态向量进行修正,便可以更加逼近系统真实值,从而使得滤波估计结果更加精确。因此,研究约束条件下滤波算法是非常有意义的[1-3]。

约束条件分为线性以及非线性。解决线性约束问题的相关方法可以参见 Simon 的综述文章[1]。针对非线性约束下的状态估计问题,人们也进行了很多研究并提出了很多算法。1995 年,Michalska 等人提出了水平滑动估计算法(Moving Horizon Estimation, MHE)[4],该算法在非线性约束条件的限制下,采用最优化方法对一个区间内的估计误差和观测误差进行最小化,能够获得很高的滤波精度,但其算法时间复杂度较大,即使实现过程中使用了较小的滑动窗口,仍然需要花费很多的时间。1997 年,De Geeter 等人给出了平滑约束卡尔曼滤波(Smoothly Constrained Kalman Filter,SCKF)[5],该算法滤波精度较高,时间复杂度较低。2002 年,Simon 等人提出的一阶泰勒级数展开非线性约束算法(Linearized Constrained,LC)[6],该算法采用一阶泰勒级数展开方法对非线性状态约束函数进行线性化,再通过线性化约束算法中的投影方法进行滤波。为了提高滤波精度,2009 年,Yang 等人提出了一种新的滤波算法—二阶泰勒级数展开非线性约束方法(2ord Nonlinear Constrained,2ord NC)[7],其滤波精确度高于 LC 算法,但其耗费时间较大。除了 MHE 算法之外,其余几种算法也都只能在弱非线性约束中适用,且都需要计算非线性状态约束函数的雅克比矩阵。

针对以上问题,文献[8]中提出了一种基于 UT 变换的迭代收缩非线性状态约束滤波算法(为了与下文保持一致,此处简称为 ISNC-UKF),该算法可以处理强非线性约束下的状态估计问题,能够获得较好的滤波精度,时间复杂较小,且实现过程中无需计算非线性状态约束函数的雅克比矩阵。在该算法的启发下,将文献[8]中的算法进行一般化,该文提出了一种解决非线性状态约束的算法框架。该方法可以采用多种基于确定点采样滤波算法。包括:不敏卡尔曼滤波算法(Unscented Kalman Filter,UKF)[9]、求积分卡尔曼滤波算法(Quadrature Kalman Filter,QKF)[10]、中心差分卡尔曼滤波算法(Central Divided Differences Kalman Filter,CDKF)[11]、容积卡尔曼滤波算法(Cubature Kalman Filter,CKF)[12]。结合上述四种非线性滤波算法,提出了高斯分布下的一般性非线性状态约束方法的框架。为了减小基点误差[7]对于滤波结果的影响,采用迭代的方法,使得约束逐渐变强,最终获得更好的滤波精度。从而得到了几种相应的解决非线性状态约束的滤波算法,即:迭代收缩非线性状态约束求积分卡尔曼滤波算法(Iterative Shrinking Nonlinear State Constraints Based on Quadrature Kalman Filter,ISNC-QKF)、迭代收缩非线性状态约束中心差分卡尔曼滤波算法(Iterative Shrinking Nonlinear State Constraints Based on Central Divided Differences Kalman Filter, ISNC-CDKF)、迭代收缩非线性状态约束容积卡尔曼滤波算法(Iterative Shrinking Nonlinear State Constraints Based on Cubature Kalman Filter, ISNC-CKF)。这些算法在保证较高滤波精度和较低时间复杂度的前提下,能够解决非线性约束函数雅克比矩阵不存在或者雅克比矩阵难以求解的问题。

1 问题描述

假定高斯条件下系统的状态方程和量测方程分别为:

$$\boldsymbol{x}_k = f(\boldsymbol{x}_{k-1}) + \boldsymbol{v}_k \tag{1}$$

$$y_k = h(\boldsymbol{x}_k) + \boldsymbol{n}_k \tag{2}$$

其中,$\boldsymbol{x}_k$ 和 $\boldsymbol{y}_k$ 分别是 k 时刻的状态值和量测值,f 和 h 分别为状态转移函数和量测函数,$\boldsymbol{v}_k \sim N(0,\boldsymbol{Q}_k)$ 和 $\boldsymbol{n}_k \sim N(0,\boldsymbol{R}_k)$ 分别为过程噪声和量测噪声,且它们互不相关。现假设状态值 $\boldsymbol{x}_k$ 受到的非线性约束函数如下:

$$g(\boldsymbol{x}_k) = \boldsymbol{d}_k \tag{3}$$

式中,g 与 $\boldsymbol{d}_k$ 分别为已知的非线性状态约束函数和向量。此约束问题即为通过式(3)对状态向量进行修正从而得到更加精确的状态估计值。

2 高斯非线性约束滤波的贝叶斯形式

在式(3)中,x 为服从高斯分布的随机向量,因此函数 $g(x)$ 的值也可以写成一个积分形式:

$$I(g) = \int_D g(\boldsymbol{x}) w(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x} \tag{4}$$

其中,D 为积分区域,$g(.)$ 为任意非线性函数,$w(.)$ 为一个加权函数。式的积分为"非线性函数 × 高斯密度"形式,因此可以采用数值解法进行近似[13-14],即:

$$I(g) \approx \sum_{i=1}^{m} w_i g(\chi_i) \tag{5}$$

上述数值积分问题的关键点在于:确定西格玛点以及相应权值。假设对于 n 维的状态向量,可以分别借助 UKF、QKF、CDKF、CKF 算法中的思路进行求取。其中借助 UKF 算法的实现思路已经在文献[8]中予以介绍,因此该文予以省略。

QKF 滤波是在高斯厄米特滤波基础上提出的,下面给出高斯厄米特求积分规则[10]。假定一个随机变量 $\boldsymbol{x}$,其高斯密度为 $N(\boldsymbol{x};0,1)$,则可得函数 $g(\boldsymbol{x})$ 的期望值为:

$$E[g(\boldsymbol{x})] = \int_{\mathbb{R}^n} g(\boldsymbol{x}) N(\boldsymbol{x};0,1)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{i=1}^{m} w_i g(\xi_i) \tag{6}$$

其中, $\mathbb{R}^n$ 表示 n 维实数空间。可通过正交多项式及对称三对角矩阵的相关关系求解积分点 ξ_i 及其相应的权值 w_i ,通常积分点的个数取 3,此时有:

$$\xi_i = \sqrt{2}\,\varepsilon_i,\quad 1 \leqslant i \leqslant 3 \tag{7}$$

其中, ε_i 是 $\boldsymbol{J}$ 的第 i 个特征值,假设 $\boldsymbol{J}_{i,i+1} = \sqrt{i/2}\,(1 \leqslant i \leqslant 2)$ 为一个对称三对角矩阵,对角元素为0。其相应权值为:

$$w_i = (v_i)_1^2,\quad 1 \leqslant i \leqslant 3 \tag{8}$$

其中, $(v_i)_1$ 表示 $\boldsymbol{J}$ 的第 i 个特征向量的第一个元素。因为随机变量 $\boldsymbol{x}$ 中各个元素互不相关,可将式扩展至多维形式:

$$E[g(\boldsymbol{x})] \approx \sum_{l_1=1}^{m} w_l g(\xi_{l_1} \cdots \xi_{l_{n_x}}) = \sum_{l=1}^{n_x} w_l g(\xi_l) \tag{9}$$

CDKF 是借助 Stirling 插值多项式近似非线性函数,采用中心差分代替泰勒级数展开中的一阶和二阶导数,实现非线性函数向线性函数的转换[11]。即有:

$$\nabla f = \frac{f(\boldsymbol{x} + h\delta\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x} - h\delta\boldsymbol{x})}{2h} \tag{10}$$

$$\nabla^2 f = \frac{f(\boldsymbol{x} + h\delta\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{x} - h\delta\boldsymbol{x}) - 2f(x)}{h^2} \tag{11}$$

其中, h 表示中心差分区间长度,对于高斯假设下的系统, h 取值为3, $\delta\boldsymbol{x}$ 表示一个具有零均值且与随机变量 $\boldsymbol{x}$ 有着相同协方差的随机变量。

CDKF 的具体实现方法和 UKF 的类似,都是采用了对称策略求取 Sigma 点 χ_i ,对于 n 维的随机变量 $\boldsymbol{x}$ 需计算 $2n+1$ 个 Sigma 点 χ_i 。

$$\chi_{0,k} = \hat{\boldsymbol{x}}_k \tag{12}$$

$$\chi_{i,k} = \hat{\boldsymbol{x}}_k + (h\sqrt{\boldsymbol{P}_k})_i,\quad i = 1,2,\cdots,n \tag{13}$$

$$\chi_{i+n,k} = \hat{\boldsymbol{x}}_k - (h\sqrt{\boldsymbol{P}_k})_i,\quad i = 1,2,\cdots,n \tag{14}$$

其中, $(h\sqrt{\boldsymbol{P}_k})_i$ 表示取矩阵 $h\sqrt{\boldsymbol{P}_k}$ 第 i 行或者列的元素。

其相应权值为:

$$w_0 = (h^2 - n)/h^2 \tag{15}$$

$$w_i = 1/2h^2,\quad i = 1,2,\cdots,2n \tag{16}$$

CKF 确定点以及相应权值的计算根据容积规则[12]。考虑下面一个求积分问题:

$$I(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\exp(-\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \tag{17}$$

为了数值化计算上式积分问题,首先将其转换为一个更常用的球面径向形式,需将 $\boldsymbol{x}$ 转换成球面半径 r 和方向向量 $\boldsymbol{y}$ 的乘积,即: $\boldsymbol{x} = r\boldsymbol{y}$,其中, $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}y = 1$,那么上式可写为:

$$I(f) = \int_0^{\infty}\int_{U_n} f(r\boldsymbol{y})\, r^{n-1}\exp(-r^2)\,\mathrm{d}\delta(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}r \tag{18}$$

其中, U_n 表示半径为 1 的球表面, $\delta(\cdot)$ 为积分域 U_n 内的元素。令:

$$S(r) = \int_{U_n} f(r\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\delta(\boldsymbol{y}) \tag{19}$$

则式(18)可写为:

$$I = \int_0^{\infty} S(r)\, r^{n-1}\exp(-r^2)\,\mathrm{d}r \tag{20}$$

针对式(19)和式(20),分别采用 m_r 点高斯厄米特求积分规则和 m_s 点球面规则,可得到 $m_r \times m_s$ 点的球面径向求容积规则为:

$$\int_0^{\infty} S(r)\, r^{n-1}\exp(-r^2)\,\mathrm{d}r = \sum_{i=1}^{m_r} a_i S(r_i) \tag{21}$$

$$\int_{U_n} f(ry)\,\mathrm{d}\delta(\boldsymbol{y}) = \sum_{j=1}^{m_s} b_j f(r\,\boldsymbol{y}_j) \tag{22}$$

$$I(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x})\exp(-\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \approx \sum_{i=1}^{m_s}\sum_{j=1}^{m_r} a_i b_j (r_i\, y_j) \tag{23}$$

那么,对于式(17)、式(4)中的积分问题就可以通过上述方法解决。

$$I(g) = \int_D f(x) w(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{i=1}^{m} w_i f(\varepsilon_i) \tag{24}$$

当 $m_r = 1$, $m_s = 2n$ 时,对于一个三阶球面径向规则,需计算出 $m = 2n$ 个容积点 ε_i ,计算公式为:

$$\varepsilon_i = \sqrt{m/2}\,[1]_i,\quad i = 1,2,\cdots,m \tag{25}$$

其相应权值为:

$$w_i = 1/m,\quad i = 1,2,\cdots,m \tag{26}$$

3　迭代收缩非线性状态约束滤波

为了解决非线性状态约束问题,在状态向量符合高斯分布的假设下,采用上述方法对积分进行数值近似。为了进一步提高状态估计的精度,给非线性约束施加一系列由强到弱的噪声,通过最佳量测[15-16]的方法迭代求取状态估计值。下面分别对这四种方法具体实现过程进行阐述。

首先介绍采用 CKF 方法来解决非线性约束问题,该方法简称 ISNC-CKF。假设对于 n 维的状态向量其 k 时刻的状态估计值为 $\hat{\boldsymbol{x}}_k$,及其方差为 P_k ,首先根据式(25)计算当前时刻状态向量 $\hat{\boldsymbol{x}}_k$ 的容积点 $\varepsilon_{i,k}$,然后根据式(26)计算其相应的权值 w_i 。将得到的容积点经过非线性状态约束函数变换:

$$\zeta_{i,k} = g(\varepsilon_{i,k}),\ i = 0,1,\cdots,2n \tag{27}$$

计算非线性变换后的均值和协方差:

$$\hat{\zeta}_k = \sum_{i=0}^{2n} w_i \zeta_{i,k} \tag{28}$$

$$P_{\zeta\zeta,k} = \sum_{i=0}^{2n} w_i (\zeta_{i,k} - \hat{\zeta}_k)(\zeta_{i,k} - \hat{\zeta}_k)^{\mathrm{T}} \tag{29}$$

$$P_{x\zeta,k} = \sum_{i=0}^{2n} w_i (\varepsilon_{i,k} - \hat{\boldsymbol{x}}_k)(\zeta_{i,k} - \hat{\zeta}_k)^{\mathrm{T}} \tag{30}$$

为了减小基点误差对于状态向量估计的影响，给非线性状态约束函数施加一系列噪声 $\boldsymbol{R}_{d,k}$。首先用 $a \times \boldsymbol{P}_{\zeta\zeta,k}$ 将其乘积值作为第一次迭代时 $\boldsymbol{R}_{d,k}$ 的值，其中 $a \in [0.01, 0.1]$ 为一个常数，在实现过程中通常取经验值，文中的取值为 0.01。在之后的迭代中，$\boldsymbol{R}_{d,k} = \boldsymbol{R}_{d,k}\exp(-i)$，$i$ 为迭代的次数，使得方差逐渐递减，由最小方差估计准则得到具有非线性状态约束条件下的均值和协方差，即：

$$\boldsymbol{P}_{\zeta\zeta,k} = \boldsymbol{P}_{\zeta\zeta,k} + \boldsymbol{R}_{d,k} \tag{31}$$

$$\tilde{\boldsymbol{x}}_k = \hat{\boldsymbol{x}}_k \boldsymbol{P}_{x\zeta,k} \boldsymbol{P}_{\zeta\zeta,k}^{-1} (d - \hat{\zeta}_k) \tag{32}$$

$$\tilde{\boldsymbol{P}}_k = \boldsymbol{P}_k - \boldsymbol{P}_{x\zeta,k} (\boldsymbol{P}_{x\zeta,k} \boldsymbol{P}_{\zeta\zeta,k}^{-1})^{\mathrm{T}} \tag{33}$$

通过上述过程就可以得到非线性状态约束条件下的状态估计值 $\tilde{\boldsymbol{x}}_k$ 及其协方差 $\tilde{\boldsymbol{P}}_k$。

ISNC-UKF 方法的具体实现过程已经在文献[8]中详细介绍，不再赘述。其他几种方法的实现过程与 ISNC-CKF 类似，下面直接给出这些方法的实现步骤。

ISNC-QKF 方法的实现步骤如下：

Step1：根据式(7)计算当前时刻状态向量 $\hat{\boldsymbol{x}}_k$ 的积分点，然后根据式(8)计算其相应的权值；

Step2：用式(27)~式(30)计算非线性变换后的均值及其协方差；

Step3：第一次迭代时，令 $\boldsymbol{R}_{d,k} = a\boldsymbol{P}_{\zeta\zeta,k}$，在之后的迭代中 $\boldsymbol{R}_{d,k} = \boldsymbol{R}_{d,k}\exp(-i)$，$i$ 为迭代的次数；

Step4：采用式(31)获得当前的方差值 $\boldsymbol{P}_{\zeta\zeta,k}$；

Step5：采用式(32)和式(33)获得系统的状态估计值以及方差；

Step6：如果迭代次数超出预先设定值，则退出当前循环；否则可另 $\hat{\boldsymbol{x}}_k = \tilde{\boldsymbol{x}}_k, \boldsymbol{P}_k = \tilde{\boldsymbol{P}}_k$，再跳转至第一步。

ISNC-CDKF 方法的实现步骤如下：

Step1：根据式(12)~式(14)计算当前时刻状态向量 $\hat{\boldsymbol{x}}_k$ 的 Sigma 点，然后根据式(15)和式(16)计算其相应的权值；

Step2：用式(27)~式(30)计算非线性变换后的均值及其协方差；

Step3：第一次迭代时，令 $\boldsymbol{R}_{d,k} = a\boldsymbol{P}_{\zeta\zeta,k}$，在之后的迭代中 $\boldsymbol{R}_{d,k} = \boldsymbol{R}_{d,k}\exp(-i)$，$i$ 为迭代的次数；

Step4：采用式(31)获得当前的方差值 $\boldsymbol{P}_{\zeta\zeta,k}$；

Step5：采用式(32)和式(33)获得系统的状态估计值以及方差；

Step6：如果迭代次数超出预先设定值，则退出当前循环；否则可令 $\hat{\boldsymbol{x}}_k = \tilde{\boldsymbol{x}}_k, \boldsymbol{P}_k = \tilde{\boldsymbol{P}}_k$，再跳转至第一步。

在上述迭代收缩非线性状态约束滤波方法实现过程中，迭代次数为 3~5 次时就能够得到一个较小且较为稳定的估计均方根误差值，迭代更多次并不能对滤波结果有明显改善，这是因为经过多次迭代后 $\boldsymbol{R}_{d,k} = \boldsymbol{R}_{d,k}\exp(-i)$ 使得方差逐渐递减，对于方差 $P_{\zeta\zeta,k}$ 的影响就会很越来越小，从而也减弱了对于估计均方根误差收敛的影响。

4 仿真实验及结果分析

利用钟摆运动[1]仿真实例验证滤波算法。可设系统的动态方程及量测方程为：

$$\theta_{k+1} = \theta_k + T\omega_k + v_{\theta,k} \tag{34}$$

$$\omega_{k+1} = \omega_k - \frac{Tg}{L}\sin\theta_k + v_{\omega,k} \tag{35}$$

$$y_k = [\theta_k \ \omega_k]^{\mathrm{T}} + n_k \tag{36}$$

其中，已知 k 时刻的系统状态向量为 $\boldsymbol{x}_k = [\theta_k \quad \omega_k]^{\mathrm{T}}$，$\theta_k$ 则为 k 时刻钟摆所摆动的角度值，ω_k 为 k 时刻钟摆动的角速度值。$\boldsymbol{y}_k$ 为 k 时刻系统量测值，T 表示步长，g 表示重力加速度，L 表示钟摆长度，且 $[v_{\theta,k} \quad v_{\omega,k}]^{\mathrm{T}} \sim N(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{Q}_k)$ 和 $\boldsymbol{n}_k \sim N(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{R}_k)$ 分别为互不相关的过程噪声及量测噪声。

由机械能守恒定理可知，钟摆运动系统中的状态向量应符合如下的非线性状态约束条件：

$$-mgL\cos\theta_k + \frac{1}{2}m(L\omega_k)^2 = C \tag{37}$$

其中，m 表示钟摆的质量，C 为系统所具有的机械能能量常数。实验仿真参数设置：$\boldsymbol{x}_0 = [\frac{\pi}{4} \quad \frac{\pi}{50}]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{P}_0 = \mathrm{diag}([1 \quad 1])$，$m = 1$，$L = 1$，$T = 0.05$，$g = 9.81$，$\boldsymbol{Q} = \mathrm{diag}([0.007 \quad 0.007^2])$，$\boldsymbol{R} = \mathrm{diag}([0.1^2 \quad 0.1^2])$，迭代次数为 5 次，Monte Carlo 仿真 100 次。

状态估计过程采用扩展卡尔曼滤波算法(Extended Kalman Filter, EKF)[17]，再通过非线性约束函数即式(37)、式(3)对状态估计结果进一步进行修正，采用以下滤波算法：水平滑动估计滤波算法(MHE)、平滑约束卡尔曼滤波算法(SCKF)、一阶泰勒级数展开非线性约束算法(LC)、二阶泰勒级数展开非线性约束滤波算法(2ordNC)、最佳量测滤波算法(PM)、迭代收缩非线性状态约束不敏卡尔曼滤波算法(ISNC-UKF)以及文中给出的迭代收缩非线性状态约束求积分卡尔曼滤波算法(ISNC-QKF)、迭代收缩非线性状态约束中心差分卡尔曼滤波算法(ISNC-CDKF)及迭代收缩非线性状态约束容积卡尔曼滤波算法(ISNC-CKF)进行实验仿真。

表 1 为各种约束滤波算法的误差值,包括角度误差值以及角速度误差值,将算法误差性能由高到低排序为:MHE4、MHE2、SCKF、ISNC-CDKF、ISNC-QKF、ISNC-CKF、ISNC-UKF、2ordNC、LC、PM 及未施加非线性约束函数的 EKF。从表中可以看出,文中给出的滤波算法 ISNC-CDKF、ISNC-QKF、ISNC-CKF 的误差差别很小,和已有的滤波算法 ISNC-UKF 类似,且和滤波算法 SCKF 的误差基本相当。

表 1　各种算法误差性能对比

算法	角度/rad	角速度/(rad/s)	算法	角度/rad	角速度/(rad/s)
MHE4	0.007 705 1	0.010 763 8	ISNC-UKF	0.010 695 1	0.026 383 6
MHE2	0.007 975 7	0.012 300 1	2ordNc	0.011 017 9	0.027 659 5
SCKF	0.010 669 8	0.026 302 3	LC	0.011 040 5	0.027 688 1
ISNC-CDKF	0.010 694 1	0.026 396 2	PM	0.011 759 4	0.030 410 8
ISNC-QKF	0.010 694 2	0.026 383 1	Unconstrained	0.019 119 2	0.037 229 7
ISNC-CKF	0.010 695 0	0.026 395 9			

表 2 给出了上述滤波算法实现过程中所耗费的时间,算法耗费时间从高到低依次是 MHE4、MHE2、ISNC-QKF、ISNC-UKF、ISNC-CDKF、ISNC-CKF、2ordNC、SCKF、PM、LC 以及没有加非线性约束状态条件的 EKF。从表中的数据可以看出,该文提出的滤波算法中 ISNC-CDKF 及 ISNC-CKF 其耗费时间基本相当,和 ISNC-UKF 算法耗费时间类似,而 ISNC-QKF 的耗费时间也应该和上述三种滤波算法相当,但是由于在算法实现过程中计算积分点时耗费了额外的时间,而积分点的计算可以离线获得,故 ISNC-QKF 和 ISNC-CKF、ISNC-CDKF 及 ISNC-UKF 的耗费时间是基本相当的。虽然 SCKF 滤波算法和该文提出的三种滤波算法相比较,误差较低、耗费时间少,但该算法值仅适用于弱非线性情况,对于非线性约束函数雅克比矩阵不存在或者雅克比矩阵难以求解的情况,若使用该算法,只会使得滤波失效,而该文给出的这三种算法可以适用于强非线性情况,能够避免上述问题。MHE 滤波算法和这三种算法相比较,虽然误差很低,但是其耗费时间却很大。综上所述,给出的三种算法不仅无需求解非线性约束函数雅克矩阵,且能够使得滤波结果更加逼近真实值,算法处理时长也较短。

表 2　各种算法消耗时间对比

算法	耗费时间/s	算法	耗费时间/s
MHE4	18.7	2ordNc	0.11
MHE2	9.25	SCKF	0.10
ISNC-QKF	2.37	PM	0.09
ISNC-UKF	0.74	LC	0.06
ISNC-CDKF	0.61	Unconstrained	0.04
ISNC-CKF	0.55		

5　结束语

在处理非线性状态约束估计问题时,若约束函数为弱非线性时,可采用泰勒级数展开方式近线性化非线性约束函数,但是在实现过程中可能会出现以下问题:状态估计中需求解非线性函数的雅克比矩阵,然而雅克比矩阵也可能不存在或易于求解,另外在许多应用条件的影响下,滤波结果也可能会出现精度差、估计有偏或者发散等问题。为了避免上述问题,提出了高斯假设下的一类迭代收缩非线性状态约束滤波方法,并给出了几种实现算法,包括:ISNC-QKF、ISNC-CDKF、ISNC-CKF。与已有的 ISNC-UKF 算法性能类似,都无需求解非线性函数的雅克比矩阵,算法实现过程中采用最佳量测的方法迭代求解状态估计值,滤波精度较好,时间复杂度适中。

参考文献:

[1] SIMON D. Kalman filtering with state constraints:a survey of linear and nonlinear algorithms[J]. IET Control Theory & Applications,2010,4(8):1303-1318.

[2] SIMON D. Optimal state estimation[M]. New Jersey:John Wiley & Sons,2006.

[3] SIMON D,SIMON D L. Kalman filtering with inequality constraints for turbofan engine health estimation[J]. IEE Proceedings of Control Theory and Applications,2006,153(3):371-378.

[4] MICHALSKA H,MAYNE D. Moving horizon observers and observer based control[J]. IEEE Transactions on Automatic Control,1995,40(6):995-1006.

[5] DE GEETER J,VAN BRUSSEL H,DE SCHUTTER J. A smoothly constrained Kalman filter[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence,1997,19(10):1171-1177.

[6] SIMON D,CHIA T. Kalman filtering with state equality constraints[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems,2002,38(1):128-136.

[7] YANG C,BLASCH E. Kalman filtering with nonlinear state constraints[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems,2009,45(1):70-83.

(下转第 114 页)