

# 基于广义胡克定律的弹性绳索拉伸研究

陈一凡,朱民耀,朱晓强,宋海洋,陆小锋

(上海大学通信与信息工程学院,上海 200444)

**摘要:**随着计算机性能不断提升,虚拟现实技术不断发展,工程开发中对于虚拟模具的要求不断提高,高效利用计算机性能达到视觉上的物理真实感已经成为衡量虚拟现实技术的关键指标。基于弹性力学本构方程,运用物理学中广义胡克定律,引入双曲线颈缩模型,改进计算机图形学中基于位置的力动力学模拟的软体绳索,综合考虑功耗和性能之间的平衡,研究软体类弹性绳索在拉伸时的多种变形情况,建立起泊松比和极限收缩半径可调的弹性绳索动态拉伸数学模型,在Unity平台进行动画效果仿真。实现了三类情况下视觉上可信的仿真,包括弹性绳索在弹性限度内,不同泊松比时,符合纵横物理变化规律的拉伸动画效果;弹性绳索超过弹性限度时,在缺陷处出现颈缩现象的拉伸动画效果;以及弹性绳索超过伸长极限时,发生断裂的拉伸动画效果。最终成功将其应用到实际的虚拟现实工程中,模拟了安全培训中施工工人佩戴安全绳发生意外坠落的虚拟现实场景,取得了较好的真实体验效果。

**关键词:**虚拟现实;广义胡克定律;基于位置的力动力学;弹性绳索;安全培训

中图分类号:TP391.9

文献标识码:A

文章编号:1673-629X(2022)06-0138-07

doi:10.3969/j.issn.1673-629X.2022.06.023

## Tensile Study of Elastic Ropes Based on Generalized Hooke's Law

CHEN Yi-fan, ZHU Min-yao, ZHU Xiao-qiang, SONG Hai-yang, LU Xiao-feng

(School of Communication and Information Engineering, Shanghai University, Shanghai 200444, China)

**Abstract:** With the continuous improvement of computer performance and the continuous development of virtual reality technology, the requirements for virtual molds in engineering development continue to increase. The efficient use of computer performance to achieve visual physical reality has become a key indicator to measure virtual reality technology. Based on the constitutive equation of elasticity, using the generalized Hooke's law in physics, we introduce the hyperbolic necking model to improve the position-based dynamic simulation software rope in computer graphics, and comprehensively consider the balance between power consumption and performance. Research the various deformations of soft elastic ropes during stretching, establish a dynamic stretching mathematical model of elastic ropes with adjustable Poisson's ratio and limit contraction radius, and simulate animation effects on the Unity platform. The simulation realizes visually credible simulation in three types of situations, including the stretching animation effect of the elastic rope within the elastic limit and different Poisson's ratios in accordance with the law of vertical and horizontal physical changes, the stretching animation effect of necking phenomenon appears at the defect when the elastic rope exceeds the elastic limit, and the stretching animation effect that breaks occurs when the elastic rope exceeds the elongation limit. Finally, it was successfully applied to actual virtual reality projects, simulating the virtual reality scene of accidental fall of construction workers wearing safety ropes during safety training, and achieving better real experience effects.

**Key words:** virtual reality; generalized Hooke's law; position-based dynamic; elastic rope; safety training

## 0 引言

虚拟现实(VR)技术是计算机软硬件技术、传感技术、机器人技术、人工智能及行为心理学等科学领域飞速发展的结晶。主要依赖于二维或者三维实时图形显示、三维定位跟踪、触觉及嗅觉传感技术、人工智能技术、高速计算与并行计算技术以及人的行为学研究

等多项关键技术的发展。受制于计算机硬件性能,VR技术一直以来概念大于应用,理论多于实践。近年来,随着计算机技术的迅速发展,计算机的性能得到了显著提升,使得VR技术在各类工程中的实际应用成为了可能。基于其独特而强大的沉浸性、交互性、构想性特质(即3L特性)<sup>[1]</sup>,VR技术开始被广泛应用于工

收稿日期:2021-07-07

修回日期:2021-11-10

基金项目:上海市科委科研项目(19511105503)

作者简介:陈一凡(1997-),男,硕士研究生,研究方向为虚拟现实;通讯作者:陆小锋(1981-),男,硕士,高级实验师,研究方向为智能信息处理。

程、教育、医疗、军事和娱乐等多种领域,并取得了显著成果。

本研究旨在将 VR 技术应用于工程施工安全培训,通过应用 VR 技术,可有效增强培训者体验感,做到身临其境;提升培训过程趣味性,提升培训对象积极性;提高培训设施可复用性,降低工程培训成本,提高培训效率<sup>[2]</sup>;消除培训时人员密集情况,满足防疫需求。为充分发挥 VR 技术的应用优势,需尽可能提高培训真实感,其中最重要的就是研究怎样将自然界物质的物理规律尽可能逼真地在虚拟环境中用动画仿真,从而给 VR 使用者最真实的体验。

在物理动画领域的研究中,计算机图形学致力于寻找新方法用于模拟物理现象如刚体、可变形物体或流体的动力学。与计算科学主要关注精确度上相反,这里更主要关注的问题是稳定性、稳健性和运行速度,同时应该保持仿真结果在视觉上的合理性<sup>[3]</sup>。弹性软绳的研究和仿真,是该领域中一个重要方向。本研究结合计算机图形学和物理学相关领域技术进行研究和探讨,逼真地模拟出弹性软绳在拉伸时形变和断裂的效果,并将该仿真结果应用到了实际 VR 培训工程中,很大程度上增强了物理真实体验感。

## 1 相关工作

该研究灵感来源于实际的工程应用,在 VR 的安全演练培训场景里需要用到安全绳索中的缓冲系带,该结构是一种弹性绳索,具有一定弹性和伸长性,属于软体结构,在 VR 环境下对软体结构的模拟属于计算机图形学的动画仿真研究。Terzopoulos D, Platt J 和 Barr A 等人<sup>[4]</sup>较早系统地提出了对弹性结构进行计算机图形仿真的方法,目前调研发现,对于弹性材质物体的仿真方法有弹簧-质量模型<sup>[5]</sup>、有限元法、有限差分法<sup>[6]</sup>和基于位置的力学(position based dynamics, PBD)方法<sup>[7]</sup>。

弹簧-质量模型的建立需要与弹性材料自身属性具有固定关系,所需参数复杂,计算量大的同时,模型复用性却不高,同时在模型运行中往往需要与力相关联,常规的解决办法是引入有限元技术和连续介质力学<sup>[8-9]</sup>,但问题紧随而来,有限元分析确实是产品设计过程中的一个常用手段,依据有限元分析结果,便可以验证设计方案的合理性,但在产品的实际开发过程中,产品建模和有限元分析是分开进行的<sup>[10]</sup>,这大大提高了工程开发应用的复杂性和难度系数,同时连续介质力学的迭代计算量十分庞大,对计算机性能要求很高,且很可能产生显式积分下的超调和能量增益问题。而基于位置的力学仿真由于能够控制显式积分,进而消除了典型的不稳定性问题;在模拟过程中,可以直接

操纵顶点和部分对象的位置,可以处理一般性约束<sup>[3]</sup>,正是由于其易于理解和实现的优势,基于位置的力学方法目前被广泛应用于计算机图形学中软体的模拟并在被不断优化和改进。

本方案综合考虑上述因素,采用改进后的基于位置的力学方法 XPBD<sup>[7]</sup>构建弹性绳索的基础,该方法通过一些近似处理,在基本不影响仿真效果的情况下,避免了迭代次数和时间步长对弹性物体刚度的影响,可把弹性物体的刚度定义为一个外部参量,成为弹性物体在动画模拟时的固有属性。值得注意的是,该方法仍然是基于位置的,对于二维布料和三维实物的模拟,能通过一般性约束从粒子间距离的变化反映出视觉可信的对应维度的形变。然而弹性绳索的仿真,一般由少量单序列粒子串模拟,粒子间引入距离和碰撞约束,首尾粒子的相对位置变化反映绳索长度的变化,也就说方法上绳索的概念被定义为一维结构,从而导致绳索在仿真过程中,只有纵向形变而没有横向形变,这在视觉上是明显不合理的,违背了计算机图形学的基本要求。本研究根据基于位置的力学算法原理和弹性力学的广义胡克定律设计实现了弹性绳索在弹性限度内拉伸发生纵向形变时对应发生横向形变的效果,同时实现了弹性绳索过度拉伸时材质缺陷处发生颈缩型塑性形变<sup>[11]</sup>和超出拉伸极限发生断裂<sup>[12]</sup>的特效。

## 2 绳索模拟基本理论

最早的基于位置的力学(PBD)由 Müller M 和 Heidelberger B 等人<sup>[3]</sup>在 2006 年系统提出,不久 Müller M<sup>[13]</sup>通过改进算法加快收敛速度,改善了软体刚性属性,为在少量迭代即计算量较小的情况下,用该算法模拟弹性绳索奠定基础。该算法应用广泛并不断改进,但直到 2016 年 Macklin M 等人<sup>[7]</sup>才提出 XPBD 方法。PBD 求解器的主要步骤是求解每个受约束的粒子组的相对位置  $\Delta x$ , 求解公式如下所示:

$$\Delta x = k_{j,s_j} M^{-1} \nabla C_j(x_i) \quad (1)$$

式中,下标  $i$  表示迭代索引,  $j$  是约束条件,  $k \in [0, 1]$  是简单应用的约束刚度,  $k$  直接影响了视觉下的软体硬度效果,根据公式易见  $k$  与迭代次数和时间步长都有关系。XPBD 通过一些近似处理在基本不影响视觉效果的情况下,计算公式被重定义为:

$$\Delta x = M^{-1} \nabla C(x_i)^T \Delta \lambda \quad (2)$$

简化后的公式(2)中,约束刚度被转化成一个不受时间步长和迭代次数影响的参量,并可以在外部自定义大小, Macklin M 等人通过和其他物理建模方法实验对比,验证了 XPBD 的可行性。对于弹性绳索的模拟,首先关注到其弹性,尝试在提高刚性的情况下,

把粒子盘绕成螺旋的排列形式,内部结构像是弹簧,外部渲染成一个整体,这样仅依赖距离约束,弹簧结构在纵向变化时就能引起横向变化。Kugelstadt T 和 Schömer E<sup>[14]</sup> 确实成功优化了 PBD 方法的弹簧结构仿真,但该方法中大部分计算是在模拟弹簧内部的扭转和弯曲上,且整体结构在表现出良好的弹性性能时,其柔性过高,视觉上与绳索具有很大差异,巨大计算代价下的低仿真效果明显不满足研究需求。同时发现,PBD 方法下的任何仿真,都默认粒子属性只有位置,速度和质量属性,却没有大小,联系到 XPBD 方法下,外部定义约束刚性大小(在下一节里将解释定义刚性的原因)后,只需少量粒子在线性情况下的模拟,就能够在迭代次数较小和时间步长合理的情况下,使粒子结构表现出良好的弹性物理性质,基于此,再考虑引入基本弹性力学概念,通过计算推导出弹性绳索纵横形变规律,为线性结构的粒子组定义大小,仿真实现弹性绳索的真实感物理变化。

弹性绳索是弹性体的一种特殊情况,可以在弹性体变形研究的框架下对其形变规律进行计算和归纳。在不计热效应的准静态条件下,将弹性物体微分成无数个小单元进行力和能量的分析,对于弹性体来说,外力做功等于内力做功,由应变能密度是应变的单值函数,可得:

$$dW = \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} \quad (3)$$

式中,  $W$  表示功,  $\sigma_{ij}$  表示  $ij$  方向的应力,  $\epsilon_{ij}$  表示  $ij$  方向的应变,根据公式(3)推导出:

$$W = \int_0^{\epsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} \quad (4)$$

公式(4)又可表示为:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \epsilon_{ij}} \quad (5)$$

公式(5)称之为格林(Green)公式,表示了弹性材料的本构关系,将  $W$  在  $\epsilon_{ij} = 0$  的地方泰勒展开,得到:

$$W = c + b_{ij} \epsilon_{ij} + \frac{1}{2} E_{ijkl} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} \quad (6)$$

其中,  $c = W|_{\epsilon_{ij}=0}$ ,  $b_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \epsilon_{ij}}|_{\epsilon_{ij}=0}$

$$E_{ijkl} = \frac{\partial^2 W}{\partial \epsilon_{ij} \partial \epsilon_{kl}}|_{\epsilon_{ij}=0}$$

又有:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \epsilon_{ij} \partial \epsilon_{kl}} = \frac{\partial^2 W}{\partial \epsilon_{ji} \partial \epsilon_{lk}} = \frac{\partial^2 W}{\partial \epsilon_{ij} \partial \epsilon_{lk}} = \frac{\partial^2 W}{\partial \epsilon_{kl} \partial \epsilon_{ij}}, \text{ 可得 } E_{ijkl} =$$

$E_{jikl} = E_{ijlk} = E_{klij}$ , 那么将公式(6)代入公式(5),同时假定初应力  $b_{ij} = 0$ ,从而推导出可供本研究运用的广义胡克定律:

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (7)$$

横观各向同性弹性本构方程如下:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{E_h} & -\frac{v_{hh}}{E_h} & -\frac{v_{vh}}{E_v} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{v_{hh}}{E_h} & \frac{1}{E_h} & -\frac{v_{vh}}{E_v} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{v_{vh}}{E_v} & -\frac{v_{vh}}{E_v} & \frac{1}{E_v} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{vh}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{vh}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+v_{hh})}{E_h} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (8)$$

式中,  $E_v$  为垂直于各向同性平面的弹性模量,  $E_h$  为平行于各向同性平面的弹性模量,  $v_{vh}$  为施加垂直应变引起水平应变的泊松比,  $v_{hh}$  为各向同性平面内的泊松比,  $G_{vh}$  为垂直于各向同性平面的剪切模量,  $\epsilon$  为应变增量,  $\sigma$  为正应力增量,  $\gamma$  为切应变增量,  $\tau$  为切应力增量。

绳索多为绞线缠绕结构,可以认为是水平层理结构,如图 1 所示。

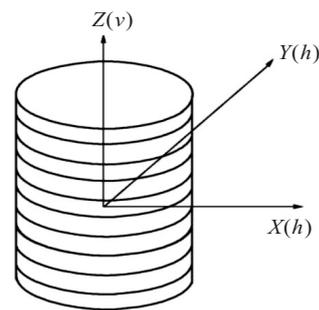


图 1 水平层理结构

则有水平层理面两个方向  $X$  和  $Y$  的应力和应变关系一致<sup>[15]</sup>,统一表示应变为  $\epsilon_h$ , 应力为  $\sigma_h$ ,  $Z$  方向的应变和应力  $\epsilon_z$  表示为  $\epsilon_v$ ,  $\sigma_z$  表示为  $\sigma_v$ , 则本构方程可以简化为:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_v \\ \epsilon_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_v} & -\frac{2v_{vh}}{E_v} \\ -\frac{v_{vh}(1-v_{hh})}{E_v} & \frac{1}{E_h} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_v \\ \sigma_h \end{bmatrix} \quad (9)$$

矩阵乘积得:

$$E_v = \frac{\sigma_v}{\varepsilon_v} \tag{10}$$

$$v_{vh} = -\frac{\varepsilon_h}{\varepsilon_v} \tag{11}$$

### 3 弹性绳索基本模型和优化

#### 3.1 基本纵横形变弹性绳索模型

在自然世界里,弹性体的  $E$  和  $v$  是物质的固有属性,  $E$  即杨氏弹性模量,是描述固体材料抵抗形变能力的物理量<sup>[16]</sup>,  $v$  即泊松比,材料沿载荷方向产生伸长(或缩短)变形的同时,在垂直于载荷的方向会产生缩短(或伸长)变形,垂直方向上的应变  $\varepsilon_h$  与载荷方向上的应变  $\varepsilon_v$  之比的负值称为材料的泊松比,在材料弹性变形阶段内,  $v$  是一个常数,数学家泊松早在 1829 年发表的《弹性平衡和运动研究报告》一文中就给出了理论推导。

把弹性材料的物理性质映射到动画仿真中,动画的变化规律应尽量符合其在真实世界的物理规律,以保证其视觉上的可信,达到具有物理真实感的动画仿真效果。XPBD 方法下构建的线性粒子组,粒子间的刚度约束不受时间步长和迭代次数影响,并且可以在外部自定义,这就意味着刚度成为线性粒子组的固有属性,并在视觉上反映粒子组模拟的绳索弹性效果。

如图 2 所示,用少量粒子,当给绳索添加载荷(实验中设置 mass 为 10 g),载荷进行视觉上可信的简谐运动,当载荷停在平衡点时,绳索伸长率(绳索伸长量与绳索原长的比值)从左到右依次为 0.0,0.3,0.6 和 0.9。显而易见,该方法模拟的绳索抵抗形变的能力和刚度系数线性正比例相关,可验证,该方法模拟的绳索在刚度参数预定义时,其抵抗形变的能力是始终不变的,映射到物理属性中,印证了杨氏模量  $E$  是弹性物体的固有属性,弹性物体在连接载荷时纵向形变规律满足广义胡克定律,其纵向形变是视觉上可信的,但绳索在悬挂载荷拉伸后,横向也应该对应发生形变。

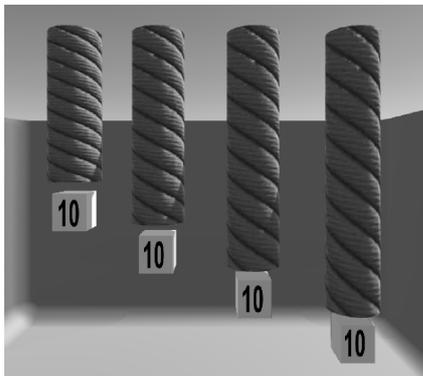


图 2 不同刚度系数下的弹性绳相同载荷平衡状态  
(载荷为 10 g,从左到右的线刚度系数分别为 0.000,0.001,0.002,0.003)

首先考虑在弹性限度内弹性物体拉伸时的形变规律,在杨氏模量确定,绳索纵向拉伸规律满足物理真实感的前提下,根据公式(11)可以找到横向形变和纵向形变的对应关系,但值得强调的是,该公式仅在弹性物体的微分单元上成立,假定模拟的绳索材质均匀,那么根据微分单元的体积和是绳索整体体积的基本原理,只需计算各微分单元的体积变化,求和得到绳索整体的体积变化,又有纵向形变已知,那么横向变化易得。

当弹性物体的材质均匀并受到拉力时,其内部受力处均匀,那么意味着所有微分单元体(以下简称微元体)的形变规律是一致的,如图 3 所示,可以求解微元体的体积变化量  $\Delta V$ 。

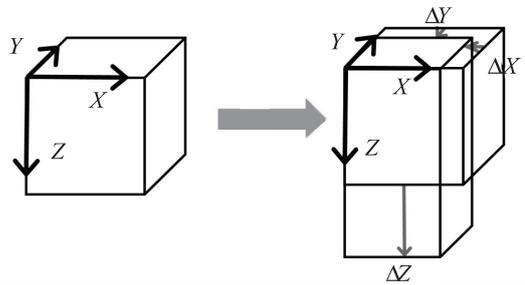


图 3 微分单元的形变

当微元体纵向  $Z$  受到拉力时,根据公式(10),应力引起应变,纵向伸长,根据公式(11)可知横向形变与纵向形变存在固定比例关系,比例系数是弹性物体的固有属性——泊松比  $v$ 。

求解如下联立方程组:

$$\begin{cases} \Delta V = V_1 - V_0 \\ V_0 = XYZ \\ V_1 = (X + \Delta X)(Y + \Delta Y)(Z + \Delta Z) \\ \varepsilon_h = \frac{\Delta X}{X} = \frac{\Delta Y}{Y} \\ \varepsilon_v = \frac{\Delta Z}{Z} \\ \varepsilon_h = -v\varepsilon_v \end{cases} \tag{12}$$

式中,  $V_0$  是微元体的原始体积,  $V_1$  是微元体形变后的体积,忽略高阶小量,可以得到:

$$\Delta V = XY\Delta Z + XZ\Delta Y + YZ\Delta X \tag{13}$$

代入公式(12)有体积变化率:

$$K = \frac{\Delta V}{V_0} = \frac{\Delta Z}{Z} + \frac{\Delta Y}{Y} + \frac{\Delta X}{X} = (1 - 2v)\varepsilon_v \tag{14}$$

微元体的全体集合是弹性体整体,弹性体在材质均匀的前提下,各微元体的变化是相同的,那么对其进行求和,推广到一般情况,整体的体积变化将与微元体的变化是一致的,变化率也是  $K$ ;弹性绳索的模型被定义为圆柱体,均匀拉伸后的绳索仍然是圆柱体,只是半径会发生变化,那么有:

$$\begin{cases} K = \frac{\sum \Delta V}{\sum V_0} = \frac{\pi r^2 l - \pi R^2 L}{\pi R^2 L} \\ \varepsilon_v = \frac{\sum \Delta Z}{\sum Z} = \frac{l - L}{L} \end{cases} \quad (15)$$

将公式(14)代入公式(15)可得:

$$\frac{r}{R} = \sqrt{1 + 2v\left(\frac{L}{l} - 1\right)} \quad (16)$$

式中,  $R$  和  $r$  分别为弹性绳索在载荷作用下发生形变前后的半径,  $L$  和  $l$  分别为弹性绳索在载荷作用下发生形变前后的长度,  $v$  是绳索的固有属性泊松比, 物理学中取值为  $-1$  到  $0.5$ , 小于零时, 表明材料是具有负泊松比的特殊材料, 材料受拉体积反而增大。

### 3.2 颈缩型塑性形变弹性绳索优化模型

考虑绳索材质在某一位置存在缺陷的特殊情况, 当载荷拉力导致绳索收缩, 截面小于截面收缩极限时, 绳索会从缺陷点开始发生颈缩, 颈缩曲线一般来说符合双曲线模型<sup>[17]</sup>。

绳索发生颈缩时, 沿绳索横向截面圆直径的纵向切截面如图 4 双曲线所示。颈缩程度从绳索两端到缺陷点逐渐增强, 假定缺陷点在绳索中间, 绳索两端为最大半径位置, 且垂直投影在双曲线焦点上, 视觉上表现为两端粗、中间细, 两端半径为收缩极限截面半径, 则可等效为绳索在发生颈缩时, 绳索纵向上任意位置的横截面圆半径是双曲线到  $Y$  轴的距离, 则有:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = r_{\min}^2 \\ \frac{r_{\min}^2}{a^2} - \frac{\left(\frac{l}{2}\right)^2}{b^2} = 1 \end{cases} \quad (17)$$

式中,  $r_{\min}$  为截面收缩到极限时的绳索两端横截面圆半径,  $l$  为绳索当前长度, 联立求解可得:

$$\frac{16x^2}{(\sqrt{l^2 + 16r_{\min}^2} - l)^2} - \frac{8y^2}{(\sqrt{l^2 + 16r_{\min}^2} - l)l} = 1 \quad (18)$$

根据公式(18), 在已知绳索长度时, 可以求解任意位置的绳索半径。

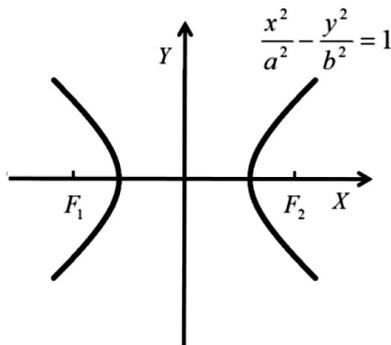


图 4 双曲线

### 3.3 断裂特效模拟弹性绳索优化模型

当绳索发生颈缩后, 绳索依然能够在持续增大的载荷拉力作用下继续伸长, 缺陷处的截面半径随着绳索的继续拉长会持续变小, 当缺陷处截面半径小于一个极限值时, 绳索会发生断裂, 此时的绳索长度为极限拉伸长度, 绳索极限拉伸长度与自身材料属性有关, 是绳索的固有属性<sup>[18]</sup>。因此可通过设置阈值的方式, 当绳索伸长率大于该阈值时发生断裂, 进而考虑绳索断裂时的特效渲染。

考虑到真实物理性质下, 绳索为多股纤维材料编制而成, 当发生断裂时, 编织结构被破坏, 多股纤维也同时发生断裂, 那么断裂口将呈现出不规则毛刺状, 不规则映射到计算机语言里就是随机, 毛刺状可以通过倒三角贴图渲染, 可在建立绳索模型时, 通过设置随机数, 随机建模断裂处的模型单元长度和方向, 通过倒三角贴图渲染的方式, 达到视觉上类似的不规则毛刺状断裂口效果。

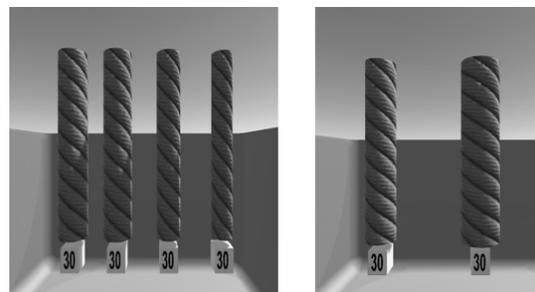
## 4 实验结果与分析

实验在 Unity 平台下进行, 构建的是 VR 开发环境。实验中通过设置几组不同参数的对比实验, 展示设计的绳索在不同拉伸情况下的仿真效果。

### 4.1 基本纵横形变弹性绳索模型仿真

首先在不考虑横向变化的情况下, 验证弹性绳索的基本物理性质, 设置一组对比实验, 如图 2 所示, 可验证, 当弹性绳索刚度系数确定时, 其能够在符合广义胡克定律的情况下, 真实地模拟出弹性绳索的物理伸长规律。

进而考虑横向形变, 根据公式(16), 设置一组对比实验, 弹性绳索的刚度系数为  $0.001$ , 泊松比左二开始向右分别为  $0.0, 0.3$  和  $0.5$ 。



左一未设置横向形变, 左二到左四泊松比分别为  $0.0, 0.3$  和  $0.5$  (a) 负泊松比 ( $-0.8$ ) 下的弹性绳索拉伸效果 (b)

图 5 不同泊松比下的弹性绳索拉伸效果

对常见材料来说, 纵向拉伸会导致横向收缩, 所以泊松比一般不会为负值, 在图 5(a) 中, 当泊松比为  $0$  时, 表示该种弹性绳索纵向拉伸不会导致横向收缩, 所以和左一绳索原来粗细始终保持一致, 半径收缩率为  $0$ ; 当泊松比为  $0.5$  时, 表示该种弹性绳索在拉伸形变

过程中保持体积不变;一般来说,弹性绳索的泊松比在0.3左右。通过对比实验,外部调节泊松比参数,视觉上,该弹性绳索模型在载荷作用下拉伸过程中的形变基本符合物理真实感。

同时测试了负泊松比的情况,能够模拟负泊松比材料在载荷作用下纵向拉伸时横向也拉伸的形变效果,如图5(b)。希望能够为以后在计算机仿真中模拟负泊松比材料的形变规律做出贡献。

#### 4.2 颈缩型塑性形变弹性绳索模型仿真

根据公式(18),设置不同的弹性绳索的极限截面收缩半径,模拟弹性绳索在载荷作用下拉伸到不同程度时发生颈缩的仿真效果。

在图6中,从左到右依次为不发生颈缩,发生颈缩且极限收缩半径 $r_{min}$ 为0.80倍的原始半径,0.75倍的原始半径和0.70倍的原始半径四种情况。动画仿真过程中,当弹性绳索在载荷作用下拉伸时,横向截面半径对应缩小,在大于极限收缩半径时,半径均匀减小,当小于极限收缩半径时,绳索无法继续均匀横向收缩,会从缺陷点处发生颈缩,颈缩曲线用双曲线拟合,视觉上达到了基本可信的程度。

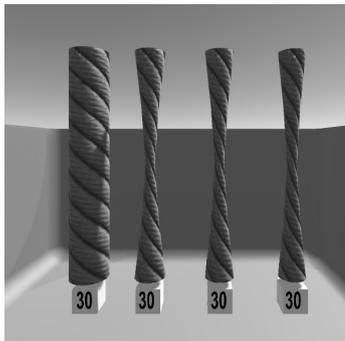


图6 弹性绳索颈缩效果仿真

#### 4.3 断裂特效模拟弹性绳索模型仿真

根据前一节结论,弹性绳索被过度拉伸时会发生断裂,通过断裂处分割式随机数建模,用倒三角贴图模拟出断裂口不规则毛刺状效果。

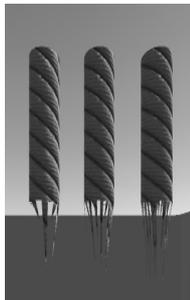


图7 弹性绳索不规则毛刺状断裂口仿真

如图7,绳索的圆柱体分割建模单元从左到右依次设置为8,16和32,可以看到模型的分割单元越多,模拟的毛刺状效果就越好,但分割单元越多,计算机的功耗也就越大,因此需要在基本满足视觉需求的同时,

不过度追求精细。通过实验对比,模型分割单元在16到32之间基本就可以满足模拟绳索不规则毛刺状断裂口的仿真视觉效果。

#### 4.4 弹性绳索完整形变过程仿真

实验测试了弹性绳索在载荷作用下拉伸的完整形变过程。

如图8所示,弹性绳索的拉伸过程,首先是弹性限度内,均匀拉长,材质均匀的情况下,横向均匀收缩;当超过弹性限度时,即截面达到收缩极限,绳索发生塑性形变,从材质缺陷处开始发生颈缩;当绳索超过伸长极限时,会从中间发生断裂,断裂处呈现不规则毛刺状。

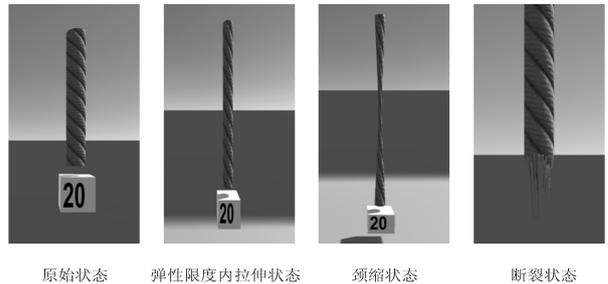


图8 弹性绳索拉伸形变完整过程

#### 4.5 弹性绳索普适性及实用性仿真

如图9(a)所示,为了测试本研究弹性绳索的普遍适用性,为绳索表面添加碰撞检测,当绳索拉伸过程中因碰撞而弯曲时,其纵横变化规律依然表现出良好的视觉动画效果。

如图9(b)所示,在工程施工中,工人难免会到高空进行施工操作,正确佩戴安全保护装置是保证施工安全的必要环节,在VR场景中对工人进行培训,既提高了培训效率,也降低了培训风险和成本,但为了使培训的效果显著,其真实性要求很高。本研究设计的缓冲绳索能够模拟工人失足坠落的动画效果,同时弹性绳索的弹性特性,对坠落的缓冲动画效果显著,绳索的拉伸形变在视觉上基本满足真实感的要求。

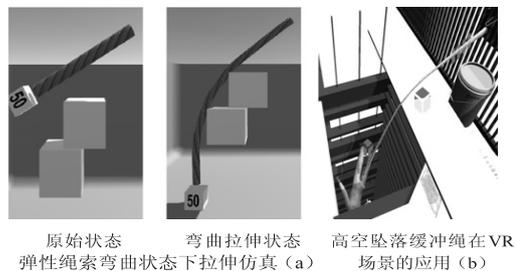


图9 弹性绳索普适性及实用性仿真

### 5 结束语

通过对弹性绳索的研究和仿真,实现了其在弹性限度内拉伸时,符合纵横物理变化规律的动画仿真;超过弹性限度时,符合塑性形变物理规律,绳索材质缺陷处发生颈缩的动画仿真以及超过伸长极限发生断裂时

的断裂口效果仿真。并成功将其应用到 VR 工程中,用以模拟安全保护装置的缓冲绳索,展现了良好的视觉效果。研究结果还可以应用于其他弹性绳索的模拟,如蹦极的弹力绳和健身弹力绳等,使得 VR 用户能够在虚拟环境中从视觉上获得最符合物理真实感的体验;研究中负泊松比的引入,也可以为其他特殊负泊松比弹性材料的拉伸仿真研究提供参考。对于材质不均匀的弹性绳索,正在考虑引入更多的模型参数,将绳索刚度系数拟合为与绳索粒子位置相关联的函数,以求实现更复杂的形变动画效果。

#### 参考文献:

- [1] 刘 强,言天舒,曾志高. 大学计算机软件应用基础:多媒体技术与应用[M]. 长沙:中南大学出版社,2016.
- [2] 毛立平,孙刘杰,王文举,等. 基于增强现实的钢铁生产线可视化仿真系统[J]. 计算机技术与发展,2021,31(5):157-161.
- [3] MÜLLER M, HEIDELBERGER B, HENNIX M, et al. Position based dynamics[J]. Journal of Visual Communication and Image Representation, 2007, 18(2): 109-118.
- [4] TERZOPOULOS D, PLATT J, BARR A, et al. Elastically deformable models [C]//Proceedings of the 14th annual conference on computer graphics and interactive techniques. Anaheim, USA: [s. n. ], 1987: 205-214.
- [5] DA SILVA J P, GIRALDI G A, APOLINÁRIO JR A L. A new optimization approach for mass-spring models parameterization[J]. Graphical Models, 2015, 81: 1-17.
- [6] NEALEN A, MÜLLER M, KEISER R, et al. Physically based deformable models in computer graphics[J]. Computer Graphics Forum, 2006, 25(4): 809-836.
- [7] MACKLIN M, MÜLLER M, CHENTANEZ N. XPBD: position-based simulation of compliant constrained dynamics [C]//Proceedings of the 9th international conference on motion in games. California, USA: [s. n. ], 2016: 49-54.
- [8] GOLEC K, PALIERNE J F, ZARA F, et al. Hybrid 3D mass-spring system for simulation of isotropic materials with any Poisson's ratio[J]. The Visual Computer, 2020, 36(4): 809-825.
- [9] DA SILVA J P, GIRALDI G A, APOLINÁRIO JR A L. Data-driven optimization approach for mass-spring models parameterization based on isogeometric analysis [J]. Journal of Computational Science, 2017, 23: 1-19.
- [10] 徐劲力,周 铮. 基于 HoloLens 的有限元分析变形结果可视化研究[J]. 系统仿真学报, 2021, 33(1): 109-117.
- [11] 袁昌望,黄加进,钟辉隆,等. 热冲压成形后 22MnB5 钢的组织与拉伸性能以及拉伸时的微观形貌演变[J]. 机械工程材料, 2021, 45(5): 45-49.
- [12] 纪 程. 表征铝合金应变率与各向异性效应的断裂准则与损伤模型研究[D]. 北京:北京交通大学, 2020.
- [13] MÜLLER M. Hierarchical position based dynamics [C]//Workshop on virtual reality interactions & physical simulations. [s. l. ]: DBLP, 2008.
- [14] KUGELSTADT T, SCHÖMER E. Position and orientation based Cosserat rods [C]//Symposium on computer animation. Zurich, Switzerland: [s. n. ], 2016: 169-178.
- [15] 王者超,宗 智,乔丽苹,等. 横观各向同性岩石弹塑性本构模型与参数求解方法研究[J]. 岩土工程学报, 2018, 40(8): 1457-1465.
- [16] 何光宏,汪 涛,韩 忠. 大学物理实验[M]. 北京:科学出版社, 2017.
- [17] 嵇 醒,殷家驹,汤 泉. 颈缩的有限元分析[J]. 固体力学学报, 1983, 4: 532-541.
- [18] 丁 许,孙 颖,魏雅斐,等. 芳纶纤维二维编织绳索的拉伸及应力松弛性能研究[J]. 产业用纺织品, 2020, 38(4): 17-24.