

# 变分贝叶斯估计图像滤波去噪算法

张睿敏,张甲艳,陶冶

(兰州工业学院 计算机与人工智能学院,甘肃 兰州 730050)

**摘要:**图像在拍摄获取、存储和传输等过程中,由于操作、光线等会造成各种噪音。变分贝叶斯估计图像滤波去噪算法,是通过平均场理论将隐变量的后验按维度展开得到计算框架,并按维度迭代更新估计结果至算法收敛,引入新的隐变量,给出过程噪声后验分布。输入向量  $X(n)$  和期望响应  $d(n)$  被用来计算估计误差  $e(n)$ ,并利用此误差信号构造一个自适应算法的性能函数,随着数据输入的变化,自适应地更新此性能函数,并且不断使其最小化。在此过程中不断地更新调整滤波器的滤波参数,使得这个参数能在最小化性能函数所使用的准则下最优,从而达到滤波效果。首先,定义贝叶斯估计图像滤波模型;然后,利用贝叶斯后验概率分布推导、计算真实分布和近似分布之间的 Kullback-Leibler 距离;最后,以迭代递推方式估计目标状态,提高状态估计精度,实现图像滤波去噪。大量实验表明该算法滤波去噪效果明显,能最大程度地保护图像细节。

**关键词:**变分贝叶斯;估计;图像滤波;迭代;去噪算法

中图分类号:TP31

文献标识码:A

文章编号:1673-629X(2021)07-0059-05

doi:10.3969/j.issn.1673-629X.2021.07.010

## Image Filtering and Denoising Algorithm Based on Variable Bayes Estimating

ZHANG Rui-min, ZHANG Jia-yan, TAO Ye

(School of Computer and Artificial Intelligence, Lanzhou Institute of Technology, Lanzhou 730050, China)

**Abstract:** In the process of image acquisition, storage and transmission, due to the operation, light and so on, various noises will be caused. The image filtering and denoising algorithm based on the variable Bayes estimating is to expand the posterior of hidden variables according to the dimension by the mean field theory, update the estimating results according to the dimension iteratively to the convergence of the algorithm, and give the posterior distribution of process noise by introducing new hidden variables. The input vector  $X(n)$  and the expected response  $d(n)$  are used to calculate the estimation error  $e(n)$ , which is used to construct the performance function of the adaptive algorithm. With the change of data input, the performance function is updated adaptively and minimized constantly. In this process, the filter parameters are constantly updated and adjusted, so that they can be optimized under the criterion of minimizing the performance function, so as to achieve the filtering effect. Firstly, the model of Bayes estimating is defined. Then, the Kullback-Leibler distance between the real distribution and the approximate distribution is derived and calculated by using the Bayes posterior probability distribution. Finally, the target state is estimated by iterative recursive method to improve the state estimation accuracy and achieve image filtering and denoising. A large number of experiments show that the filtering and denoising effect of the algorithm is obvious, and it can protect image details to the greatest extent.

**Key words:** variable Bayes; estimating; image filtering; iterative; denoising algorithm

### 0 引言

图像去噪、分割等处理是计算机视觉的基础,而在采集图像时,不管是像素多高的相机拍摄的图像一般不但包含主体图像图案,也包含一些阴影和噪声,这是由于光照、拍摄角度、相机抖动、传输等不同原因造成

的。在图像精确分割中,需要在分割前对图像做一些预处理,以便得到清晰精确的主体图像。变分贝叶斯估计图像滤波去噪算法(image filtering and denoising algorithm based on variable Bayes estimating, IFDA-VBE)不但能进行状态估计,而且能够对系统模型参

收稿日期:2020-05-18

修回日期:2020-09-21

基金项目:2020年甘肃省高等学校创新能力提升项目(2020A-141);中国服务贸易标准化科研课题(FMBZH-1937);兰州工业学院2020年创新创业教育改革项目(LGYCXJG-20-011)

作者简介:张睿敏(1978-),女,硕士,副教授,通讯作者,研究方向为移动互联网、Web信息组合、图像识别与数据分析。

数进行估计,在对参数建模时需要清晰图像的先验知识来建立未知量的后验分布。而在图像数据表示中,噪声一般设定为均匀的高斯噪声,任选  $n$  个瞬时噪声值,建立概率密度函数表示其分布。其他基于变分贝叶斯的算法要么将其转化为平滑问题,离线处理;要么需要预测图像噪声的未知协方差,并且在滤波去噪实现过程中,时刻都要给定一个初始噪声协方差。因此,提出一种有效的图像滤波去噪算法,具有很大的理论和实践意义。

文献[1]在贝叶斯估计框架下,对运动图像中的噪声进行处理,提出了 MAP(maximum a posterior)方法,该方法能在一定程度上对运动模糊图像进行部分复原,但是缺点是数据过度拟合;孙韶杰等在文献[2]中提出利用贝叶斯估计盲复相机抖动模糊图像,利用贝叶斯估计和自然图像梯度统计,该算法能较好地模糊图像进行盲复处理,但是算法仅限于相机抖动造成的模糊噪声问题。文献[3]针对(MAD)中值估计方法对噪声方差估计不精确的问题,提出一种改进的噪声方差估计算法,它的估计精度高于 MAD 算法对噪声方差的估计精度,能对含有不同高斯噪声强度的 CT 图像进行去噪处理。基于小波系数统计模型的贝叶斯去噪技术是:利用小波系数分布的先验知识和小波系数的相关性来去除噪声,它比小波阈值去噪算法更加灵活。而小波系数统计模型的选择十分关键,文献[4]中 Fox C. W 等人用拉普拉斯分布描述小波系数,小波系数的估计是基于最小均方误差的。文献[5]中 McLachlan G 等人提出了基于隐马尔可夫树(hidden Markov tree, HMT)模型的贝叶斯算法,利用系数的相关性进行去噪。文献[6]中 Zeng Xueqiang 等人提出的算法简化了图像去噪过程中的计算,但会影响 HMT 模型的精确度。

该研究在贝叶斯估计理论的基础上,建立带有噪声的原始图像基于贝叶斯的概率模型,然后通过引入新的隐变量,给出过程噪声后验分布;在变分贝叶斯估计的框架下,定义贝叶斯估计图像滤波模型,推导、计算真实分布和近似分布之间的 Kullback-Leibler 距离,以迭代方式估计目标状态,提高状态估计精度,实现图像自适应滤波去噪;采用大量的真实模糊图像在 MATLAB 软件环境中进行实验,并且与软件包中的 deconvblind 算法进行了对比、分析和验证。

## 1 变分贝叶斯估计理论

变分贝叶斯估计(variational Bayesian inference, VBI)是以迭代方式在给定的变分模型中,对概率模型的隐变量后验分布进行局部最优估计。

变分贝叶斯估计一般是通过平均场理论将隐变量

的后验按维度展开得到计算框架,并按维度迭代更新估计结果至算法收敛。VBEM(variational Bayesian expectation-maximization)是基于变分贝叶斯极大后验估计的最大期望算法<sup>[5]</sup>。

给定  $n$  维观测数据  $X$  和包含隐变量  $Z$  的数据模型,由贝叶斯定理可知隐变量的后验表示如下:

$$P(Z|X) = \frac{p(X|Z)p(Z)}{p(X)} \quad (1)$$

变分贝叶斯估计主要是在变分族<sup>[6]</sup> $Q$  内,利用 Kullback-Leibler 散度寻找隐变量后验分布的最优近似解,问题表示如下:

$$\min_{q \in Q} \text{KL}[q(Z) \| p(Z|X)] \Leftrightarrow \min_{q \in Q} \text{KL}[q(Z) \| p(X|Z)p(Z)] \quad (2)$$

由 KL 散度的性质可知,假设隐变量的后验分布都在变分族  $Q$  之内,并且隐变量的后验分布和变分族均为指数族分布,则得到式(2)的全局最优和局部最优。而变分贝叶斯估计使用平均场理论将  $n$  维数据的后验分布近似表示为式(3),即为一系列一维概率分布的乘积并分别求解其 KL 散度。

$$\min_{q \in Q} \text{KL}[q(Z) \| p(X|Z)p(Z)], k \in \{1, 2, \dots, d\},$$

$$Q = \{q | q(Z) = \prod_{i=1}^n q_i(Z_i)\} \quad (3)$$

若  $p(Z|X)$  本身不是变分族的成员,则式(3)中的 KL 散度不等于 0。

## 2 变分贝叶斯估计图像自适应滤波去噪算法

### 2.1 原始图像基于贝叶斯的概率模型

一般情况下将带有噪声和图像降质处理的原始图像,采用如下的数学模型进行描述:

$$g(x, y) = k(x, y) \otimes f(x, y) + n(x, y) \quad (4)$$

其中,  $f(x, y)$  表示原始输入图像,  $k(x, y)$  表示降质函数,  $n(x, y)$  表示随机噪声,  $\otimes$  表示卷积操作,  $g(x, y)$  表示带有噪声的模糊输出图像。

通常图像模糊去噪的很多算法都是从概率的角度出发<sup>[7]</sup>,建立模糊问题(加一些约束)对应的方程。该文利用清晰图的先验知识,根据贝叶斯理论来建立未知量的后验分布<sup>[8]</sup>:

$$p(f, k | g) \propto p(g | f, k) p(k) p(f) \quad (5)$$

对于表示图像信息的数据矩阵,模糊核也是一个矩阵表示,一般清晰图像与模糊核进行卷积操作后,图像会变模糊<sup>[9]</sup>。假设噪声为均匀的高斯噪声,则图像的似然描述为:

$$p(g | f, k) \propto \prod_i \exp\left(-\frac{((f \otimes k)_i - g_i)^2}{Z \sigma^2}\right) \quad (6)$$

其中,  $\sigma$  是随机噪声的标准差,  $p(f)$  是清晰图像的先

验约束,  $p(k)$  是模糊核的先验约束<sup>[10]</sup>。

在处理图像过程中,噪声通常被假设为零均值的高斯噪声,高斯噪声是一种随机噪声。因此,该噪声模型采用零均值的高斯噪声模型,任选  $n$  个瞬时噪声值,其值按高斯概率定律分布,即正态分布,概率密度函数为:

$$P(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \quad (7)$$

其中,  $\mu$  表示  $z$  的期望或均值;  $\sigma$  表示噪声的标准差。

概率密度函数曲线如图 1 所示。

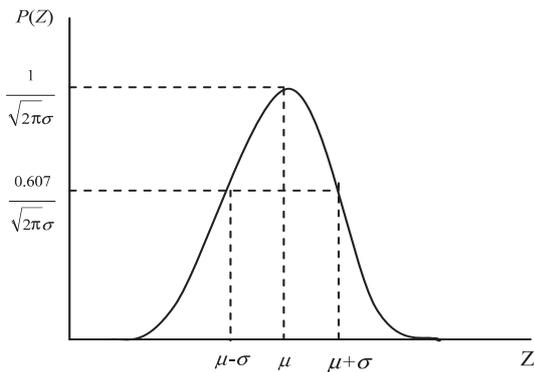


图 1 概率密度函数曲线

## 2.2 基于贝叶斯的模型优化

在贝叶斯优化算法中,根据均匀分布来随机产生初始种群,而候选解都是从当前初始种群中选择得到;然后对选择后的种群进一步建立贝叶斯网络概率模型;再从模型的采样中获取新的候选解;最后,将获取到的新的候选解重新加入到原来的种群中,或者用新的候选解替代原来的所有的解<sup>[11]</sup>。以上过程不断重复循环,直到循环终止条件满足,则停止操作,其中,终止条件可以设置为已经找到的最优解,或者是不可能找到的更优的解。

基于贝叶斯的图像模型优化流程如下:

- (1) 设  $t := 0$ , 随机生成初始种群  $p(0)$ ;
- (2) 从初始种群  $p(0)$  中选择候选解  $S(t)$ ;
- (3) 构建符合要求的贝叶斯网络概率模型;
- (4) 根据贝叶斯网络模型的联合分布函数产生新的候选解  $O(t)$ ;
- (5) 用  $O(t)$  代替  $P(t)$  中的部分解或所有解,形成新的种群  $P(t+1)$ ;
- (6) 如果没有达到终止条件,转向第(2)步操作;
- (7) 循环重复操作,直到终止条件满足。

一旦确定了贝叶斯网络的参数和结构,则可根据贝叶斯网络中的概率分布来产生新的候选解。新的候选解的所有变量的值都遵守算好的顺序<sup>[12]</sup>,因为是按照遗传算法产生变量值的,所以在变量值产生时,变量的父节点必须已经产生了,变量值的分布是由相应的

条件概率得到的。

产生变量值的算法描述如下:

- (1) 将所有变量初值设置为未处理状态;
- (2) 选择一个未处理的变量  $X_i$ ,但其父节点变量已被处理过;
- (3) 将  $X_i$  设置为  $x_i$  基于概率  $p(X_i = x_i | \prod_{x_j} \pi_{x_j}) = \pi_{x_i}$ ;
- (4) 将  $X_i$  置为已处理;
- (5) 如果还有未处理的变量,转到步骤(2)。

针对算法中保持候选种群的问题,该文参照 Harik 等人提出的 CGA (compact genetic algorithm) 算法,采用概率向量来表示候选解的概率分布<sup>[13]</sup>,即由概率向量随机生成个体,然后,只需按照一定策略随时更新概率向量,而不必保留候选解的种群。这极大地减少了存储空间。

## 2.3 算法分析

(1) 收敛性定义。

算法的初始种群的选取是随机的,另外按照一定的原则选择样本建立了概率模型,所以按照概率搜索过程是一种进化过程<sup>[14]</sup>,在进化过程中,概率性是否一定收敛到全局的一个最优解,这需要对算法的收敛性进行分析。

参照分布估计算法的收敛性分析,定义贝叶斯优化算法的收敛性目标如下:

$$E(t) = \int f(x)p(x,t) dx \quad (8)$$

$E(t)$  是种群在第  $t$  代的目标函数的平均值,如果

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E(t) = G^* \quad (9)$$

则说明贝叶斯优化算法是全局收敛的。

(2) 采用比例选择收敛性分析。

比例选择是在比例选择中,个体被选择的概率和其适应值成比例<sup>[15]</sup>,贝叶斯优化算法的比例选择表示如下:

$$P^s(x,t) = \frac{f(x)p(x,t)}{E(t)} \quad (10)$$

对于  $x \in D$ ,  $f(x)$ ,  $p(x)$  是连续的,由于  $f(x)$ ,  $p(x,0) > 0$ ,  $p(x,t)$  是正的连续概率函数,并且对  $t \geq 0$ ,  $E(t) < G^*$ 。由式(8)和式(10)有:

$$E(t+1) = \frac{\int [f(x)]^2 p(x,t) dx}{E(t)} \quad (11)$$

则:

$$E(t+1) - E(t) = \frac{\int [f(x) - E(t)]^2 p(x,t) dx}{E(t)} \quad (12)$$

从遗传算法<sup>[16]</sup>研究可知,对任意的  $t > 0$  有  $E(t+1) > E(t)$

1)  $\geq E(t)$ , 因此  $\lim_{t \rightarrow \infty} E(t)$  是存在的。

至此, 即: 当  $p(x, 0)$  为正, 并在  $D$  上连续时,  $p(x, t+1) = p^s(x, t) + \sigma(x, t)$ , 当  $\sigma(x, t) \geq 0$  时, 使用比例算子的贝叶斯优化算法收敛。

从上面的分析可以得出, 在采用比例选择时, 贝叶斯优化算法在  $\sigma(x, t) = 0$  和  $\sigma(x, t) > 0$  两种情况下, 都能收敛到最优解<sup>[17]</sup>。也就是在模型有正误差和没有误差的两种情况下, 贝叶斯优化算法都能收敛到最优解。

### 2.4 变分贝叶斯估计图像自适应滤波去噪算法

一般自适应滤波器在未知环境下也能良好的运作, 关键是具有跟踪输入统计量随时间变化的功能。虽然对于不同的应用有不同的实现结构, 但是它们都有一个基本的特征: 输入向量  $X(n)$  和期望响应  $d(n)$  被用来计算估计误差  $e(n)$ , 即  $e(n) = d(n) - X(n)$ , 并利用此误差信号构造一个自适应算法的性能函数<sup>[17]</sup>, 随着数据输入的变化, 自适应地更新性能函数, 目标是 minimized 性能函数。在此过程中不断地更新调整滤波器的滤波参数, 使得这个参数在前面的最小化性能函数所使用的准则下最优, 从而达到滤波效果, 实现自适应过程。

首先, 定义一般状态贝叶斯估计图像滤波模型, 性能函数定义为:  $\alpha_t = (x_t, \mu_t, \lambda_t)$ , 参数  $x_t, \mu_t, \lambda_t$  表示如下:

$$\begin{cases} \mu_t \sim N(\mu_t | \mu_{t-1}, \bar{\lambda}) \\ \lambda_t \sim W_{\pi}(\lambda_t | S) \\ x_t = N(\mu_t, \lambda_t) \end{cases} \quad (13)$$

其中,  $x_t$  为输入向量,  $\mu_t$  为期望值,  $\mu_t$  满足高斯分布特性,  $\lambda_t$  为精度矩阵, 满足 Whishart 分布。

然后, 利用贝叶斯后验概率分布进行计算:

$$p(\alpha_t | z_{1:t}), z_{1:t} = \{z_1, z_2, \dots, z_t\} \quad (14)$$

最后, 通过计算真实分布和近似分布间的 Kullback-Leibler 距离的最小化值, 来实现滤波逼近。

$$D_{KL}(q \| p) = \int q(\alpha_t) \log \frac{q(\alpha_t)}{p(\alpha_t | Z_{1:t})} d\alpha_t \quad (15)$$

约束条件为:

$$\int q(\alpha_t) d\alpha_t = 1 \quad (16)$$

如前所述, 通过最小化真实分布  $q_{t|t-1}(\alpha_t)$  和近似分布  $p(\alpha_t | z_{1:t-1})$  之间的 Kullback-Leibler 距离来求解:

$$\begin{cases} q_{t|t-1}(x_t) \propto N(x_t | \langle \mu_t \rangle, \langle \lambda_t \rangle) \\ q_{t|t-1}(\mu_t) \propto N(\mu_t | \mu_t^*, \lambda_t^*) \\ q_{t|t-1}(\lambda_t) \propto W_n(\lambda_t | S_t^*) \end{cases} \quad (17)$$

式中, 相关参数的迭代公式为:

$$\begin{cases} \langle x_t \rangle_{q_{t|t-1}} = \langle \mu_t \rangle_{d|t-1} \\ \langle x_t x_t^T \rangle_{q_{t|t-1}} = \langle \mu_t \rangle_{d|t-1} + \langle \mu_t \rangle_{d|t-1} \langle \mu_t \rangle_{d|t-1}^T \end{cases} \quad (18)$$

这样变分贝叶斯估计通过迭代的方式实现图像自适应滤波去噪。

## 3 实验结果与讨论

为了验证“变分贝叶斯估计图像滤波去噪算法”, 采用大量的真实模糊图像在 MATLAB 软件环境中进行实验, 并且与软件包中的 deconvblind 算法进行比较, 选用 Symlets 小波进行尺度分解。

表 1 不同算法去噪效果对比

不同算法	参数	噪声强度 $\sigma$ (信噪比)/dB		
		35	40	45
deconvblind 算法	均值	36.107	40.925	45.736
	中值	36.103	40.762	45.589
IFDA-VBE 算法	均值	36.815	41.035	46.081
	中值	36.502	40.817	45.813

表 1 是不同噪声强度 (信噪比) 的图像通过 deconvblind 算法和变分贝叶斯估计图像滤波去噪算法 (IFDA-VBE) 处理后统计的参数, 表中数据是信噪比, 单位是 dB, 去噪性能通过均值和中值比较。

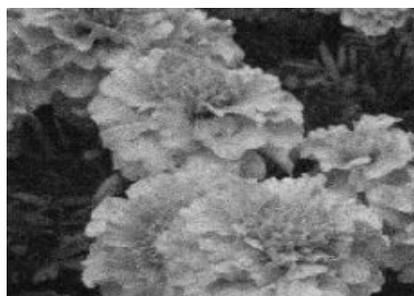


图 2 原始图像



图 3 处理后的图像

图 2 是真实模糊噪声图像, 图 3 是经过“变分贝叶斯估计图像滤波去噪算法”处理的图像。从实验结果获得的数据对比和图像整体视觉效果以及图像局部细节方面可以看出, “变分贝叶斯估计图像滤波去噪算法”根据图像和噪声的特点, 计算估计误差  $e(n)$  并利用此误差信号构造一个自适应算法的性能函数, 随着

数据输入的变化,自适应地更新性能函数,不断地更新调整滤波器的滤波参数,使得这个参数在最小化性能函数所使用的准则下最优,从而达到滤波效果。与其他算法比较后得出该算法比其他几种图像去噪方法更能提高去噪后图像的峰值信噪比,更好地保留了图像的细节特征,取得了较好的视觉效果,有良好的去噪效果。

#### 4 结束语

随着数字图像滤波在遥感、交通、医学成像和军事监察等方面的广泛应用,要求也将越来越高,很多去噪方面的新思想、新方法不断地充实图像去噪方法。而噪声的出现是随机的,一般无法获知其确切的强度、范围等;噪声的研究范围也在不断扩大,由高斯噪声到非高斯噪声,对于随机非高斯噪声,一般都是选择合适的模型先来描述其统计特征,而贝叶斯框架(包括最大后验概率估计、最大似然估计和贝叶斯估计)都是比较常用的随机性算法。因为贝叶斯框架可以提供各种概率预测,自动对模型参数进行估计,所以广泛应用于图像处理的各个领域。

该文主要是利用变分贝叶斯估计去噪算法对图像进行去噪处理。首先分析了图像滤波去噪的意义和研究现状;然后对贝叶斯估计图像滤波去噪的理论基础进行了研究,在贝叶斯估计理论的基础上,建立带有噪声的原始图像基于贝叶斯的概率模型,通过引入新的隐变量,给出过程噪声后验分布;在变分贝叶斯估计的框架下,定义贝叶斯估计图像滤波模型,推导、计算真实分布和近似分布之间的 Kullback-Leibler 距离,以迭代方式估计目标状态,提高状态估计精度,实现了图像滤波去噪;最后通过大量的真实模糊图像在 MATLAB 软件环境中进行实验,并且与软件包中的 deconvblind 算法进行比较,从实验结果获得的数据对比和图像整体视觉效果以及图像局部细节方面可以看出,“变分贝叶斯估计图像滤波去噪算法”能提高去噪后图像的峰值信噪比,更好地保留了图像的细节特征,取得了较好的视觉和去噪效果。

#### 参考文献:

- [1] MARCHANT R, HAAN S, CLANCEY G, et al. Applying machine learning to criminology: semi-parametric spatial-demographic Bayesian regression [J]. Security Informatics, 2018, 7(1):1.
- [2] 孙韶杰,吴琼,李国辉.基于变分贝叶斯估计的相机抖动模糊图像的盲复原算法[J].电子与信息学报,2010,32(11):2674-2679.
- [3] 徐玉凤.基于贝叶斯估计的低剂量CT图像去噪算法[D].河南:郑州大学,2016.
- [4] FOX C W, ROBERTS S J. A tutorial on variational Bayesian inference [J]. Artificial Intelligence Review, 2012, 38(2): 85-95.
- [5] MCLACHLAN G, KRISHNAN T. The EM algorithm and extensions [M]. [s. l.]: John Wiley & Sons, 2007: 276-277.
- [6] ZENG Xueqiang, LUO Gang. Progressive sampling-based Bayesian optimization for efficient and automatic machine learning model selection [J]. Health Information Science and Systems, 2017, 5(1):2.
- [7] WANG Xianghai, LIU Yingnan, ZHANG Hongwei, et al. A total variation model based on edge adaptive guiding function for remote sensing image de-noising [J]. International Journal of Applied Earth Observation and Geoinformation, 2015, 34:89-95.
- [8] 韦来生.贝叶斯统计[M].北京:高等教育出版社,2016.
- [9] 胡森森,敬忠良,董鹏,等.基于T分布变分贝叶斯滤波的SINS/GPS组合导航[J].浙江大学学报:工学版,2018, 52(8):1482-1488.
- [10] WANG Lichun, SINGH R S. Linear Bayes estimator for the two-parameter exponential family under type II censoring [J]. Computational Statistics and Data Analysis, 2014, 71: 633-642.
- [11] 刘英霞,王希常,唐晓丽,等.基于小波域特征和贝叶斯估计的目标检测算法[J].山东大学学报:工学版,2017, 47(2):63-70.
- [12] 许光宇,林玉娥,石文兵.基于局部结构张量的图像三边滤波器[J].计算机工程,2017,43(4):269-276.
- [13] 付自如.基于小波与小波包的维纳滤波去噪新算法[D].哈尔滨:哈尔滨理工大学,2018.
- [14] 孙婷婷,崔少华.基于峰度ICA和本征图像滤波的超高斯信号去噪方法[J].河北师范大学学报:自然科学版, 2020, 44(3):209-214.
- [15] 张玉荣.基于改进权重非局部均值图像滤波方法与实现[J].淮阴工学院学报,2017,26(3):1-5.
- [16] 杜慧,邓潇潇,李建,等.智能的图像滤波去噪算法[J].计算机工程与设计,2015(8):2180-2184.
- [17] 江敏.贝叶斯优化算法的若干问题研究及应用[D].上海:上海大学,2011.