

# 网络拥塞控制模型 Hopf 分岔的 PD 控制

侯 萍

(南京邮电大学 管理学院, 江苏 南京 210003)

**摘 要:**网络拥塞会导致信息丢失, 时延增加, 甚至系统崩溃。由于无线接入网络中的时变衰落和分组错误率, 使得 TCP 协议在网络拥塞控制更加复杂。TCP Westwood 是专门为高速无线网络设计的, 大大提高了网络带宽的利用率, 改善了网络性能。TCP Westwood/AQM 拥塞控制的连续流体流模型被引用, 源端采用 TCP Westwood 拥塞控制协议, 路由器端采用主动队列管理(AQM)机制中的随机早期检测(RED)算法。为了延迟无线接入网络拥塞控制模型中霍普夫(Hopf)分岔现象的发生, 采用比例微分(PD)控制器, 通过选择通信延迟作为分岔参数, 分析无线网络系统中的 Hopf 分岔行为, 并由理论分析得知当分岔参数超过临界值时系统发生 Hopf 分岔。利用中心流形和规范型理论, 推导出系统发生 Hopf 分岔的条件和反映 Hopf 分岔性质, 方向和周期的参数, 数值仿真验证理论分析的准确性, 表明 PD 控制器的有效性。

**关键词:**无线网络; 拥塞控制; TCP Westwood; Hopf 分岔; PD 控制器

**中图分类号:**TP393; TP273

**文献标识码:**A

**文章编号:**1673-629X(2021)03-0126-07

**doi:**10.3969/j.issn.1673-629X.2021.03.022

## Hopf Bifurcation in a Network Congestion Control Model Based on PD Controller

HOU Ping

(School of Management, Nanjing University of Posts and Telecommunications, Nanjing 210003, China)

**Abstract:** Network congestion may lead to information loss, delay increase, or even congestion collapse. Due to the time-varying fading and packet error rate in wireless access network, network congestion control is more complex with TCP protocol. TCP Westwood, which will increase bandwidth utilization and improve performance of network, is specially designed for high-speed wireless network. The continuous fluid flow model of TCP Westwood/AQM is applied in congestion control system. The source end adopts the TCP Westwood protocol, and the router end adopts the RED algorithm in the Active Queue Management (AQM) mechanism. In order to delay the onset of Hopf bifurcation, a proportional-derivative (PD) controller is used to a congestion control model of TCP Westwood/AQM. The Hopf bifurcation behavior is analyzed by choosing communication delay as the bifurcation parameter and a Hopf bifurcation occurs when the parameter passes through a critical value. The conditions of Hopf bifurcation and the parameters reflecting the nature, direction and period of Hopf bifurcation are derived by using the central popularity and normative theory. Numerical simulations verify the accuracy of theoretical analysis and show the effectiveness of the PD controller.

**Key words:** wireless network; congestion control; TCP Westwood; Hopf bifurcation; PD controller

### 0 引 言

网络服务质量是网络应用的重要保障。对网络系统的稳定性和动力学特性的研究具有现实意义<sup>[1-7]</sup>。网络拥塞控制算法的主要目的是维持系统的稳定性, 使信息流趋于特定的稳定值, 力求最大的链路容量利用率<sup>[8]</sup>。一般来说, 系统稳定性的丧失随之而来的是阻碍通信发展和链路容量的浪费, 其中分岔行为可能引起振荡, 诱发网络不稳定, 所以需要控制分岔。文献[9]讨论了一种利用状态反馈控制器对网络拥塞控制

系统的流体流模型进行 Hopf 分岔控制的问题。在状态反馈控制下, Hopf 分岔的发生被成功地延迟, 从而使稳定域得以扩展, 通过调整控制器的线性部分和非线性部分的参数来确定分岔周期解的性质。文献[10]研究了由非线性延迟微分方程控制的无线接入网络的 Hopf 分岔分析, 如果延迟超过临界值, 闭环系统将不会保持稳定, 并且发生 Hopf 分岔, 应用积分滑模控制作为非线性鲁棒主动队列管理控制器来阻止网络拥塞。文献[11]为了控制不理想的 Hopf 分岔, 提

收稿日期: 2020-04-14

修回日期: 2020-08-18

基金项目: 国家重点研发计划(2017YFD0401005); 江苏省高校自然科学研究面上项目(18KJB520038)

作者简介: 侯 萍(1977-), 女, 博士, 副教授, 研究方向为网络拥塞控制。

出了一种混合控制策略,通过线性稳定性分析,表明适当调整混合控制策略的控制参数,可以在不改变系统平衡点的情况下延迟甚至完全消除 Hopf 分岔。文献[12]提出了一种具有参数时滞的反馈控制方法,用于控制时滞分数阶双拥塞模型的分岔控制。利用参数时滞反馈控制器可以大大提高系统的稳定性,但在没有控制器的情况下, Hopf 分岔会提前产生。

该文针对用于无线网络拥塞控制算法设计的 TCP Westwood/AQM 流体流模型进行稳定性和 Hopf 分岔分析,应用中心流形和规范型理论确定 Hopf 分岔周期解的方向和稳定性,并应用 PD 控制器控制 Hopf 分岔,最后给出数值实例及仿真证明算法的有效性。

## 1 TCP Westwood/AQM 拥塞控制系统的 Hopf 分岔

通常在通信网络的传输层中实现的传输控制协议(TCP)可以检测其发生后的拥塞。但是,由于时变衰落和分组错误率,在具有无线接入链路的网络中,拥塞控制可能更加有挑战。

TCP Westwood 是专门为高速无线网络设计的,完全符合高速无线网络的特点,大大提高了网络带宽的利用率,改善了网络性能。同时使用健壮的主动队列管理来防止拥塞,并对无线环境的严重干扰具有一定的容忍度。

文献[13-14]提出了源端采用 TCP Westwood 拥塞控制协议,路由器端采用随机早期检测算法(RED)的网络系统的流体流模型,在这里假设网络中仅有一条单链路,并且所有的 TCP 连接都遵循 TCP Westwood 拥塞控制协议。为控制 Hopf 分岔来实现一些预期的动力学行为,引入带有一个输入  $e(t)$  和一个输出  $u(t)$  的 PD 控制器,表示如下:

$$u = k_p e(t) + k_d \frac{d}{dt} e(t) \quad (1)$$

其中,输出偏差信号定义为  $e(t) = p(t) - p^*$ ,  $k_p$ ,  $k_d$  分别为比例控制参数和微分控制参数。

因此,带有通信时延的受控拥塞控制模型<sup>[15]</sup>如下:

$$\begin{cases} \dot{W}(t) = \frac{1}{R} - \frac{(R - T_p) W^2(t)}{R^2} K q(t - R) + \\ k_p (W(t) - W_0) + k_d \frac{d}{dt} (W(t) - W_0) \\ \dot{q}(t) = \frac{N}{R} W(t) - C \end{cases} \quad (2)$$

则系统平衡点  $(W_0, q_0)$  为:  $W_0 = \frac{RC}{N}$ ,  $q_0 =$

$\frac{N^2}{(R - T_p) RC^2 K}$ 。这里  $W$  是平均 TCP 窗口大小(分组),  $q$  是平均队列长度(分组),  $T_p$  是传输时延(秒),  $R$  是往返时间,由队列时延和传输时延两部分组成,即  $R(t) = \frac{q(t)}{C} + T_p$  (秒),  $C$  是链路容量(分组/每秒),  $N$  是负荷系数,即 TCPW 会话的数目,  $P$  是分组标记概率。第一个方程描述的是 TCP 拥塞窗口控制的动态变化情况,第二个方程把瓶颈队列长度建模为分组到达速率和链路容量的累计差。队列长度和拥塞窗口大小都为有界的正值,即  $q \in [0, \bar{q}]$ ,  $W \in [0, \bar{W}]$ , 这里的  $\bar{q}$  和  $\bar{W}$  分别表示缓冲队列容量和最大的窗口值。当队列时延远远小于传输时延时,可以认为  $R(t) = R$ , 即  $R$  是常数<sup>[16]</sup>。文献[15]提出,分组标记概率  $P(t)$  和队列长度成正比,即  $P(t) = K * q(t)$ 。

系统式(2)在平衡点处线性化,得到:

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = \frac{-\frac{2N}{R^2 C} + k_p}{1 - k_d} y_1(t) - \frac{K(R - T_p) C^2}{N^2(1 - k_d)} y_2(t - R) \\ \dot{y}_2(t) = \frac{N}{R} y_1(t) \end{cases} \quad (3)$$

其中,  $y_1(t) = W(t) - W_0$ ,  $y_2(t) = q(t) - q_0$ 。

式(3)的特征方程为:

$$\lambda^2 + m\lambda + ne^{-\lambda R} = 0 \quad (4)$$

其中,  $m = \frac{2N}{R^2 C} - k_p > 0$ ,  $n = \frac{KC^2(R - T_p)}{N^2(1 - k_d)} > 0$ 。

令特征根  $\lambda = \pm i\omega_0$ , 其中  $\omega_0 > 0$ , 代入特征方程式(4), 虚部实部分开, 则有:

$$\begin{cases} \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{m^4 + 4n^2} - m^2)} \\ R_0 = \frac{1}{\omega_0} \arctan\left(\frac{m}{\omega_0}\right) \end{cases} \quad (5)$$

从中可以看出  $\omega_0 R_0 < \pi/2$ 。

引理1: 当往返时间  $R = R_0$  时, 特征方程式(4)有唯一一对纯虚根  $\lambda = \pm i\omega_0$ , 且  $\omega_0 R_0 < \pi/2$ 。

引理2<sup>[17]</sup>: 对于特征方程式(4), 如果令  $M(R) = \{\lambda: \text{Re}(\lambda) \geq 0, Q(\lambda, R) = 0\}$ , 该式表示使得特征方程  $Q(\lambda, R) = 0$  具有非负实部的特征根的个数, 设  $R_2 > R_1 \geq 0$ , 如果对于任意的往返时间  $R \in [R_1, R_2]$ , 特征方程在虚轴上没有解, 则  $M(R_1) = M(R_2)$ 。

引理3: 当  $R < R_0$ , 特征方程式(4)的所有根都有负实部。

证明: 当  $R = 0$  时, 特征方程为  $Q(\lambda, 0) = \lambda^2 + m\lambda + n = 0$ 。又因为  $m > 0$ ,  $n > 0$ , 所以  $Q(\lambda, 0) = 0$  的特征根都有负实部, 得到  $M(0) = 0$ 。从上面的分析得到当

往返时间  $R < R_0$  时, 方程(4)在虚轴上没有解, 根据引理 2, 有  $M(R_0) = M(0) = 0$ , 因此当往返时间  $R < R_0$  时, 方程(4)的所有根都有负实部。

引理 4: 当往返时间  $R = R_0$ , 特征方程式(4)除了有一对纯虚根是  $\pm i\omega_0$  外, 其他的根都具有严格的负实部。

引理 5: 设  $\lambda(R) = m(R) + i\omega(R)$  是特征方程式(4)的根, 且满足  $\alpha(R_0) = 0$ ,  $\omega(R_0) = \omega_0$ , 则  $\left. \frac{d\operatorname{Re}(\lambda(R))}{dt} \right|_{R=R_0} > 0$ 。

引理 6: 当往返时间  $R = R_0$ , 特征方程式(4)至少有一个根具有严格正实部。

基于上述引理分析特征方程的特征根的分布区域, 应用文献[18]中的有限时滞微分方程的 Hopf 分岔定理得到具有 PD 控制器的拥塞控制系统式(2)的分岔定理, 如下所示:

定理 1: 对于带有通信时延的添加 PD 控制器的拥塞控制模型式(2)有如下结论:

(1) 当往返时间  $R < R_0$ , 拥塞控制系统式(2)在平衡点  $(W_0, q_0)$  局部渐近稳定;

(2) 当往返时间  $R > R_0$ , 拥塞控制系统式(2)在平衡点  $(W_0, q_0)$  不稳定;

(3) 当往返时间  $R = R_0$ , 拥塞控制系统式(2)在平衡点  $(W_0, q_0)$  产生 Hopf 分岔, 出现周期解。

## 2 Hopf 分岔的方向和 Hopf 分岔周期解稳定性

对已线性化的式(3)在平衡点进行泰勒展开, 结果如下:

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = m_{11}y_1(t) + m_{12}y_2(t-R) + m_{13}y_1^2(t) + \\ \quad m_{14}y_1(t)y_2(t-R) + m_{15}y_1^2(t)y_2(t-R) \\ \dot{y}_2(t) = m_{21}y_1(t) \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} m_{11} &= \frac{-\frac{2N}{R^2C} + k_p}{1 - k_d}, \quad m_{12} = \frac{-KC^2(R - T_p)}{N^2(1 - k_d)} \\ m_{13} &= \frac{-N^2}{R^3C^2(1 - k_d)}, \quad m_{14} = -\frac{2(R - T_p)CK}{RN(1 - k_d)} \\ m_{15} &= -\frac{(R - T_p)K}{R^2(1 - k_d)}, \quad m_{21} = \frac{N}{R} \end{aligned}$$

设  $R = R_0 + v$ ,  $u(t) = (y_1(t), y_2(t))^T$ ,  $u_t(\theta) = u(t + \theta)$ ,  $\theta \in [-R, 0]$ ,  $C^k[-R, 0]$ , 初始条件  $\varphi(\theta) = (\varphi_1(\theta), \varphi_2(\theta))^T \in C[-R, 0]$ , 则式(6)表述如下:

$$\dot{u}(t) = L_v u + F(u_t, v) \quad (7)$$

$$L_v \varphi = G_1 \varphi(0) + G_2 \varphi(-R) \quad (8)$$

$$F(\varphi, v) =$$

$$\begin{pmatrix} m_{13}\varphi_1(t) + m_{14}\varphi_1(t)\varphi_2(t-R) + m_{15}\varphi_1^2(t)\varphi_2(t-R) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$G_1 = \begin{pmatrix} m_{11} & 0 \\ m_{21} & 0 \end{pmatrix}, \quad G_2 = \begin{pmatrix} 0 & m_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

将式(7)转换为下述形式:

$$\dot{u}_t = A(v)u_t + Qu_t \quad (10)$$

式(10)可以表示为  $\dot{u}_t = L_v u$ 。根据 Reisz 表示定理可知, 存在一个  $2 \times 2$  矩阵值函数  $\eta(\cdot, v): [-R, 0] \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$ 。对于所有的  $\varphi(\theta) \in C[-R, 0]$ ,  $L_v \varphi = \int_{-R}^0 d\eta(\theta, v)\varphi(\theta)$ ,  $\eta(\theta, v) = G_1\delta(\theta) + G_2\delta(\theta + R)$ ,  $\delta(\cdot)$  是 Dirac delta 函数。

对于  $\varphi(\theta) \in C[-R, 0]$ , 令:

$$A(v)\varphi = \begin{cases} \frac{d\varphi}{d\theta}, \theta \in [-R, 0] \\ \int_{-R}^0 d\eta(\theta, v)\varphi(\theta) = L_v \varphi, \theta = 0 \end{cases} \quad (11)$$

$$Q(v)\varphi = \begin{cases} 0, \theta \in [-R, 0] \\ F(\varphi, v), \theta = 0 \end{cases} \quad (12)$$

令  $q(\theta)$  是  $A(0)$  对应于  $\lambda(0)$  的特征函数, 即  $A(0)q(\theta) = i\omega_0 q(\theta)$ 。

对于  $\psi \in C[0, R]$ , 定义伴随算子为  $A^*(0)$ :

$$A^*(0)\psi = \begin{cases} -\frac{d\psi}{ds}, s \in (0, R] \\ \int_{-R}^0 d\eta^T(t, 0)\psi(-t) = L_v^* \psi, s = 0 \end{cases}$$

$A(0)$  简写为  $A$ ,  $A^*(0)$  简写为  $A^*$ ,  $\eta(\theta, 0)$  简写为  $\eta(\theta)$ , 所以  $Aq(\theta) = \lambda(0)q(\theta)$ 。 $\bar{\lambda}(0)$  是  $A^*$  的一个特征值,  $A^*q^*(\theta) = -i\omega_0 q^*(\theta)$ 。对于  $\varphi(\theta) \in C[-R, 0]$  和  $\psi \in C[0, R]$ , 定义一个内积:

$$\langle \psi, \varphi \rangle = \bar{\psi}^T(0) \cdot \varphi(0) - \int_{\theta=-R}^0 \int_{\xi=0}^{\theta} \bar{\psi}^T(\xi - \theta) [d\eta(\theta)] \varphi(\xi) d\xi$$

$\langle \psi, A\varphi \rangle = \langle A\psi, \varphi \rangle$ , 对于  $\varphi = \operatorname{Dom}(A)$ ,  $\psi = \operatorname{Dom}(A^*)$ 。

则有如下引理:

引理 7<sup>[19]</sup>: 令  $q(\theta) = Ve^{i\omega_0\theta}$  是  $A$  对应于  $i\omega_0$  的特征向量,  $q^*(\theta) = DV^*e^{i\omega_0\theta}$  是  $A^*$  对应于  $-i\omega_0$  的特征向量, 则  $\langle q^*, q \rangle = 1$ ,  $\langle q^*, \bar{q} \rangle = 0$ , 其中  $V = (1, \rho_1)^T$ ,  $\rho_1 = \frac{m_{21}}{i\omega_0}$ ,  $V^* = (\rho_2, 1)^T$ ,  $\rho_2 = -\frac{m_{21}}{m_{11} + i\omega_0}$ ,  $\bar{D} = [V^{*T}V - R_0e^{-i\omega_0R_0}\bar{V}^{*T}B_2V]^{-1}$ 。

下面计算  $v = 0$  时中心流形  $C_0$  的坐标,该文采用同文献[20] Hassard 同样的表示。对于  $u_i$  当  $v = 0$  时,式(10)的解定义为:

$$j(t) = \langle q, u_i \rangle \quad (13)$$

$$W(t, \theta) = u_i - jq + jq = u_i = 2\text{Re}\{j(t)q(\theta)\} \quad (14)$$

在中心流形  $C_0$  上,  $W(t, \theta) = W(j(t), \bar{j}(t), \theta)$ , 其中:

$$W(j(t), \bar{j}(t), \theta) = W_{20}(\theta) \frac{j^2}{2} + W_{11}(\theta) j^* \bar{j} + W_{02}(\theta) \frac{\bar{j}^2}{2} + \dots \quad (15)$$

在向量空间  $C$  中,  $J$  和  $\bar{J}$  是中心流形  $C_0$  在方向  $q$  和  $\bar{q}^*$  的局部坐标,当  $u_i$  是实数时  $W$  也是实数,只处理实数解。从式(14)得:

$$\begin{aligned} \langle q^*, W \rangle &= \langle q^*, u_i - jq - \bar{j}q \rangle = \\ &= \langle q^*, u_i \rangle - j(t) \langle q^*, q \rangle - \bar{j}(t) \langle q^*, \bar{q} \rangle = 0 \end{aligned}$$

对于式(10)的解  $u_i \in C_0$ ,根据式(11)~式(13),由于  $v = 0$  得:

$$\begin{aligned} \dot{j}(t) &= \langle q^*, \dot{u}_i \rangle = \langle q^*, Au_i + Qu_i \rangle = \\ &= \langle A^* q^*, u_i \rangle + \overline{q^{*T}(0)} F(u_i, 0) = \\ &= i\omega_0 j(t) + \overline{q^{*T}(0)} f_0(j, \bar{j}) \end{aligned} \quad (16)$$

$$\dot{j}(t) = i\omega_0 j(t) + g(j, \bar{j}) \quad (17)$$

$$\begin{aligned} g(j, \bar{j}) &= \overline{q^{*T}(0)} f_0(j, \bar{j}) = \\ &= \overline{q^{*T}(0)} F(W(j, \bar{j}, \theta) + 2\text{Re}\{j(t)q(\theta)\}, \\ &0) = g_{20} \frac{j^2}{2} + g_{11} j^* \bar{j} + g_{02} \frac{\bar{j}^2}{2} + g_{21} \frac{j^2 \bar{j}}{2} + \\ &\dots \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \dot{W} &= \dot{u}_i - \dot{j}q - \dot{\bar{j}}\bar{q}, \text{从式(10),式(17)得:} \\ \dot{W} &= \end{aligned}$$

$$\begin{cases} AW - 2\text{Re}\{\overline{q^{*T}(0)} f_0(j, \bar{j}) q\} & \theta \in [-R, 0) \\ AW - 2\text{Re}\{\overline{q^{*T}(0)} f_0(j, \bar{j}) q + f_0(j, \bar{j})\}, & \theta \in [-R, 0) \end{cases} \quad (19)$$

$$\dot{W} = AW + H(j, \bar{j}, \theta) \quad (20)$$

$$\begin{aligned} H(j, \bar{j}, \theta) &= H_{20}(\theta) \frac{j^2}{2} + H_{11}(\theta) j^* \bar{j} + \\ &H_{02}(\theta) \frac{\bar{j}^2}{2} + \dots \end{aligned} \quad (21)$$

在  $C_0$  上,

$$\dot{W} = W_j \dot{j} + W_{\bar{j}} \dot{\bar{j}} \quad (22)$$

将式(15)、式(17)代入式(22)得:

$$\dot{W} = i\omega_0 W_{20}(\theta) \frac{j^2}{2} - i\omega_0 W_{02}(\theta) \frac{\bar{j}^2}{2} + \dots \quad (23)$$

对照式(21)、式(23)系数,得:

$$\begin{cases} (A - i2\omega_0) W_{20}(\theta) = -H_{20}(\theta) \\ W_{11}(\theta) = -H_{11}(\theta) \\ (A + i2\omega_0) W_{02}(\theta) = -H_{02}(\theta) \end{cases} \quad (24)$$

又  $u_i = u(t + \theta) = W(j, \bar{j}, \theta) + jq + \bar{j}q$ , 则:

$$\begin{aligned} u_i &= \begin{pmatrix} y_1(t + \theta) \\ y_2(t + \theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W^{(1)}(j, \bar{j}, \theta) \\ W^{(2)}(j, \bar{j}, \theta) \end{pmatrix} + j \begin{pmatrix} 1 \\ \rho_1 \end{pmatrix} e^{i\omega_0 \theta} + \\ &\bar{j} \begin{pmatrix} 1 \\ \rho_1 \end{pmatrix} e^{-i\omega_0 \theta} \end{aligned}$$

因此,得到:

$$\begin{aligned} y_1(t + \theta) &= W^{(1)}(j, \bar{j}, \theta) + j e^{i\omega_0 \theta} + \bar{j} e^{-i\omega_0 \theta} = \\ &j e^{i\omega_0 \theta} + \bar{j} e^{-i\omega_0 \theta} + W_{20}^{(1)}(\theta) \frac{j^2}{2} + \\ &W_{11}^{(1)}(\theta) j^* \bar{j} + W_{02}^{(1)}(\theta) \frac{\bar{j}^2}{2} + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_2(t + \theta) &= W^{(2)}(j, \bar{j}, \theta) + j \rho_1 e^{i\omega_0 \theta} + \bar{j} \rho_1 e^{-i\omega_0 \theta} = \\ &j \rho_1 e^{i\omega_0 \theta} + \bar{j} \rho_1 e^{-i\omega_0 \theta} + W_{20}^{(2)}(\theta) \frac{j^2}{2} + \\ &W_{11}^{(2)}(\theta) j^* \bar{j} + W_{02}^{(2)}(\theta) \frac{\bar{j}^2}{2} + \dots \end{aligned}$$

很明显,

$$\begin{aligned} \varphi_1(0) &= j + \bar{j} + W_{20}^{(1)}(0) \frac{j^2}{2} + W_{11}^{(1)}(0) j^* \bar{j} + W_{02}^{(1)}(0) \frac{\bar{j}^2}{2} + \dots \\ \varphi_1^2(0) &= j^2 + 2j^* \bar{j} + \bar{j}^2 + [W_{20}^{(1)}(0) + 2W_{11}^{(1)}(0)] \\ &j^2 \bar{j} + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_2(-R_0) &= j \rho_1 e^{-i\omega_0 R_0} + \bar{j} \rho_1 e^{i\omega_0 R_0} + W_{20}^{(2)}(-R_0) \frac{j^2}{2} + \\ &W_{11}^{(2)}(-R_0) j^* \bar{j} + W_{02}^{(2)}(-R_0) \frac{\bar{j}^2}{2} + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_1(0) \varphi_2(-R_0) &= \rho_1 e^{-i\omega_0 R_0} j^2 + \overline{\rho_1 e^{-i\omega_0 R_0}} + \\ &\rho_1 e^{-i\omega_0 R_0} j^* \bar{j} + \overline{\rho_1 e^{-i\omega_0 R_0}} \bar{j}^2 + \\ &[\frac{1}{2} W_{20}^{(2)}(-R_0) + W_{11}^{(2)}(-R_0) + \\ &\frac{1}{2} W_{20}^{(1)}(0) \overline{\rho_1 e^{-i\omega_0 R_0}} + \\ &W_{11}^{(1)}(0) \rho_1 e^{-i\omega_0 R_0}] j^2 \bar{j} \end{aligned}$$

$$\varphi_1^2(0) \varphi_2(-R_0) = (\overline{\rho_1 e^{-i\omega_0 R_0}} + 2\rho_1 e^{-i\omega_0 R_0}) j^2 \bar{j}$$

$$f_0(j, \bar{j}) =$$

$$\begin{pmatrix} m_{13}\varphi_1^2(0) + m_{14}\varphi_1(0)\varphi_2(-R_0) + m_{15}\varphi_1^2(0)\varphi_2(-R_0) \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} K_1\bar{j}^2 + K_2\bar{j}^* \bar{j} + K_3\bar{j}^2 + K_4\bar{j}^2 \bar{j} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$K_1 = m_{13} + m_{14}\rho_1 e^{-i\omega_0 R_0}$$

$$K_2 = 2m_{13} + m_{14}(\bar{\rho}_1 e^{i\omega_0 R_0} + \rho_1 e^{-i\omega_0 R_0})$$

$$K_3 = m_{13} + m_{14}\bar{\rho}_1 e^{i\omega_0 R_0}$$

$$K_4 = m_{13}[2W_{11}^{(1)}(0) + W_{20}^{(1)}(0)] + m_{14}[W_{11}^{(2)}(-R_0) + \frac{1}{2}W_{20}^{(1)}(0)\bar{\rho}_1 e^{i\omega_0 R_0} + W_{11}^{(1)}(0)\rho_1 e^{-i\omega_0 R_0}] +$$

$$m_{15}[\bar{\rho}_1 e^{i\omega_0 R_0} + 2\rho_1 e^{-i\omega_0 R_0}]$$

因为  $\bar{q}^*(0) = \bar{D}(\bar{\rho}_2, 1)^T$ , 得:

$$g(j, \bar{j}) = \bar{q}^{*T}(0)f_0(j, \bar{j}) =$$

$$\bar{D}(\bar{\rho}_2, 1)^T \begin{pmatrix} K_1\bar{j}^2 + K_2\bar{j}^* \bar{j} + K_3\bar{j}^2 + K_4\bar{j}^2 \bar{j} \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$\bar{D}\bar{\rho}_2(K_1\bar{j}^2 + K_2\bar{j}^* \bar{j} + K_3\bar{j}^2 + K_4\bar{j}^2 \bar{j})$$

与式(18)比较系数:

$$\begin{cases} g_{20} = 2\bar{D}\bar{\rho}_2 K_1 \\ g_{11} = \bar{D}\bar{\rho}_2 K_2 \\ g_{02} = 2\bar{D}\bar{\rho}_2 K_3 \\ g_{21} = 2\bar{D}\bar{\rho}_2 K_4 \end{cases}$$

为了得到式中的  $g_{21}$ , 还需要计算出  $W_{11}(\theta)$  和  $W_{20}(\theta)$  的值, 其中  $\theta \in [-R, 0)$ 。根据前面已经得到的式(19), (20), 对于  $\theta \in [-R, 0)$  有:

$$\begin{aligned} H(j, \bar{j}, \theta) &= -2\text{Re}\{\bar{q}^{*T}(0)f_0(j, \bar{j})q(\theta)\} = \\ &= -2\text{Re}\{g(j, \bar{j})q(\theta)\} = \\ &= -(g_{20}\frac{\bar{j}^2}{2} + g_{11}\bar{j}^* \bar{j} + g_{02}\frac{\bar{j}^2}{2} + g_{21}\frac{\bar{j}^2 \bar{j}}{2} + \\ &\quad \dots)q(\theta) - (g_{20}\frac{j^2}{2} + g_{11}j^* j + g_{02}\frac{j^2}{2} + \\ &\quad g_{21}\frac{j^2 j}{2} + \dots)\bar{q}(\theta) \end{aligned}$$

上式跟式(18)比较系数, 得:

$$\begin{cases} H_{20}(\theta) = -g_{20}q(\theta) - \bar{g}_{02}\bar{q}(\theta) \\ H_{21}(\theta) = -g_{11}q(\theta) - \bar{g}_{11}\bar{q}(\theta) \end{cases}$$

根据式(24)得:

$$W_{20}(\theta) = i2\omega_0 W_{20}(\theta) - H_{20}(\theta) = i2\omega_0 W_{20}(\theta) + g_{20}q(0)e^{i\omega_0 \theta} + \bar{g}_{02}\bar{q}(0)e^{-i\omega_0 \theta}$$

解方程得:

$$W_{20}(\theta) = \frac{ig_{20}}{\omega_0}q(0)e^{i\omega_0 \theta} + \frac{i\bar{g}_{02}}{3\omega_0}\bar{q}(0)e^{-i\omega_0 \theta} + E_1 e^{i2\omega_0 \theta}$$

同理得:

$$W_{11}(\theta) = -\frac{ig_{11}}{\omega_0}q(0)e^{i\omega_0 \theta} + \frac{i\bar{g}_{11}}{\omega_0}\bar{q}(0)e^{-i\omega_0 \theta} + E_2$$

令  $E_1 = (E_1^{(1)}, E_1^{(2)})^T$ ,  $E_2 = (E_2^{(1)}, E_2^{(2)})^T$ , 解得:

$$\begin{cases} E_1^{(1)} = \frac{i2\omega_0 K_1}{4\omega_0^2 + i2\omega_0 m_{11} + m_{12}m_{21}e^{-i2\omega_0 R_0}} \\ E_1^{(2)} = \frac{m_{21}}{i2\omega_0}E_1^{(1)} \\ E_2^{(1)} = 0 \\ E_2^{(2)} = -\frac{K_2}{m_{12}} \end{cases}$$

根据文献[13], 最后得到:

$$\begin{cases} C_1(0) = \frac{i}{2\omega_0}(g_{20}g_{11} - 2|g_{11}|^2 - \frac{1}{3}|g_{02}|^2 + \frac{g_{21}}{2}) \\ v_2 = -\frac{R_e\{C_1(0)\}}{R_e\lambda(0)} \\ T_2 = -\frac{\text{Im}\{C_1(0)\} + v_2 \text{Im}\lambda'(0)}{\omega_0} \\ \beta_2 = 2R_e\{C_1(0)\} \end{cases} \quad (25)$$

利用前面得到的公式, 给出下面的定理:

定理 2: 对于具有 PD 控制器的拥塞控制系统式(2), 当  $R = R_0$  时, Hopf 分岔的方向和周期解的稳定性由式(25)和下述结果决定:

(1) Hopf 分岔方向由  $v_2$  决定。如果  $v_2 > 0$ , 则 Hopf 分岔是超临界的, 当  $R > R_0$  时系统有周期解。如果  $v_2 < 0$ , 则 Hopf 分岔是亚临界的, 当  $R < R_0$  时系统有周期解。

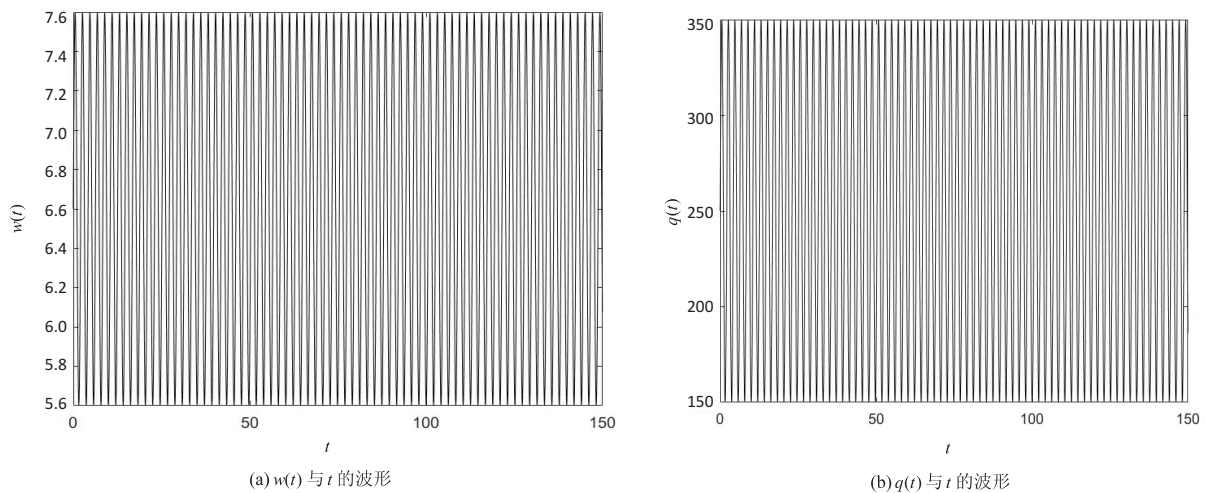
(2) Hopf 分岔周期解的稳定性由  $\beta_2$  决定。如果  $\beta_2 < 0$ , 则系统周期解的轨迹是稳定的; 如果  $\beta_2 > 0$ , 则系统周期解的轨迹是不稳定的。

(3) 系统 Hopf 分岔周期解的周期由  $T_2$  决定。如果  $T_2 > 0$ , 则周期解是增加的; 如果  $T_2 < 0$ , 则系统周期解减少。

### 3 数值仿真

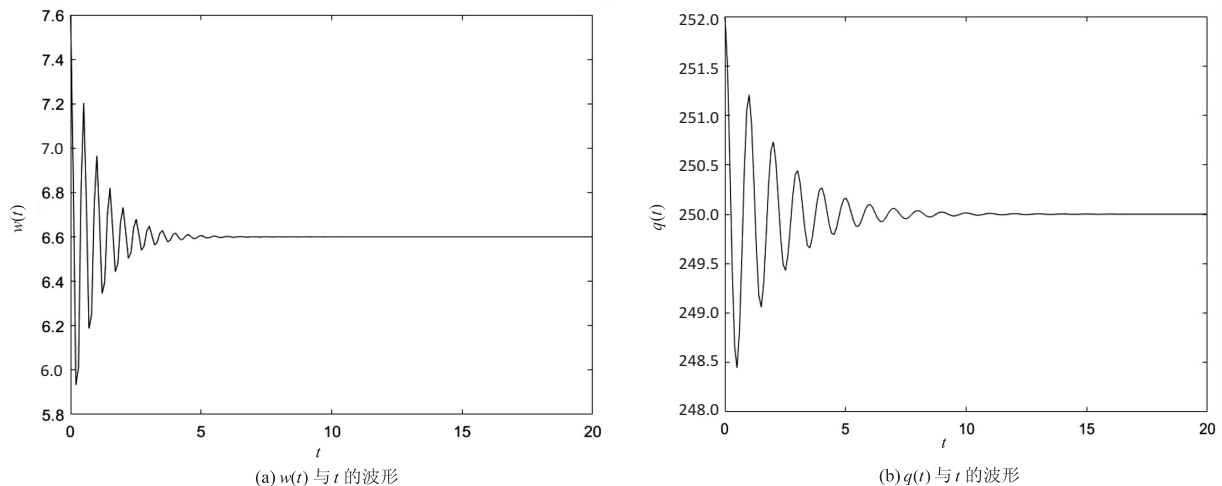
选取与文献[14, 21]中相同的参数, 即  $N = 50$ ,  $K = 0.001$ ,  $C = 1000$ ,  $T_p = 0.3$ 。当  $R = 0.344$  时,  $R_0 = 0.343 < R$  原始系统处于超临界状态 ( $v_2 = 0.0096 > 0$ ), 分岔周期解是稳定的 ( $\beta_2 = -0.0115 < 0$ ), 分岔周期解的周期是逐渐减小的 ( $T_2 = -0.0791 < 0$ )。如图 1 所示, 在没有加入 PD 控制器的情况下, 原系统已经失去稳定性, 发生 Hopf 分岔。



图1  $R = 0.344$  时无控系统的波形

为了推迟 Hopf 分岔的发生,加入 PD 控制器,设置比例和微分参数展示控制效果。当  $R = 0.344$ ,  $k_p =$

$-0.5$ ,  $k_d = -0.5$ , 仿真图 2 表明系统出现周期解,是稳定的。

图2  $R = 0.344$ ,  $k_p = -0.5$ ,  $k_d = -0.5$  时 PD 控制系统的波形

#### 4 结束语

为了弥补 TCP 协议在无线接入链路网络的局限性,引入应用于高速无线网络,完全符合高速无线网络特点的 TCP Westwood 协议的一种网络拥塞控制系统模型,即 TCP Westwood/AQM 网络的连续流体流模型,通过选择通信延迟作为分岔参数,分析无线网络系统中的 Hopf 分岔行为,当通信时延超过临界值时,系统会产生 Hopf 分岔现象。为了延迟 Hopf 的发生,引入 PD 控制器,利用中心流形定理和规范型理论,推导得出系统发生 Hopf 分岔的条件和反映 Hopf 分岔性质,方向和周期的参数数值, MATLAB 仿真证明 PD 控制器能有效控制分岔,验证了理论分析的正确性。

#### 参考文献:

- [1] GUO S, ZHENG H, LIU Q. Hopf bifurcation analysis for congestion control with heterogeneous delays[J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2010, 11(4): 3077-3090.
- [2] CICCIO L D, MASCOLO S, NICULESCU S I. Robust stability analysis of Smith predictor-based congestion control algorithms for computer networks[J]. Automatica, 2011, 47(8): 1685-1692.
- [3] XIAO M, ZHENG W X, CAO J. Bifurcation control of a congestion control model via state feedback[J]. International Journal of Bifurcation & Chaos, 2013, 23(6): 1330018.
- [4] 徐超, 周云龙, 王洋. 无线网络流体流模型的 Hopf 分岔的控制[J]. 上海交通大学学报, 2014, 48(10): 1479-1484.
- [5] ZHANG S, XU J, CHUNG K. On the stability and multi-stability of a TCP/RED congestion control model with state-dependent delay and discontinuous marking function[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2015, 22(1-3): 269-284.
- [6] CAO Y. Bifurcations in an Internet congestion control system with distributed delay[J]. Applied Mathematics and Computation, 2019, 347: 54-63.
- [7] AMIGÓ J M, DURAN G, GIMÉNEZ A, et al. Generalized

- TCP-RED dynamical model for Internet congestion control [J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2020, 82: 105075.
- [8] 丁大为, 王 纯, 孔娜娜. 无线网络模型中 Hopf 分岔的 PD 控制[J]. *电子测量与仪器学报*, 2015, 29(11): 1683-1690.
- [9] XU W, HAYAT T, CAO J, et al. Hopf bifurcation control for a fluid flow model of internet congestion control systems via state feedback[J]. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 2018, 33(1): 69-93.
- [10] KHOSHNEVISAN L, LIU X, SALMASI F R. Stability and Hopf bifurcation analysis of a TCP/RAQM network with ISMC procedure[J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2019, 118: 255-273.
- [11] DING D, QIN X, WU T, et al. Hopf bifurcation control of congestion control model in a wireless access network[J]. *Neurocomputing*, 2014, 144(11): 159-168.
- [12] HUANG C, LI T, CAI L, et al. Novel design for bifurcation control in a delayed fractional dual congestion model[J]. *Physics Letters A*, 2019, 383(5): 440-445.
- [13] MASCOLO S, CASETTI C, GERLA M, et al. TCP westwood: bandwidth estimation for enhanced transport over wireless links[C]//*Proceedings of the 7th annual international conference on mobile computing and networking*. Rome: ACM, 2001: 287-297.
- [14] 郭 繁. TCP Westwood 网络拥塞协议分析与控制研究[D]. 合肥: 安徽大学, 2015.
- [15] ALVAREZ T. Design of pid controllers for tcp/aqm wireless networks[C]//*Proceedings of the world congress on engineering*. London: WCE, 2012: 1-8.
- [16] HOLLOT C V, MISRA V, TOWSLEY D, et al. A control theoretic analysis of RED[C]//*Twentieth annual joint conference of the IEEE computer and communications societies proceedings*. Anchorage: IEEE, 2001: 1510-1519.
- [17] HOLLOT C V, CHAIT Y. Nonlinear stability analysis for a class of TCP/AQM networks[C]//*Proceedings of the 40th IEEE conference on decision and control*. Orlando: IEEE, 2001: 2309-2314.
- [18] COOKE K, GROSSMAN Z. Discrete delay, distributed delay and stability switches[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1982, 86(2): 592-627.
- [19] HALE J. *Theory of functional differential equations* [M]. Heidelberg, Berlin: Springer-Verlag, 1977.
- [20] HASSARD B D, KAZARINOFF N D, WAN Y H. *Theory and applications of Hopf bifurcation* [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1981.
- [21] DING D, ZHU J, LUO X. Hopf bifurcation analysis in a fluid flow model of Internet congestion control algorithm[J]. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2009, 10(2): 824-839.