

# 考虑群组传播的 SEIR 谣言传播模型

奚亚丽<sup>1</sup>, 王友国<sup>1</sup>, 柴允<sup>2</sup>

(1. 南京邮电大学理学院, 江苏南京 210023;

2. 南京邮电大学通信与信息工程学院, 江苏南京 210003)

**摘要:**近年来,移动互联网络技术的高速发展极大地改变了信息的传播方式。在移动社交网络中,人们根据共同爱好、亲友关系等往往聚合成特定的群组,如QQ群、微信群等,并在这些群组之间进行信息共享与交流。移动社交网络的特点在于所有用户都可以创建和管理社交群组并邀请朋友加入。因此,一个群组很容易变成一个人可能无法直接彼此认识的小团体,而人们通常会收到不同用户发布的谣言信息并将其转发给其他个人或团体。考虑到一些人可能因为不确定谣言的真实性,而不会立刻转发谣言。因此,在引入E态的谣言传播模型上建立了一种考虑群组传播影响的新型SEIR模型,研究了移动社交网络中考虑群组传播的谣言传播动力学变化过程,并进行了稳态分析给出模型的传播阈值。为了验证理论分析的正确性以及评估模型对相关参数的敏感性,计算给出了模型动力方程组的数值解,并在Watts-Strogatz(WS)小世界网络上进行了是否考虑群组传播的仿真对比实验。实验结果表明,群组传播极大地加快了谣言传播的进程;且平均群组度的增加,会导致传播速度和传播者峰值规模均有所增加;群组规模越大,谣言的影响范围越广。

**关键词:**群组传播;谣言传播模型;移动社交网络;SEIR;仿真分析

中图分类号:TP39

文献标识码:A

文章编号:1673-629X(2020)10-0154-07

doi:10.3969/j.issn.1673-629X.2020.10.028

## SEIR Rumor Propagation Model Based on Group Communication in Mobile Social Networks

XI Ya-li<sup>1</sup>, WANG You-guo<sup>1</sup>, CHAI Yun<sup>2</sup>

(1. School of Science, Nanjing University of Posts and Telecommunications, Nanjing 210023, China;

2. School of Communication and Information Engineering, Nanjing University of Posts and Telecommunications, Nanjing 210003, China)

**Abstract:** In recent years, the rapid development of mobile internet technology has greatly changed the way information transmission. In mobile social networks, people tend to aggregate into specific groups according to their common interests, relatives and friends, such as QQ group, WeChat groups, etc., and share information and communicate among these groups. A feature of mobile social networks is that all users can create and manage social groups and invite friends to join. Therefore, a group can easily become a small group that people may not be able to directly recognize each other, and people usually receive rumors from different users and forward them to other individuals or groups. Considering that some people may not forward the rumors immediately because they are uncertain about the authenticity of the rumors, theoretically introducing the SEIR model based on the E state, a new SEIR model based on the influence of group propagation is established. The dynamic change process of rumor propagation based on group propagation in mobile social networks is studied. The steady-state analysis is carried out to give the propagation threshold of the model. In order to verify the correctness of the theoretical analysis and to assess the sensitivity of the model to the relevant parameters, the numerical solution of the model is given and numerical simulations are performed on the Watts - Strogatz (WS) small world network. The results show that group communication has greatly accelerated the process of rumor communication. The increase in the average group degree will lead to an increase in the speed of propagation and the peak size of the communicator. The larger the group size, the wider the scope of influence of the rumors.

**Key words:** group communication; rumor propagation model; mobile social network; SEIR; simulation analysis

收稿日期:2019-12-11

修回日期:2020-04-14

基金项目:国家自然科学基金(61771256);江苏省“青蓝工程”基金(QL06212006)

作者简介:奚亚丽(1994-),女,硕士研究生,CCF会员(G2327G),研究方向为复杂网络中的信息传播理论;王友国,博士,教授,博导,研究方向为随机共振(SR)和复杂网络的理论研究。

## 0 引言

随着移动互联网技术的高速发展,诸如微信、Facebook、Twitter 等移动社交网络的普及已经极大地改变了信息的传播方式<sup>[1]</sup>。没有物理空间的限制,个人或组织之间的交互更加灵活多样,在网络社交工具的帮助下,大量的信息通过虚拟接触而不是面对面的方式传递,使得传播过程更加复杂<sup>[2]</sup>。在这种新型复杂社交网络中,人们根据共同爱好、亲友关系等往往聚合成特定的群组,并在群组之间进行信息分享与交流。因此,一个群组很容易变成一个人可能无法直接彼此认识的小团体。虽然一些群组成员可能不会直接与其他人联系,但所有成员都能看到发送给群组的每条消息(包括谣言消息)。作为一种社交习惯,社交网络中的用户可能会将收到的谣言转发给其他个人或群组<sup>[3-4]</sup>。

早期的经典谣言传播模型是 Dally 和 Kendal<sup>[5]</sup> 基于 SIR 传染病模型提出的。在这个模型中,人群被分为三部分:不知道谣言的人、听说过谣言并传播它的人、知道谣言但已经停止传播的人。许多研究者对经典的谣言传播模型进行了扩展,以深入了解谣言传播机制<sup>[6-7]</sup>,并且大量谣言传播的研究都是在经典的 SIR 模型的基础上进行的。Sahafizadeh 等人提出了一个新定义的 SIR 谣言传播模型,研究了移动社交网络中群组传播对谣言传播过程动力学的影响,并发现群组传播显著地提高了谣言的传播速度,并且使网络拓扑结构的影响变得并不显著<sup>[8]</sup>。

在现实社会生活中,由于个人的性格特点、教育背景、法律意识等因素,一些社交网络用户在知道谣言话题后不会立即传播谣言,他们将首先会成为潜伏态(exposed state)。考虑谣言内容的吸引力和模糊性导致的潜伏态群组的存在,Xia 等<sup>[9]</sup>提出了一个考虑四种状态的 SEIR 谣言传播模型,并进行了稳态分析来研究传播阈值和扩散规模大小。

受上述研究启发,该文采用 SEIR 传染病模型<sup>[10]</sup>,并在此模型基础上考虑了群组传播来研究均匀网络中的谣言传播动力学。引入了系统的动力学方程,并进行了稳态分析,研究谣言在均匀网络中的传播基本再生数。利用雅可比矩阵法<sup>[11]</sup>,通过计算雅可比矩阵的特征值来分析系统在均匀网络中的稳定性。通过仿真研究了谣言在不同群组传播率以及群组参数影响下,在 WS 小世界网络中谣言最终的作用范围。

## 1 考虑群组的新型 SEIR 模型

本节建立了一种考虑群组传播的新型 SEIR 谣言传播模型。社交网络被认为是具有  $N$  个标记节点和  $E$  条边的无向均匀图。假设图的平均度为  $k$ ,节点表示

移动社交网络中的单个用户,边表示用户之间或用户与所属群组之间的联系。假设时间是离散的,在每个时间步骤中,每个用户节点都处于以下四种状态之一:易感节点(Susceptible,简记为  $S$ )、潜伏节点(Exposure,简记为  $E$ )、传播节点(Infected,简记为  $I$ )和免疫节点(Removed,简记为  $R$ )。

每个用户节点都可以通过与自己相邻的其他节点或其自身所在群组传播谣言。该移动社交网络中的群组是由一组可以共享信息的用户构成,他们不一定是好友关系,也就是说他们可能没有直接的联系。假设当一个群组中的某个节点接收到一条谣言时,它将自动传播给这个组的所有节点。因此,社交网络中的两个非好友节点可以通过他们所在群组一起共享谣言消息。

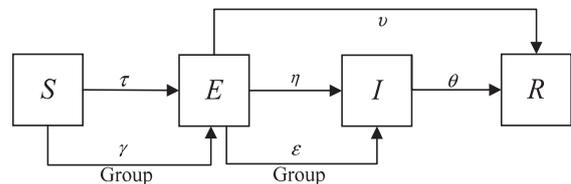


图 1 基于群组传播的新型 SEIR 模型的单个节点状态转移图

如图 1 所示,在均匀网络传播谣言的过程中,如果一个易感节点在个体间传播谣言过程中接收到谣言,则易感节点会以概率  $\tau$  成为潜伏节点,通过群组传播接触到谣言信息的易感节点会以概率  $\gamma$  成为潜伏节点。潜伏节点接受到谣言后,以概率  $\eta$  向其邻居节点传播该谣言,以概率  $\varepsilon$  向所在群组成员传播该谣言,若节点对该谣言不感兴趣,则潜伏节点以概率  $\nu$  变成免疫节点。当潜伏节点转变为传播节点后,节点则可能继续传播谣言,也可能以概率  $\theta$  直接转变为免疫者。

$S(t)$  表示未知节点在  $t$  时刻的数量,  $E(t)$  表示潜伏节点在  $t$  时刻的数量,  $I(t)$  表示传播节点在  $t$  时刻的数量,  $R(t)$  表示免疫节点在  $t$  时刻的数量;  $\beta = \varepsilon d$  表示通过群组使得潜伏者向传播者变化的群组传播率,  $\bar{d}$  是每个群组发送消息的平均速率。假设  $\lambda = \tau c$  ( $\bar{c}$  为每个个体节点间的联系概率的平均),在  $t$  时刻一个易感节点受传播节点感染的概率是  $\frac{S(t)}{N-1}$ 。

假设是在完全连接的社交网络中,在  $t+1$  时刻传播节点通过个体传播给易感节点,此时潜伏节点的数量为:

$$E(t+1) = E(t) + \lambda I(t) \frac{S(t)}{N-1} \quad (1)$$

而现实社交网络不可能是完全图,易感节点与潜伏节点的联系概率为  $P = \frac{\bar{K}}{N-1}$ ,则式(1)变为:

$$E(t+1) = E(t) + p\lambda I(t) \frac{S(t)}{N-1} = E(t) + \frac{\bar{K}}{N-1} \lambda I(t) \frac{S(t)}{N-1} \quad (2)$$

$$E(t+\Delta t) = E(t) + \frac{\bar{K}}{N-1} (\Delta t \lambda) I(t) \frac{S(t)}{N-1} \quad (3)$$

当  $\Delta t \rightarrow 0$  时,

$$\frac{dE(t)}{dt} = \frac{\bar{K}}{N-1} \lambda I(t) \frac{S(t)}{N-1} \quad (4)$$

令  $\bar{k} = \frac{\bar{K}}{N-1}$ , 进行标准化后, 则式(4) 变更为:

$$\frac{dE(t)/dt}{N} = \frac{de(t)}{dt} = \frac{\bar{K}}{N-1} \lambda \frac{I(t)}{N} \frac{S(t)}{N-1} \approx \lambda \frac{\bar{K}}{N-1} \frac{I(t)}{N} \frac{S(t)}{N} = \lambda \bar{k} i(t) s(t) \quad (5)$$

$s_c(t), e_c(t), i_c(t), r_c(t)$  是通过群组传播的平均数量,  $\bar{m}$  是群组成员数的平均值。  $\alpha = \gamma \bar{d}$  是群组传播率,  $\bar{d}$  是通过一个群组传播谣言的平均概率,  $X$  是群组的数量,  $\bar{G} = \frac{X\bar{m}}{N}$  是个体所在群组的平均度, 一个传播个体在群组中的概率是  $\frac{\bar{G}}{X}$ , 一个易感节点被感染成潜伏节点的概率是  $\frac{\bar{G}}{X} s_c(t)$ 。

而在  $t+1$  时刻, 传播节点通过群组传播感染易感节点, 此时潜伏节点的数量为:

$$E(t+1) = E(t) + \alpha X I(t) \frac{\bar{G}}{X} s_c(t) = E(t) + \alpha \bar{G} I(t) \frac{m S(t)}{N} = E(t) + \alpha \bar{m} \bar{G} I(t) s(t) \quad (6)$$

$$E(t+\Delta t) = E(t) + \Delta t \alpha \bar{m} \bar{G} I(t) s(t) \xrightarrow{i(t) = \frac{I(t)}{N}} e(t+\Delta t) = e(t) + \Delta t \alpha \bar{m} \bar{G} i(t) s(t) \quad (7)$$

当  $\Delta t \rightarrow 0$  时

$$\frac{de(t)}{dt} = \alpha \bar{m} \bar{G} i(t) s(t) \quad (8)$$

将易感节点的群组传播和个体间传播状态方程合并, 即将式(5)和式(8)合并, 可得到:

$$\frac{de(t)}{dt} = \lambda \bar{k} i(t) s(t) + \alpha \bar{m} \bar{G} i(t) s(t) \quad (9)$$

此时得到一个易感节点通过个体传播和群组传播受传播节点感染的动力学方程演化过程。

在谣言传播中, 除了传播节点会传播谣言给易感

节点外, 潜伏节点亦会通过个体和群组将谣言传播给易感节点。在  $t$  时间间隔内谣言通过群组传播将谣言传播给易感节点使其变为潜伏节点, 所以潜伏节点的增量为:

$$\frac{de(t)}{dt} = \lambda \bar{k} s(t) (e(t) + i(t)) + \alpha \bar{m} \bar{G} s(t) (e(t) + i(t)) \quad (10)$$

然后介绍潜伏节点通过个体传播和群组传播变成传播节点或是免疫节点的动力学方程推导过程。当个体潜伏者变成具有传播能力则变成一个传播者  $I$ , 没有传播能力则变成一个免疫者  $R$ 。一个潜伏者挑选另一个传播者的概率为  $\frac{I(t)-1}{N-1}$ , 一个潜伏者挑选另一个免疫者的概率为  $\frac{R(t)}{N-1}$ 。所以一个潜伏者向另一个传播者或免疫者转变的概率为  $\frac{\bar{K}}{N-1} (\frac{I(t)-1}{N-1} + \frac{R(t)}{N-1})$ 。所以, 在  $t$  时刻  $E(t)$  的数量为:

$$E(t+1) = E(t) - \frac{\bar{K}}{N-1} E(t) (\eta \frac{I(t)-1}{N-1} + \nu \frac{R(t)}{N-1}) \approx E(t) - \bar{k} E(t) (\eta \frac{I(t)}{N} + \nu \frac{R(t)}{N}) \quad (11)$$

$$E(t+\Delta t) = E(t) - \bar{k} \Delta t E(t) (\eta \frac{I(t)}{N} + \nu \frac{R(t)}{N}) = E(t) - \bar{k} \Delta t E(t) (\eta i(t) + \nu r(t)) \quad (12)$$

$$e(t) = \frac{E(t)}{N} \xrightarrow{} e(t+\Delta t) = e(t) - \bar{k} \Delta t e(t) (\eta i(t) + \nu r(t)) \quad (12)$$

当  $\Delta t \rightarrow 0$  时

$$\frac{de(t)}{dt} = -\bar{k} e(t) (\eta i(t) + \nu r(t)) \quad (13)$$

由于  $s(t) + e(t) + i(t) + r(t) = 1$ , 可写出考虑群组传播的 SEIR 谣言传播模型的动力方程组为:

$$\begin{cases} \frac{ds(t)}{dt} = -\lambda \bar{k} s(t) (e(t) + i(t)) - \alpha \bar{m} \bar{G} s(t) (e(t) + i(t)) \\ \frac{de(t)}{dt} = \lambda \bar{k} s(t) (e(t) + i(t)) + \alpha \bar{m} \bar{G} s(t) (e(t) + i(t)) - \bar{k} e(t) (\eta i(t) + \nu r(t)) - \beta \bar{G} e(t) i(t) \\ \frac{di(t)}{dt} = \bar{k} \eta e(t) i(t) + \beta \bar{G} e(t) i(t) - \bar{k} \theta i(t) r(t) \\ \frac{dr(t)}{dt} = \bar{k} \nu e(t) r(t) + \bar{k} \theta i(t) r(t) \end{cases} \quad (14)$$

如果网络中存在潜伏节点或传播节点,则系统不会达到稳态,所以令  $e(t) = 0, i(t) = 0$ , 则雅可比行列式为:

$$J_E = \begin{bmatrix} 0 & (-\lambda\bar{k} - \alpha\bar{m}\bar{G})s & (-\lambda\bar{k} - \alpha\bar{m}\bar{G})s & 0 \\ 0 & (\lambda\bar{k} + \alpha\bar{m}\bar{G})s - \bar{k}\nu r & (\lambda\bar{k} + \alpha\bar{m}\bar{G})s & 0 \\ 0 & 0 & -\bar{k}\theta r & 0 \\ 0 & \bar{k}\nu r & \bar{k}\theta r & 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

计算得出  $J_E$  的特征根为  $(0, 0, -\bar{k}\theta r, (\lambda\bar{k} + \alpha\bar{m}\bar{G})s - \bar{k}\nu r)$ , 若  $(\lambda\bar{k} + \alpha\bar{m}\bar{G})s - \bar{k}\nu r > 0$ , 则系统不稳定。

基本再生数  $R_0$  被定义为在其传播寿命期间, 完全易感人群中被单个谣言传播者感染的下一个体的平均数<sup>[12]</sup>。为了研究文中模型的基本再生数, 使用雅可比矩阵的非零特征值, 经过简单的计算, 得到模型的阈值如下:

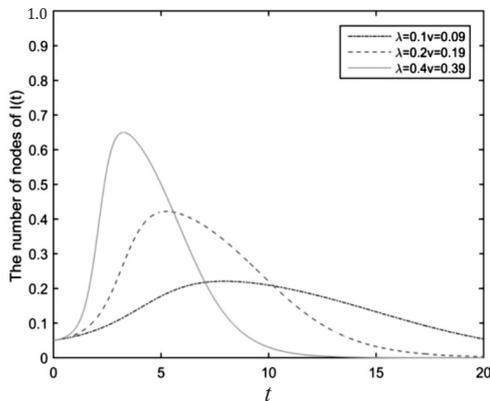
$$R_0 = \frac{(\lambda\bar{k} + \alpha\bar{m}\bar{G})s}{\bar{k}\nu r} = \frac{(\lambda\bar{k} + \alpha\bar{m}\bar{G})s}{\bar{k}\nu(1-s)} \quad (16)$$

当  $R_0 > 1$  时, 在网络中有谣言传播。上式表明当  $\lambda > 0$  时, 有一种类似于流行疾病的谣言在网络中传播。随着网络中潜伏或传播个体数量的增加,  $s$  的值减小, 当  $R_0$  值小于 1 时, 潜伏和传播个体数量从其峰值开始下降。为了有一个稳定的系统, 当  $\nu \ll \lambda$ ,  $R_0$  的值应该很高。当  $s \approx r$ , 若  $\nu \approx \lambda$  传播者(潜伏者)的数量开始从峰值向下减小, 免疫者个人数量的增加, 潜伏者和传播者的数量减少, 直到系统得到稳定状态。

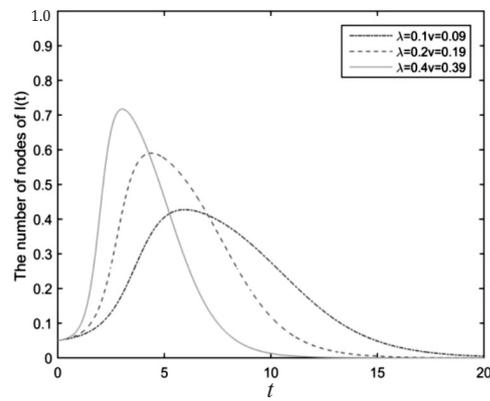
利用 Runge - Kutta 方法对模型的常微分方程进行求解<sup>[13-14]</sup>, 来分析移动社交网络中群组传播对谣言传播的影响。表 1 给出了数值仿真模型的假设条件和初始值。

表 1 数值仿真模拟的假设和初始值

| 网络拓扑          | WS            |
|---------------|---------------|
| 节点数           | $N = 1\ 000$  |
| 平均网络度         | $\bar{K} = 6$ |
| 初始扩展节点数(种子个体) | $S(0) = 5\%$  |
| 平均组成员数        | $\bar{m} = 5$ |
| 各个节点的平均组程度    | $\bar{G} = 3$ |

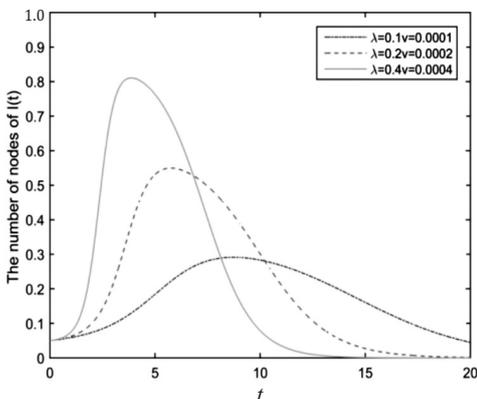


(a) 不考虑群组传播

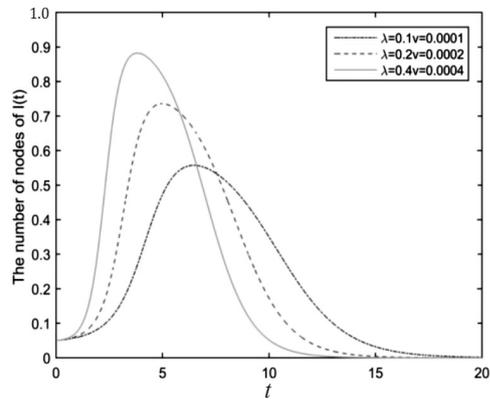


(b) 考虑群组传播

图 2  $\nu \approx \lambda$  时传播者个体的分布



(a) 不考虑群组传播



(b) 考虑群组传播

图 3  $\nu \ll \lambda$  时传播者个体的分布

从图 2、3 可以看出,随着传播率和免疫率的增加,传播者的峰值时刻减少。主观结果是社交网络上的人对他们收到的信息越敏感,谣言传播就越快。另一方面,当人们更加敏感的时候,他们对谣言的反应也会更多,因此系统会更快地达到稳定状态。结果还表明,当扩散速率与免疫速率之比一定时,传播者的数量随着

传播率和免疫率的增加,主观表现是人们对谣言更感兴趣,更有意愿去传播,类似于从众心理。将图中左右两图各自对比分析表明,加入群组传播后,谣言传播规模更大且更快,达到了系统稳定状态,同时传播者的峰值比不考虑群组传播时更大。

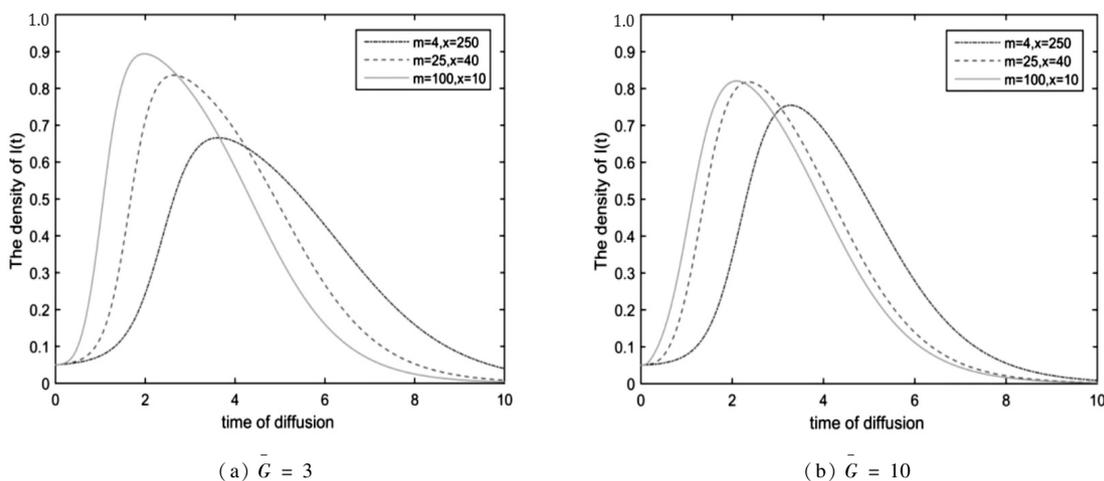


图 4 群组度的变化对传播者个体分布的影响

图 4 为群组数量和群组程度对社交网络中谣言传播的影响。假设  $\bar{G} = 3$ , 改变群组大小 ( $X$ ) 和组的度 ( $\bar{m}$ ) 来分析系统。从图 4 左图中可以看出,群组程度直接影响传播者的比例和传播者的传播速度。随着群组度的增大(群组规模减小),传播者的比例增大,传播速度加快,峰值时间减小。图 4 左右对比分析发现,总体平均组程度越大,谣言传播的速度越快,系统越易达到稳态,但传播的峰值随着总体平均组程度的增大而减小。

谣言传播模型进行仿真和分析。在该模型中,网络被表示为一个有  $N$  个节点和  $E$  条边的图。节点代表社交网络中的个体,边代表个体之间的连接。为了模拟现实中的社交网络,构建了一个  $WS^{[15]}$  小世界网络。在谣言传播过程中,根据所提出的模型,个体可能处于上述四种状态之一。为了避免偶然误差的影响,进行了蒙特卡罗模拟,每个实验的仿真结果都是超过 100 次运行后的平均结果。模型初始状态的假设和参数值如表 1 所示。实验考虑了不同情况下群组传播参数不同概率和传播免疫率的情形。图 5 为新型 SEIR 模型中考虑群组传播时的  $WS$  小世界网络上的仿真结果,图 6 为谣言扩散速率远大于免疫速率时的仿真结果。

## 2 仿真对比实验

本节对前一节提出的考虑群组传播的新型 SEIR

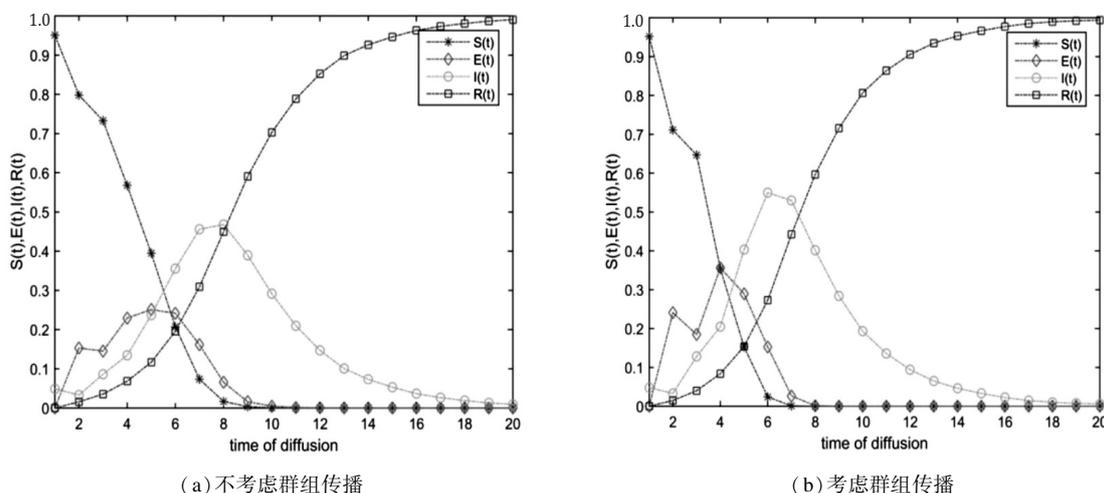


图 5  $WS$  网络仿真整体结果

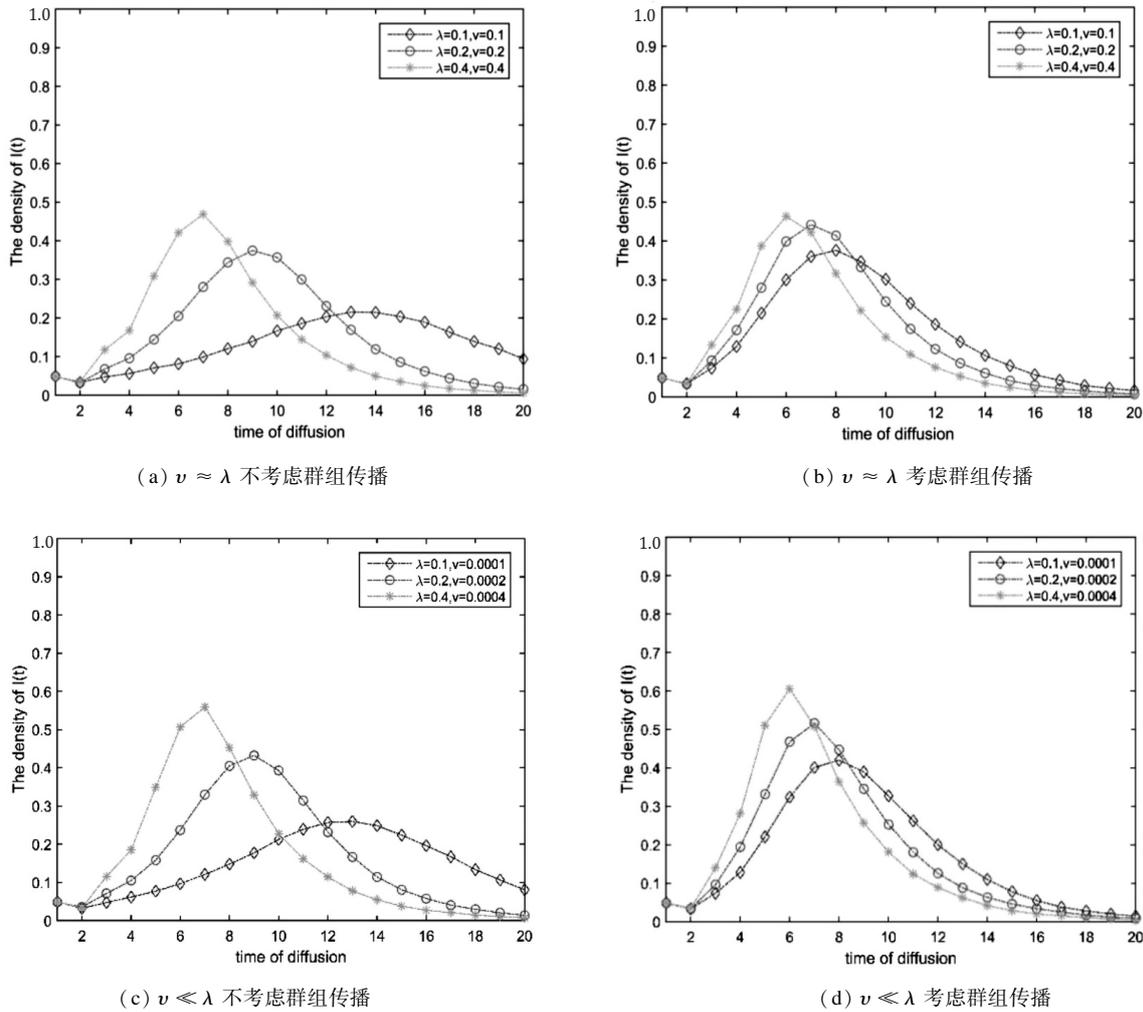


图 6 WS 网络仿真传播参数变化  $I(t)$  动态过程

在 WS 小世界网络下进行实验,考虑了三种不同的情况,群组传播参数的概率不同,传播免疫率也不同,实验结果如下:

在图 5 中,分析了群组传播对谣言传播整体动态变化的影响。可以看出,群组传播对传播时间和传播高峰期的传播者数量有很大的影响。实验结果表明,当考虑群组传播时,需要非常多的人对谣言免疫才能使系统达到稳态。

图 6 比较了传播参数变化对谣言传播的影响,通过有无群组传播以及参数  $v$  和  $\lambda$  是否相近进行对比分析,群组传播对传播时间和传播高峰期的传播者数量有很大的影响;当扩散速率与免疫速率之比一定时,传播者的数量随着参数的增加而变多,而当免疫速率远小于扩散速率时,传播者的峰值数量多于免疫速率与扩散速率相近时的数量,而对传播速度没有较大的影响。这与现实社交网络中谣言传播过程相吻合,且表明群组传播加快了谣言的传播速度,同时使得谣言扩散程度更大,即谣言的影响范围越广。

图 7 比较了群组规模和群组程度对谣言传播的影

响,改变群组大小 ( $X$ ) 和群组度 ( $M$ ) 来研究谣言传播者的动态变化过程。从图 7 中可以看出,群组程度直接影响传播者的比例和传播者的传播速度。随着群组程度的增加(群组数量减少),传播者的比例增加,传播速度加快,峰值时间减小。研究表明,在移动社交网络中,假设当人们所属的群组平均数量(即个体的群组程度)为常数时,拥有较大的群组比拥有较多的群组对谣言传播更有效。

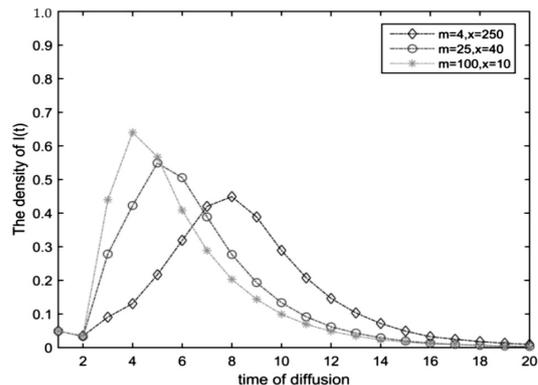


图 7 WS 网络仿真群组程度变化  $I(t)$  动态过程

### 3 结束语

主要研究目的是分析群组传播对社交网络谣言传播过程的影响。除了之前提出的模型中谣言只通过社交网络中的直接联系人传播的共同假设外,谣言传播个体也可以将谣言发布到存在其他间接未知个体的群组中。

为此,通过加入群组传播参数建立了一种考虑群组传播的新型 SEIR 谣言传播模型,在均匀网络上研究了群组传播对谣言传播过程动力学的影响。通过稳态分析,研究了谣言传播在均匀网络上的全局动力学行为,根据动力方程组计算给出了模型的基本再生数,即传播阈值。此外,进行了基于个体的仿真,在 WS 小世界网络上进行了是否考虑群组和不同传播参数的对比实验。实验结果表明,群组传播对谣言传播过程有很大的影响,极大地加快了谣言传播的进程。平均群组度的增加,会导致传播速度和传播者峰值规模均有所增加;结果还表明,群组规模越大,谣言的影响范围越广。

#### 参考文献:

- [1] WEN S, JIANG J, XIANG Y, et al. To shut them up or to clarify: restraining the spread of rumors in online social networks[J]. IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems, 2014, 25(12): 3306-3316.
- [2] ZHU H M, ZHANG S T, JIN Z. The effects of online social networks on tacit knowledge transmission[J]. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 2016, 441: 192-198.
- [3] 于 森. 社交网络舆情传播与控制研究[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工程大学, 2016.
- [4] JIANG J, WEN S, YU S, et al. Rumor source identification in social networks with time-varying topology[J]. IEEE Transactions on Dependable & Secure Computing, 2016, 15(1): 166-179.
- [5] DALEY D J, KENDALL D G. Epidemics and rumours[J]. Nature, 1964, 204(4963): 1118.
- [6] NEKOVEE M, MORENO Y, BIANCONI G, et al. Theory of rumour spreading in complex social networks[J]. Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications, 2007, 374(1): 457-470.
- [7] AFASSINO K. Analysis of the impact of education rate on the rumor spreading mechanism[J]. Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications, 2014, 414: 43-52.
- [8] SAHAFIZADEH E, TORK L B. The impact of group propagation on rumor spreading in mobile social networks[J]. Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications, 2018, 506: 412-423.
- [9] XIA L L, JIANG G P, SONG B, et al. Rumor spreading model considering hesitating mechanism in complex social networks[J]. Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications, 2015, 437: 295-303.
- [10] SCHWARTZ I B, SMITH H L. Infinite subharmonic bifurcation in an SEIR epidemic model[J]. Journal of Mathematical Biology, 1983, 18(3): 233-253.
- [11] ESLAHCHI M R, DEGHAN M, AHMADI\_ASL S. The general Jacobi matrix method for solving some nonlinear ordinary differential equations[J]. Applied Mathematical Modelling, 2012, 36(8): 3387-3398.
- [12] 贺筱媛, 胡晓峰. 网络信息传播动力学建模研究[J]. 系统仿真学报, 2010, 22(11): 2511-2514.
- [13] 袁 华, 陈国青. 电子邮件病毒传播仿真模型及影响因素模拟[J]. 计算机工程与设计, 2006, 27(11): 1914-1916.
- [14] BONABEAU E. Agent-based modeling: methods and techniques for simulating human systems[J]. Proceedings of the National Academy of Sciences, 2002, 99(Supplement 3): 7280-7287.
- [15] BRAUNSTEIN L A, BULDYREV S V, COHEN R, et al. Optimal paths in disordered complex networks[J]. Physical Review Letters, 2003, 91(16): 168701.