

一个求解无约束优化的单参数填充函数算法

张玉琴,冯向东,张建亮

(成都理工大学 工程技术学院,四川 乐山 614000)

摘要:填充函数法被称为求解无约束的全局优化问题的重要方法,此方法的核心之处在于构建具有性质良好、形式简单而且容易求解极小值的填充函数。严格按照填充函数的定义,在目标函数符合条件的基础上,鉴于全局优化问题,构建了一个新的单参数填充函数。此函数具有形式简单、计算简便的特点。在合理的假设条件下,探究并且证明了该填充函数的填充性质和其他的必要性质。并在遵循这些相关性质的基础上,设计了适合该填充函数的算法;此填充函数的算法的主要过程是极小化过程和填充过程;极小化过程和填充过程循环交替运行,直到满足终止条件。最后,通过经典算例,进行了算例实验并与其他文献的结果比较。结果表明,该填充函数是可行的,算法是有效的。结果精确度较高,迭代次数较少。

关键词:填充函数;全局优化;局部极小解;全局极小解;数值结果

中图分类号:O224

文献标识码:A

文章编号:1673-629X(2020)07-0038-04

doi:10.3969/j.issn.1673-629X.2020.07.009

A Filled Function Algorithm with One Parameter for Unconstrained Optimization Problems

ZHANG Yu-qin, FENG Xiang-dong, ZHANG Jian-liang

(Engineering & Technical College of Chengdu University of Technology, Leshan 614000, China)

Abstract: The filled function method is known as an important method for solving unconstrained optimization problem, the key of which is to construct a filled function whose minimum is easy to solve with excellent properties and simple form. Strictly following the definition of the fill function, in view of the global optimization problem, we construct a new single parameter filling function on the basis of the qualified objective function with simple form and simple calculation. Under reasonable assumptions, the filled properties and other necessary properties of the function are explored and proved. Besides, according to these related properties, an algorithm suitable for the filling function is designed, which consists of two phases: a local search phase and function filled phase. The two phases repeat alternatively until the termination criterion is met. Finally, through classical examples, numerical experiments are carried out and compared with the other literatures. It is showed that the function is feasible and the algorithm is effective, with higher accuracy and fewer iterations.

Key words: filled function; global optimization; local minimum; global minimum; numerical results

0 引言

全局优化问题是解决实际问题的重要理论之一,在日常生活中,有着非常广泛的应用,尤其在管理决策、工程计算和控制理论等领域。从算法的结构分类,全局最优化算法被分为两类:确定性算法和随机性算法。然而填充函数法被称为确定性算法。

西安交通大学葛仁溥教授最初提出填充函数法^[1]。此方法是求解非线性全局优化问题的方法之一;填充函数法是解决怎样从原问题的一个局部极小解开始,找到更小的局部极小解的方法。填充函数法

主要有两个过程:极小化过程与填充过程。这两个过程循环使用直到找不到更好的局部极小解。为了消除已有的经典极小化算法存在早熟的弊端,找到更好的局部极小解,众多理论和实际工作者更加热衷于研究填充函数法^[2-7]。

填充函数法的核心工作是填充函数,其性质与形式决定它的算法效率;填充函数应构建为目标函数的复合函数,且含有一个参数^[4,8-10]或两个参数^[1,3,5,11],由于参数的选取比较困难,或由于填充函数是分段函数^[3,5,11],使得填充函数算法的效率降低。为此,科研

收稿日期:2019-07-22

修回日期:2019-11-25

基金项目:四川省教育科研重点项目(自然科学类)(18ZA0075,18ZA0073);成都理工大学工程技术学院基金项目(C122017043,C122017042)

作者简介:张玉琴(1977-),女,讲师,硕士,研究方向为全局优化理论与算法。

工作者竭力地构建参数尽量少、形式足够简单及呈现优良性质的填充函数。仔细研究文献[4,8],笔者构建了一个形式简易、容易计算的连续的单参数的填充函数。

1 基本知识

文中仅研究无约束最优化问题

$$(P_0) \min_{x \in R^n} f(x) \quad (1)$$

对于无约束最优化问题 (P_0) , 目标函数 $f(x)$ 满足以下假设:

假设 I: (P_0) 的函数 $f(x)$ 是强制的。即当 $\|x\| \rightarrow \infty$ 时, $f(x) \rightarrow \infty$ 。

由假设 I 可以得出, 必定存在一个有界闭集 $X \subset R^n$, 使得 $f(x)$ 的全局极小解都包含在 X 内; 也可以这样解释 $f(x)$ 的极小值在 X 的内部取得。因此, 问题 (P_0) 就转化为求解如下问题:

$$(P_1) \min f(x) \text{ s. t. } x \in X \quad (2)$$

假设 II: 在 R^n 上, 函数 $f(x)$ 连续而且可微。

假设 III: 问题中可有无穷个相异的局部极小解, 但只有可数个相异的局部极小值。

文中填充函数的定义参考文献[4]。

定义: 目标函数 $f(x)$ 在局部极小解 x_1^* 处的填充函数 $H(x, x_1^*, \rho)$ 应满足以下条件:

(1) x_1^* 是 $H(x, x_1^*, \rho)$ 在 X 上的严格的局部极大解;

(2) 对所有 $x \in S_1$, 有 $\nabla H(x, x_1^*, \rho) \neq 0$, 这里 $S_1 = \{x \mid f(x) \geq f(x_1^*), x \in X \setminus \{x_1^*\}\}$, 即 $H(x, x_1^*, \rho)$ 在 S_1 上没有极小解或鞍点;

(3) 若 x_1^* 不是目标函数 $f(x)$ 的全局极小解, 则 $H(x, x_1^*, \rho)$ 在 S_2 上一定有局部极小解, 且 $S_2 = \{x \mid f(x) < f(x_1^*), x \in X\}$ 。

2 填充函数与性质

鉴于问题 (P_0) , 假若 (P_0) 的局部极小解为 x^* , 单参数填充函数构建如下:

$$P(x, x^*, \rho) = -\rho[f(x) - f(x^*)]^2 - \arctan(\|x - x^*\|^2) \quad (3)$$

其中, $\rho > 0$ 为参数, 以下定理说明函数 $P(x, x^*, \rho)$ 满足填充函数定义, 而且有一些较好的性质。

定理 1: 若 x^* 是函数 $f(x)$ 的局部极小解, 则 x^* 是 $P(x, x^*, \rho)$ 的一个严格的局部极大解。

证明: 因为在 R^n 上, 目标函数 $f(x)$ 连续; 又因为 x^* 为函数 $f(x)$ 的局部极小解, 所以存在点 x^* 的某个邻域 $U(x^*)$, 使得对于每个 $x \in U(x^*)$, 且 $x \neq x^*$, 满足 $f(x) \geq f(x^*)$ 且

$$P(x, x^*, \rho) = -\rho[f(x) - f(x^*)]^2 - \arctan(\|x - x^*\|^2) < 0 = P(x^*, x^*, \rho)$$

即证: x^* 是 $P(x, x^*, \rho)$ 的一个严格的局部极大解。

定理 2: 假若 x^* 是函数 $f(x)$ 的局部极小解, 对每个 $x \in S_1$, 则 $\nabla P(x, x^*, \rho) \neq 0$ 。

证明: 因为 $f(x)$ 连续可微, 因此

$$\nabla P(x, x^*, \rho) = -2\rho[f(x) - f(x^*)] \nabla f(x) - \frac{2(x - x^*)}{1 + \|x - x^*\|^4}$$

对任意 $x \in S_1$, 满足

(1) 如果 $\nabla f(x) = 0$ 或 $f(x) = f(x^*)$, 又因为 $x \neq x^*$, 则

$$\nabla P(x, x^*, \rho) = -\frac{2(x - x^*)}{1 + \|x - x^*\|^4} \neq 0$$

(2) 如果 $\nabla f(x) \neq 0$ 且 $f(x) > f(x^*)$, 则存在充分大的 $\rho > 0$, 使得 $\nabla P(x, x^*, \rho) \neq 0$ 。

定理 3: 假若 x^* 是函数 $f(x)$ 的局部极小解, 但 x^* 不是全局极小解, 则必能找到 $x_0^* \in S_2$, 使得 x_0^* 为 $P(x, x^*, \rho)$ 的一个局部极小解。

证明: 通过假设可得: $S_2 \neq \emptyset$; 因此至少存在 $f(x)$ 的一个局部极小解 x_1^* , 使得 $f(x_1^*) \leq f(x^*)$, 而且有 $x_1^* \in S_2$; 依据假设 I 和 $f(x)$ 的连续性, 存在充分小的正数 ε 和 θ ($0 < \theta < 1$), 使得 $0 < \varepsilon < \theta[f(x^*) - f(x_1^*)]$; 记集合 $Y = \{x \mid f(x) = f(x_1^*) + \varepsilon\}$ 。

下面证明对任意 $x \in Y$, 都有 $P(x, x^*, \rho) > P(x_1^*, x^*, \rho)$ 。

$$\begin{aligned} P(x, x^*, \rho) - P(x_1^*, x^*, \rho) &= \rho\{[f(x_1^*) - f(x^*)]^2 - [f(x) - f(x^*)]^2\} + \\ &\quad \arctan(\|x_1^* - x^*\|^2) - \arctan(\|x - x^*\|^2) = \\ &\quad \rho\{[f(x^*) - f(x_1^*)]^2 - [f(x^*) - f(x_1^*) - \varepsilon]^2\} + \\ &\quad \arctan(\|x_1^* - x^*\|^2) - \arctan(\|x - x^*\|^2) \end{aligned}$$

因为 $\varepsilon > 0$, 因此

$$\rho\{[f(x^*) - f(x_1^*)]^2 - [f(x^*) - f(x_1^*) - \varepsilon]^2\} > 0$$

下面分两种情况讨论 $\arctan(\|x_1^* - x^*\|^2) - \arctan(\|x - x^*\|^2)$ 的正负性。

(i) 如果 $\|x_1^* - x^*\| \geq \|x - x^*\|$, 由于 $y = \arctan t$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 是单调增加的, 故 $\arctan(\|x_1^* - x^*\|^2) \geq \arctan(\|x - x^*\|^2)$ 即证 $P(x, x^*, \rho) > P(x_1^*, x^*, \rho)$ 。

(ii) $\|x_1^* - x^*\| < \|x - x^*\|$, 由于 $x \in Y$, 当 ρ 充分大时, $P(x, x^*, \rho) > P(x_1^*, x^*, \rho)$ 。

因此,对任意 $x \in Y$, 当 ρ 充分大时, $P(x, x^*, \rho) > P(x_1^*, x^*, \rho)$ 。(*)

若记集合 $H = \{x \in X \mid f(x) \leq f(x_1^*) + \varepsilon\}$, 由于 $P(x, x^*, \rho)$ 在有界闭集 H 上连续, 则在 H 上一定能取得最小值。不妨设 $\min_{x \in H} P(x, x^*, \rho) = P(x_0^*, x^*, \rho)$, 因为 $x_1^* \in H$, 故有 $P(x_0^*, x^*, \rho) \leq P(x_1^*, x^*, \rho)$ 。由(*)知:

$\min_{x \in H} P(x, x^*, \rho) = P(x_0^*, x^*, \rho) = \min_{x \in H \setminus Y} P(x, x^*, \rho)$ 又因为 $H \setminus Y$ 是开集, 因此 $x_0^* \in H \setminus Y \subset \text{int} X$ 。由于 $\varepsilon > 0$, 故有 $f(x_0^*) \leq f(x_1^*) + \varepsilon < f(x_1^*) + f(x_1^*) - f(x_1^*) = f(x_1^*)$ 而且满足 $x_0^* \in S_2$ 。且满足: 在 S_2 上, x_0^* 是 $P(x, x^*, \rho)$ 的一个局部极小解, 且有 $\nabla P(x, x^*, \rho) = 0$ 。

由上述证明可得, 当取足够大的 ρ 时, 使得在 S_2 上存在 $P(x, x^*, \rho)$ 的一个局部极小解 x_0^* 。

定理 4: 如果 x^* 是函数 $f(x)$ 的全局极小解, 则对于任意的 $x \in X, x \neq x^*$, 有 $P(x, x^*, \rho) < 0$ 。

证明: 因为 x^* 是目标函数 $f(x)$ 的全局极小解, 因此对任意 $x \in X, f(x) \geq f(x^*)$ 。

由定理 1 知: 对于任意 $x \in X, x \neq x^*$, 有 $P(x, x^*, \rho) < 0$ 。

定理 5: 如果 x^* 是目标函数 $f(x)$ 的局部极小解, 对于任意 $x \in S_1$, 且当 ρ 充分大时, 则方向 $d = \nabla f(x)^T$ 是 $P(x, x^*, \rho)$ 在 x 处的下降方向; 其中 $\nabla f(x)^T \neq 0$ 。

证明: 因为 $\nabla P(x, x^*, \rho) =$

$-2\rho[f(x) - f(x^*)] \nabla f(x) - \frac{2(x - x^*)}{1 + \|x - x^*\|^4}$, 所以 $\nabla f(x)^T \nabla P(x, x^*, \rho) = -2\rho[f(x) - f(x^*)] \nabla f(x)^T \nabla f(x) - \nabla f(x)^T \frac{2(x - x^*)}{1 + \|x - x^*\|^4}$

对于任意 $x \in S_1$, 当 ρ 充分大时, $\nabla f(x)^T \nabla P(x, x^*, \rho) < 0$ 。因此结论成立。

3 填充函数算法与算例实验

3.1 填充函数算法

假设调节步长 $\delta > 0, \varepsilon > 1$, 参数 k 是外循环的运算次数, 且存在一个足够大的正整数 N , 使得 $k \leq N$; 参数 i 是内循环迭代次数, 且存在一个足够大的正整数 M , 使得 $i \leq M$; 一般选取 $M > 2n$, 其中 n 是决策变量的维数。参数 $\rho \leq \rho_0$

Step1: 令 $k := 1, i := 1, \rho := 1$ 。

Step2: 选择初始点 $x_0 \in X$, 从 x_0 开始, 利用成熟的最优化方法, 解出局部极小解 x_1^* 和对应的局部极小值 $f(x_1^*)$ 。

Step3: 在极小解 x_1^* 处构建填充函数:

$$P(x, x^*, \rho) = -\rho[f(x) - f(x^*)]^2 -$$

$$\arctan(\|x - x^*\|^2)$$

Step4: 如果 $i \leq M$, 选取 $x_i = x_1^* + \delta d_i \in X$, 其中 d_i 是随机方向, $\|d_i\|_\infty \leq 1, \delta > 0$; 从点 x_i 开始, 用成熟的优化算法求解 $P(x, x^*, \rho)$ 的局部极小解 x_2 , 转为 Step5; 否则, 令 $k := k + 1$, 转为 Step6。

Step5: 假若 $x_2 \in X$, 转为 Step6; 否则令 $i := i + 1$, 转为 Step4。

Step6: 把 x_2 作为新的初始点, 再利用成熟的优化方法求解函数 $f(x)$ 的局部极小值, 同时求出局部极小解 x_2^* , 若函数 $f(x_2^*) \leq f(x_1^*)$, 令 $f(x_1^*) := f(x_2^*)$, $x_1^* := x_2^*$ 转为 Step3; 否则, 转为 Step7。

Step7: 如果 $k \leq N$, 令 $\rho := \rho\varepsilon, i := 1$, 如果 $\rho > \rho_0$, 则取 $\rho = \rho_0$, 转为 Step4。否则, 结束计算; 输出 x_1^* 与函数值 $f(x_1^*)$, 把 $f(x_1^*)$ 作为近似的全局极小值。

3.2 算例实验

算例都在 Matlab2014a 运行环境下实现。

算例 1: Rastrigin

$$\min f(x) = x_1^2 + x_2^2 - \cos(18x_1) - \cos(18x_2)$$

$$\text{s. t. } x \in \{(x_1, x_2) \mid -1 \leq x_1, x_2 \leq 1\}$$

文中迭代次数是 1 次, 得到的全局极小解是 $x^* = (-0.679\,5e-9, 0.555\,2e-9)^T$, 全局极小值 $f(x^*) = -2$; 而文献[4]的数值结果中迭代次数是 4 次, 全局最小解是 $x^* = (-0.200\,0e-7, -0.200\,0e-7)^T$, 全局极小值是 $f(x^*) = -1.999\,999\,99$ 。

算例 2: Three-hump camel-back Function

$$\min f(x) = 2x_1^2 - 1.05x_1^4 + x_1^6/6 - x_1x_2 + x_2^2$$

$$\text{s. t. } x \in \{(x_1, x_2) \mid -3 \leq x_1, x_2 \leq 3\}$$

文中的迭代次数是 2 次, 全局极小解是 $x^* = (0.076\,5e-6, 0.161\,8e-6)^T$, 全局极小值是 $f(x^*) = 2.551\,4e-14$ 。文献[4]的迭代次数是 3 次, 全局极小解是 $x^* = (-1.356e-5, 0.492\,0e-5)^T$, 全局极小值是 $f(x^*) = 4.585e-10$ 。

算例 3: Treccani Function

$$\min f(x) = x_1^4 + 4x_1^3 + 4x_1^2 + x_2^2$$

$$\text{s. t. } x \in \{(x_1, x_2) \mid -3 \leq x_1, x_2 \leq 3\}$$

文中的迭代次数是 1, 全局极小解是 $x^* = (0.061\,0 \times 1.0e-6, -0.156\,9 \times 1.0e-6)^T$ 全局极小值是 $f(x^*) = 3.951\,4e-14$; 文献[4]的迭代次数是 2, 全局极小解是 $x^* = (4.66e-6, 0.000\,0)^T$, 全局极小值是 $f(x^*) = 8.677\,1e-11$ 。

算例 4: Six-hump camel-back Function

$$\min f(x) = 4x_1^2 - 2.1x_1^4 + x_1^6/3 - x_1x_2 - 4x_2^2 + 4x_2^4$$

$$\text{s. t. } x \in \{(x_1, x_2) \mid -3 \leq x_1, x_2 \leq 3\}$$

文中迭代次数是 2 次。全局极小解是 $(0.089\,8, 0.712\,7)^T$, 全局极小值是 $f(x^*) = -1.031$

6. 文献[4]的迭代次数是3,全局极小解是 $x^* = (0.089\ 837\ 22, 0.712\ 694\ 68)^T$, 全局极小值是 $f(x^*) = -1.031\ 628\ 44$ 。

算例5: Two-dimensional Function

$$\min f(x) = [1 - 2x_2 + 0.5\sin(4\pi x_2) - x_1]^2 + [x_2 - 0.5\sin(2\pi x_1)]^2$$

s. t. $x \in \{(x_1, x_2) \mid 0 \leq x_1 \leq 10, -10 \leq x_2 \leq 0\}$ 文中迭代次数是4次;全局极小解是 $x^* = (0.934\ 2, -0.174\ 6)^T$, 全局极小值是 $f(x^*) = 7.669\ 3e - 14$ 。文献[4]的迭代次数是3,全局极小解是

$x^* = (0.999\ 999\ 99, 0.000\ 000\ 17)^T$, 全局极小值是 $f(x^*) = 5.907\ 849\ 04e - 13$ 。

小结:对比文献[4,8]的数值结果,算法迭代次数较少,而且精度较高。

4 结束语

文中构建的无约束的优化问题的单参数填充函数,具有较好的性质,而且形式简单,便于计算。算例结果证明了该算法的可行性。在此基础上,还可以构建无参数填充函数,或引入滤子方法等^[12-15],研究求解优化问题的填充函数仍是一个研究方向。

参考文献:

- [1] GE R P, QIN Y F. A class of filled functions for finding a global minimizer of a function of several variables[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 1987, 54(2): 241-252.
- [2] LIU X. The impelling function method applied to global optimization[J]. Applied Mathematics and Computation, 2004, 151(3): 745-754.
- [3] ZHANG L, NG C, LI D, et al. A new filled function method for global optimization[J]. Journal of Global Optimization, 2004, 28: 17-43.
- [4] SHANG Y, PU D G, JIANG A P. Finding global minimizer with one parameter filled function on unconstrained global optimization[J]. Applied Mathematics and Computation, 2007, 191: 176-182.
- [5] YANG Y J, SHANG Y L. A new filled function method for unconstrained global optimization[J]. Applied Mathematics and Computation, 2006, 173: 501-512.
- [6] LIANG Y, ZHANG L, LI M, et al. A filled function method for global optimization[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2007, 205: 16-31.
- [7] WANG C, YANG Y, LI J. A new filled function method for unconstrained global optimization[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2009, 225: 68-79.
- [8] 贺素香, 陈未来. 一个求解无约束优化问题的填充函数算法[J]. 浙江大学学报:理学版, 2011, 38(2): 144-149.
- [9] 梁玉梅, 李铭明, 迟东璇. 全局优化问题的一个单参数填充函数方法[J]. 运筹学学报, 2009, 13(4): 101-108.
- [10] 李铭明. 含一个参数的填充函数算法[J]. 上海工程技术大学学报, 2010, 24(4): 328-330.
- [11] 姚桂霞, 叶仲泉, 马雪. 一类求全局最小点的填充函数及其算法[J]. 计算机技术与发展, 2012, 22(8): 96-99.
- [12] LIN Y, YANG Y. Filled function method for nonlinear equations[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2010, 234(3): 695-702.
- [13] 高雷阜, 刘旭旺. 基于混沌和填充函数的全局优化算法[J]. 运筹与管理, 2009, 18(2): 25-29.
- [14] 高岳林, 吴佩佩. 非线性整数规划的一个新的无参数填充函数算法[J]. 计算数学, 2017, 39(3): 321-327.
- [15] 石礼堂, 陈伟. 整数规划问题的滤子填充函数算法[J]. 应用数学与计算数学学报, 2018, 32(2): 331-342.
- [10] CHEN X, ZHENG Z, YU Q, et al. Web service recommendation via exploiting location and QoS information[J]. IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems, 2014, 25(7): 1913-1924.
- [11] 李美佳, 王玉环, 王菊韵. 基于 Covisitation 算法的新闻推荐[J]. 中国传媒大学学报:自然科学版, 2016, 23(3): 56-58.
- [12] 樊雅琴, 孙东梅, 崔迎, 等. 个性化学习影响因素分析[J]. 现代远程教育, 2018(5): 73-80.
- [13] 田磊, 任国恒, 王伟. 基于聚类优化的协同过滤个性化图书推荐[J]. 图书馆学研究, 2017(8): 75-80.
- [14] 聂黎生. 基于改进 KPCA 与 SVM 的题名分类研究[J]. 现代电子技术, 2019, 42(16): 108-111.
- [15] 韩亚楠, 曹菡, 刘亮亮. 基于评分矩阵填充与用户兴趣的协同过滤推荐算法[J]. 计算机工程, 2016, 42(1): 36-40.

(上接第37页)

用研究[J]. 河南师范大学学报:自然科学版, 2019, 47(1): 26-32.

[7] 赵佳男, 王楠. 数字学习资源推荐技术研究现状及趋势分析[J]. 北京邮电大学学报:社会科学版, 2014, 16(6): 90-96.

[8] U Liji, CHAI Yahui, CHEN Jianrui. Improved personalized recommendation based on user attributes clustering and score matrix filling[J]. Computer Standards & Interfaces, 2018, 57: 59-67.

[9] TARUS J K, NIU Z, YOUSIF A. A hybrid knowledge-based recommender system for e-learning based on ontology and sequential pattern mining[J]. Future Generation Computer Systems, 2017, 72: 37-48.