

基于 L_p 收缩算子的改进广义全变分去噪方法

杨晶晶¹, 吴 辉², 陈颖频^{2*}

(1. 福州大学 物理与信息工程学院, 福建 福州 350000;

2. 闽南师范大学 物理与信息工程学院, 福建 漳州 363000)

摘 要:二阶广义的全变分模型是一种建立在全变分模型的思想之上进行改进的图像去噪模型,该模型是一种考虑了一阶以及高阶梯度稀疏性的模型,能够有效地抑制阶梯伪影效应的产生。 L_p 收缩算子相比于 L_1 算子增加了一个自由度,它能够更好地刻画稀疏梯度信息,同时 L_p 收缩算子的等高线对噪声更加鲁棒。考虑到 L_p 收缩算子的优势,将 L_p 收缩算子引入二阶广义全变分去噪模型,提出改进的二阶广义全变分 L_p 收缩算子模型(TGV2- L_p)。利用交替乘子迭代法对模型进行求解,引入快速傅里叶算法提高算法效率。通过测试6组图片、对比传统的3种去噪模型,从实验结果可以得出,提出的模型TGV2- L_p 在有效保留图片边缘细节信息的同时,能够有效去除噪声,在视觉效果、峰值信噪比和结构相似性都有一定优势。

关键词:二阶广义全变分模型;图像去噪; L_p 收缩算子;交替乘子迭代法;稀疏性

中图分类号:TP301.6

文献标识码:A

文章编号:1673-629X(2020)04-0020-06

doi:10.3969/j.issn.1673-629X.2020.04.004

Improved Generalized Total Variation Denoising Method Based on L_p Shrinkage

YANG Jing-jing¹, WU Hui², CHEN Ying-pin^{2*}

(1. School of Physics and Information Engineering, Fuzhou University, Fuzhou 350000, China;

2. School of Physics and Information Engineering, Minnan Normal University, Zhangzhou 363000, China)

Abstract: Second-order total generalized variation model is an image denoising model based on the idea of the total variation (TV) model. Both the first-order and high-level sparseness are taken into account so that the generation of the stair-case artifact of TV is effectively suppressed. The L_p shrinkage adds a degree of freedom compared to the L_1 operator, which better describes the sparse gradient information, while the contours of the L_p shrinkage are more robust to noise. Considering the advantages mentioned above, we introduce the L_p shrinkage in second-order total generalized variation model and propose second-order total generalized variation with L_p shrinkage (TGV2- L_p) model. The model is solved by the alternating multiplier iteration method. The fast Fourier transform algorithm is introduced to further improve the efficiency of the algorithm. By testing six sets of pictures and comparing the traditional three denoising models, it can be concluded from the experimental results that the proposed model can effectively remove noise while effectively retaining the edge details of the processed picture and has certain advantages in visual effects, peak signal-to-noise ratio, and structural similarity.

Key words: second-order generalized total variational model; image denoising; L_p shrinkage; alternating direction method of multipliers; sparsity

0 引言

图像是目前社会上人们信息传递的主流媒介和人

类视觉的基础方式,数字图像信息的处理技术是目前人们获得和传递视觉信息的必备技术手段,所以对于

收稿日期:2019-05-28

修回日期:2019-09-30

网络出版时间:2019-12-18

基金项目:国家自然科学基金(重点项目)(U1505251);福建省中青年教育科研项目(JAT190378);闽南师范大学教改项目(JG201918);闽南师范大学校长基金(KJ19019);福建省重大教学改革项目(FBJG20180015);福建省电子信息工程试点专业创新创业教改项目(2008-178026)

作者简介:杨晶晶(1995-),女,研究生,研究方向为图像处理;陈颖频,通讯作者,博士,讲师,英国 IET 主任工程师,研究方向为稀疏表示、时频分析、图像处理等。

网络出版地址: <http://kns.cnki.net/kcms/detail/61.1450.TP.20191218.1115.062.html>

图像去噪^[1]技术领域的研究变得格外有意义。Rudin 等人在 1992 年提出了全变分 (total variation, TV)^[2-3] 图像去噪模型。它是建立在全变分模型的基础思想之上,确定图像的能量泛函,且在一定程度上获得更好的图像去噪结果。在此之后,TV 模型被广泛地应用到图像去噪、图像重建和图像去模糊等方面。但是受到边缘扩散系数比较小的限制,不能够很好地抑制噪声,并且对于边缘细节处的处理表现得十分不稳定。2009 年, Bredies 等人提出了二阶的总广义变分 (total generalized variation, TGV)^[4-5] 正则项代替 TV 正则项的图像去噪新模型,具备良好的去噪效果和保持图像边缘的优点,还能在一定程度上缓解阶梯效应的产生。同时,此模型能逼近任意多项式,在各种领域的应用中取得了良好效果,因此, TGV 稀疏正则化技术逐渐成为图像与信号处理的新热点。管阳曾将 Lp 范数应用于人脸识别实验,得出基于 Lp 范数的人脸识别算法有着更高的识别率和更强的鲁棒性^[6]。

文中将 TGV 中的 L1 约束项改进为 Lp 约束项, Lp 收缩算子^[7-8] 相比于 L1 算子增加了一个自由度,能更好地刻画图像的稀疏梯度信息^[9],从而更好地实现去噪效果,提出了二阶广义全变分 Lp 收缩算法模型 (second-order total generalized variational with Lp shrinkage model, TGV₂-Lp)。首先将 TGV₂-Lp 去噪模型应用于图像的去噪中,然后使用交替乘子迭代法 (alternating direction method of multipliers, ADMM)^[10] 对模型进行求解。为了降低算法的计算复杂度,引入了快速傅里叶变换 (fast Fourier transform, FFT)^[11], 避免了大型矩阵相乘的运算。

1 图像去噪

1.1 传统 TGV 模型的优化

传统的广义全变分 TGV 模型表示如下:

$$\min_{f,v} \frac{1}{2} \|f - g\|_2^2 + \mu \text{TGV}_2(f) = \frac{1}{2} \|f - g\|_2^2 + \mu [\alpha_0 \|\nabla f - v\|_1 + \alpha_1 \|\xi(v)\|_1] \quad (1)$$

其中, $\frac{1}{2} \|f - g\|_2^2$ 表示保真项,表示二阶广义全变分的正则项。 μ 表示二阶广义全变分正则项系数,用来平衡保真项与正则项^[12],平衡参数过小,则恢复图像主要取决于观察图像的质量;平衡参数过大,则恢复图像主要取决于先验知识,导致恢复的图像过于模糊。 $f \in \mathbb{R}^{N^2 \times 1}$ 表示待求的去噪图像, TGV 正则项的中间变量是 $v \in \mathbb{R}^{2N^2 \times 1}$ 。 $\nabla = \begin{bmatrix} \nabla_x \\ \nabla_y \end{bmatrix}$ 表示梯度算子, ∇_x 为横向梯度, ∇_y 为纵向梯度。

$$\xi(v) = \begin{bmatrix} \nabla_x v_x & \frac{1}{2}(\nabla_x v_y + \nabla_y v_x) \\ \frac{1}{2}(\nabla_x v_y + \nabla_y v_x) & \nabla_y v_y \end{bmatrix} \quad (2)$$

引入 FFT 理论,将二阶 TGV 模型写成矩阵形式,并将差分形式表示为卷积形式,即

$$\min_{F,V_x,V_y} \frac{1}{2} \|F - G\|_2^2 + \mu \text{TGV}_2(F) = \frac{1}{2} \|F - G\|_2^2 + \mu [\alpha_0 (\|K_h * F - V_x\|_1 + \|K_v * F - V_y\|_1) + \alpha_1 (\|K_h * V_x\|_1 + \|K_v * V_y\|_1 + \|K_v * V_x + K_h * V_y\|_1)] \quad (3)$$

其中, $F, G, V_x, V_y \in \mathbb{R}^{N \times N}$, $K_h = [1, -1]$, $K_v = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ 。符号 $*$ 表示二维矩阵卷积运算,且满足 $\nabla_x f = \text{vec}(K_h * F)$, $\nabla_y f = \text{vec}(K_v * F)$, vec 为向量化算子。式中的 $\|\bullet\|_2$ 表示矩阵元素 L_2 范数。

传统的 TGV 模型是在原图像上直接进行数据的运算,它是以矩阵的形式存在于图像,进行图像去噪处理时就不可避免地要计算大型的矩阵相乘运算,使计算过程复杂化。引入 FFT 理论后将空域上的计算转移到频域中。改进后的模型有两个优点:(1)传统模型的矩阵拉列后,涉及的差分矩阵规模是 $N^2 \times N^2$,解这个模型的时候,涉及求逆的过程,这样算法的复杂度将会是 $O(N^6)$,而矩阵在频域上是以点的形式存在的,所以矩阵频域点乘的复杂度就仅有 $O(N^2)$;(2)引入卷积算子,代替传统 TGV 差分矩阵^[13],从而将 FFT 引入该算法,提高算法效率^[14]。

下一节中将 Lp 收缩算子替代传统 TGV 模型的 L1 收缩算子,从而更好地刻画图像的稀疏度信息。

1.2 TGV₂-Lp 模型

本节将 TGV 中的 L1 约束项改为 Lp 约束项,从而更好地实现去噪效果。将二阶 TGV 建模修改如下:

$$\min_{F,V_x,V_y} \frac{1}{2} \|F - G\|_2^2 + \mu \text{TGV}_{2-Lp}(F) = \frac{1}{2} \|F - G\|_2^2 + \mu \{ \alpha_0 [\|K_h * F - V_x\|_p^p + \|K_v * F - V_y\|_p^p] + \alpha_1 [\|K_h * V_x\|_p^p + \|K_v * V_y\|_p^p + \|K_v * V_x + K_h * V_y\|_p^p] \} \quad (4)$$

其中, $\text{TGV}_{2-Lp}(F)$ 表示基于 Lp 范数的二阶广义全变分正则项, $\frac{1}{2} \|F - G\|_2^2$ 表示保真项, μ 表示正则项系数。Lp 收缩算子定义为 $\|F\|_p^p = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N$

$\|\mathbf{F}_{ij}\|_p$, L_p 收缩算子的等高线对噪声的稀疏性的刻画更好^[15]。

为求解式定义的改进 TGV 模型,利用 ADMM^[16] 框架对模型进行求解。该方法通过引入去耦合的分裂变量将复杂的问题转化为若干个简单的子问题进行求解。分裂变量定义为: $\mathbf{Z}_1 = \mathbf{K}_h * \mathbf{F} - \mathbf{V}_x$, $\mathbf{Z}_2 = \mathbf{K}_v * \mathbf{F} - \mathbf{V}_y$, $\mathbf{Z}_3 = \mathbf{K}_h * \mathbf{V}_x$, $\mathbf{Z}_4 = \mathbf{K}_v * \mathbf{V}_y$, $\mathbf{Z}_5 = \mathbf{K}_v * \mathbf{V}_x + \mathbf{K}_h * \mathbf{V}_y$, 原问题转化成为带约束的子问题,即:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{F}, \mathbf{V}_x, \mathbf{V}_y} \frac{1}{2} \|\mathbf{F} - \mathbf{G}\|_2^2 + \mu \text{TGV}_{2-L_p}(\mathbf{F}) = \\ \frac{1}{2} \|\mathbf{F} - \mathbf{G}\|_2^2 + \mu \{ \alpha_0 [\|\mathbf{Z}_1\|_p^p + \|\mathbf{Z}_2\|_p^p] + \alpha_1 [\|\mathbf{Z}_3\|_p^p + \|\mathbf{Z}_4\|_p^p + \|\mathbf{Z}_5\|_p^p] \} \end{aligned} \quad (5)$$

根据 ADMM 原理,可以将式(5)描述的约束问题转化为无约束的增广拉格朗日函数,目标函数变为式:

$$\begin{aligned} J = \max_{\substack{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3, \\ \mathbf{A}_4, \mathbf{A}_5}} \left\{ \min_{\substack{\mathbf{F}, \mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2, \\ \mathbf{Z}_3, \mathbf{Z}_4, \mathbf{Z}_5}} \frac{1}{2} \|\mathbf{F} - \mathbf{G}\|_2^2 + \mu_0 [\|\mathbf{Z}_1\|_p^p + \|\mathbf{Z}_2\|_p^p] + \mu_1 [\|\mathbf{Z}_3\|_p^p + \|\mathbf{Z}_4\|_p^p + \|\mathbf{Z}_5\|_p^p] - \langle \beta_0 \mathbf{A}_1, \mathbf{Z}_1 - (\mathbf{K}_h * \mathbf{F} - \mathbf{V}_x) \rangle - \langle \beta_0 \mathbf{A}_2, \mathbf{Z}_2 - (\mathbf{K}_v * \mathbf{F} - \mathbf{V}_y) \rangle - \langle \beta_1 \mathbf{A}_3, \mathbf{Z}_3 - \mathbf{K}_h * \mathbf{V}_x \rangle - \langle \beta_1 \mathbf{A}_4, \mathbf{Z}_4 - \mathbf{K}_v * \mathbf{V}_y \rangle - \langle \beta_1 \mathbf{A}_5, \mathbf{Z}_5 - (\mathbf{K}_v * \mathbf{V}_x + \mathbf{K}_h * \mathbf{V}_y) \rangle + \right. \\ \left. \frac{\beta_0}{2} (\|\mathbf{Z}_1 - (\mathbf{K}_h * \mathbf{F} - \mathbf{V}_x)\|_2^2 + \|\mathbf{Z}_2 - (\mathbf{K}_v * \mathbf{F} - \mathbf{V}_y)\|_2^2) + \frac{\beta_1}{2} (\|\mathbf{Z}_3 - \mathbf{K}_h * \mathbf{V}_x\|_2^2 + \|\mathbf{Z}_4 - \mathbf{K}_v * \mathbf{V}_y\|_2^2 + \|\mathbf{Z}_5 - (\mathbf{K}_v * \mathbf{V}_x + \mathbf{K}_h * \mathbf{V}_y)\|_2^2) \right\} \end{aligned} \quad (6)$$

其中, $\mu_0 = \mu \alpha_0$, $\mu_1 = \mu \alpha_1$, $\mathbf{A}_i (i = 1, 2, \dots, 5)$ 是收缩的拉格朗日乘子,也叫对偶变量。 $\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle$ 表示两个矩阵 \mathbf{X}, \mathbf{Y} 的内积。

1.3 提出模型的 ADMM 求解

1.3.1 $\mathbf{F}, \mathbf{V}_x, \mathbf{V}_y$ 子问题

在 ADMM 框架下,分离变量及其对偶变量之间与三元组 $\mathbf{F}, \mathbf{V}_x, \mathbf{V}_y$ 是去耦合的。而这三个变量相互之间是耦合的,因此需要建立关于三个变量的三元一次方程组,其中,对于 $\mathbf{F}, \mathbf{V}_x, \mathbf{V}_y$ 子问题,其子目标函数退化为:

$$\begin{aligned} J_1 = \frac{1}{2} \|\mathbf{F} - \mathbf{G}\|_2^2 + \frac{\beta_0}{2} (\|\mathbf{K}_h * \mathbf{F} - \mathbf{V}_x - \mathbf{Z}_1^{(k)} + \mathbf{A}_1^{(k)}\|_2^2 + \|\mathbf{K}_v * \mathbf{F} - \mathbf{V}_y - \mathbf{Z}_2^{(k)} + \mathbf{A}_2^{(k)}\|_2^2) \end{aligned} \quad (7)$$

可以利用快速傅里叶变换对式进行卷积计算。根据卷积定律^[17],两个矩阵在空域卷积,对应到频域,卷

积结果的频谱为两个矩阵频谱的点乘,将式做傅里叶变换得:

$$\begin{aligned} J_1 = \frac{1}{2} \|\bar{\mathbf{F}} - \bar{\mathbf{G}}\|_2^2 + \frac{\beta_0}{2} (\|\bar{\mathbf{K}}_h \circ \bar{\mathbf{F}} - \bar{\mathbf{V}}_x - \bar{\mathbf{Z}}_1^{(k)} + \bar{\mathbf{A}}_1^{(k)}\|_2^2 + \|\bar{\mathbf{K}}_v \circ \bar{\mathbf{F}} - \bar{\mathbf{V}}_y - \bar{\mathbf{Z}}_2^{(k)} + \bar{\mathbf{A}}_2^{(k)}\|_2^2) \end{aligned} \quad (8)$$

其中, $\bar{\bullet}$ 表示 \bullet 变量的傅里叶变换,符号 \circ 表示点乘算子。令 J_1 关于 $\bar{\mathbf{F}}$ 的导数为零,得:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_1}{\partial \bar{\mathbf{F}}} = \bar{\mathbf{F}} - \bar{\mathbf{G}} + \beta_0 \{ (\bar{\mathbf{K}}_h)^* \circ [\bar{\mathbf{K}}_h \circ \bar{\mathbf{F}} - (\bar{\mathbf{V}}_x + \bar{\mathbf{Z}}_1^{(k)} - \bar{\mathbf{A}}_1^{(k)})] + (\bar{\mathbf{K}}_v)^* \circ [\bar{\mathbf{K}}_v \circ \bar{\mathbf{F}} - (\bar{\mathbf{V}}_y + \bar{\mathbf{Z}}_2^{(k)} - \bar{\mathbf{A}}_2^{(k)})] \} = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

令 $\mathbf{A}_{11} = 1 + \beta_0 (\bar{\mathbf{K}}_h)^* \circ \bar{\mathbf{K}}_h + \beta_0 (\bar{\mathbf{K}}_v)^* \circ \bar{\mathbf{K}}_v$, $\mathbf{A}_{12} = -\beta_0 (\bar{\mathbf{K}}_h)^*$, $\mathbf{A}_{13} = -\beta_0 (\bar{\mathbf{K}}_v)^*$, $\mathbf{B}_1 = \beta_0 (\bar{\mathbf{K}}_h)^* \circ (\bar{\mathbf{Z}}_1^{(k)} - \bar{\mathbf{A}}_1^{(k)}) + \beta_0 (\bar{\mathbf{K}}_v)^* \circ (\bar{\mathbf{Z}}_2^{(k)} - \bar{\mathbf{A}}_2^{(k)}) + \bar{\mathbf{G}}$ 整理得:

$$\mathbf{A}_{11} \circ \bar{\mathbf{F}} + \mathbf{A}_{12} \circ \bar{\mathbf{V}}_x + \mathbf{A}_{13} \circ \bar{\mathbf{V}}_y = \mathbf{B}_1 \quad (10)$$

同理对于 \mathbf{V}_x 子问题,令 $\mathbf{A}_{21} = -\beta_0 \bar{\mathbf{K}}_h$, $\mathbf{A}_{22} = \beta_0 1 + \beta_1 (\bar{\mathbf{K}}_h)^* \circ \bar{\mathbf{K}}_h + \beta_1 (\bar{\mathbf{K}}_v)^* \circ \bar{\mathbf{K}}_v$, $\mathbf{A}_{23} = \beta_1 (\bar{\mathbf{K}}_v)^* \circ \bar{\mathbf{K}}_h$, $\mathbf{B}_2 = \beta_0 (\bar{\mathbf{A}}_1^{(k)} - \bar{\mathbf{Z}}_1^{(k)}) + \beta_1 [(\bar{\mathbf{K}}_h)^* \circ (\bar{\mathbf{Z}}_3^{(k)} - \bar{\mathbf{A}}_3^{(k)}) + (\bar{\mathbf{K}}_v)^* \circ (\bar{\mathbf{Z}}_5^{(k)} - \bar{\mathbf{A}}_5^{(k)})]$

得:

$$\mathbf{A}_{21} \circ \bar{\mathbf{F}} + \mathbf{A}_{22} \circ \bar{\mathbf{V}}_x + \mathbf{A}_{23} \circ \bar{\mathbf{V}}_y = \mathbf{B}_2 \quad (11)$$

同理对于 \mathbf{V}_y 子问题:

令 $\mathbf{A}_{31} = -\beta_0 \bar{\mathbf{K}}_v$, $\mathbf{A}_{32} = \beta_1 (\bar{\mathbf{K}}_h)^* \circ \bar{\mathbf{K}}_v$, $\mathbf{A}_{33} = \beta_0 1 + \beta_1 (\bar{\mathbf{K}}_h)^* \circ \bar{\mathbf{K}}_h + \beta_1 (\bar{\mathbf{K}}_v)^* \circ \bar{\mathbf{K}}_v$, $\mathbf{B}_3 = \beta_0 (\bar{\mathbf{A}}_2^{(k)} - \bar{\mathbf{Z}}_2^{(k)}) + \beta_1 [(\bar{\mathbf{K}}_v)^* \circ (\bar{\mathbf{Z}}_4^{(k)} - \bar{\mathbf{A}}_4^{(k)}) + (\bar{\mathbf{K}}_h)^* \circ (\bar{\mathbf{Z}}_5^{(k)} - \bar{\mathbf{A}}_5^{(k)})]$, 整理得:

$$\mathbf{A}_{31} \circ \bar{\mathbf{F}} + \mathbf{A}_{32} \circ \bar{\mathbf{V}}_x + \mathbf{A}_{33} \circ \bar{\mathbf{V}}_y = \mathbf{B}_3 \quad (12)$$

$\mathbf{F}, \mathbf{V}_x, \mathbf{V}_y$ 可以用克莱姆(Cramer)法则和快速反傅里叶变换求解,也即:

$$\mathbf{F}^{(k+1)} = \mathbf{F}^{-1} \left\{ \begin{vmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{13} \\ \mathbf{B}_2 & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{A}_{23} \\ \mathbf{B}_3 & \mathbf{A}_{32} & \mathbf{A}_{33} \end{vmatrix} / \begin{vmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{13} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{A}_{23} \\ \mathbf{A}_{31} & \mathbf{A}_{32} & \mathbf{A}_{33} \end{vmatrix} \right\} \quad (13)$$

$$\mathbf{V}_x^{(k+1)} = \mathbf{F}^{-1} \left\{ \begin{vmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{B}_1 & \mathbf{A}_{13} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{B}_2 & \mathbf{A}_{23} \\ \mathbf{A}_{31} & \mathbf{B}_3 & \mathbf{A}_{33} \end{vmatrix} / \begin{vmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{13} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{A}_{23} \\ \mathbf{A}_{31} & \mathbf{A}_{32} & \mathbf{A}_{33} \end{vmatrix} \right\} \quad (14)$$

$$\mathbf{V}_y^{(k+1)} = \mathbf{F}^{-1} \left\{ \begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{A}_{31} & \mathbf{A}_{32} & \mathbf{B}_3 \end{array} \middle/ \begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{13} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{A}_{23} \\ \mathbf{A}_{31} & \mathbf{A}_{32} & \mathbf{A}_{33} \end{array} \right\} \quad (15)$$

上式中的除都为按元素点除运算。 \mathbf{F}^{-1} 是表示二维的逆 FFT 算子。

1.3.2 $\mathbf{Z}_i (i = 1, 2, \dots, 5)$ 子问题求解

对于 \mathbf{Z}_1 子问题,其目标子函数为:

$$J_4 = \mu_0 \|\mathbf{Z}_1\|_p^p + \frac{\beta_0}{2} (\|\mathbf{Z}_1 - (\mathbf{K}_h * \mathbf{F}^{(k+1)} - \mathbf{V}_x^{(k+1)}) - \mathbf{A}_1^{(k)}\|_2^2) \quad (16)$$

根据 Lp 收缩方式^[18]:

$$\text{shrink}_p(\xi, \tau) = \max\{|\xi| - \tau^{2-p}, 0\}$$

$\exp(j\varphi(\xi))$, \mathbf{Z}_1 的更新公式为:

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_1 = & \text{shrink}_p((\mathbf{K}_h * \mathbf{F}^{(k+1)} - \mathbf{V}_x^{(k+1)}) + \mathbf{A}_1^{(k)}, u/\beta) = \\ & \max\{ |(\mathbf{K}_h * \mathbf{F}^{(k+1)} - \mathbf{V}_x^{(k+1)}) + \mathbf{A}_1^{(k)}| - \\ & (u/\beta)^{2-p} |(\mathbf{K}_h * \mathbf{F}^{(k+1)} - \mathbf{V}_x^{(k+1)}) + \mathbf{A}_1^{(k)}|^{p-1}, 0 \} \end{aligned} \quad (17)$$

同理, $\mathbf{Z}_2, \mathbf{Z}_3, \mathbf{Z}_4, \mathbf{Z}_5$ 的更新公式为:

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_2 = & \text{shrink}_p((\mathbf{K}_v * \mathbf{F}^{(k+1)} - \mathbf{V}_y^{(k+1)}) + \mathbf{A}_2^{(k)}, u/\beta) = \\ & \max\{ |(\mathbf{K}_v * \mathbf{F}^{(k+1)} - \mathbf{V}_y^{(k+1)}) + \mathbf{A}_2^{(k)}| - \\ & (u/\beta)^{2-p} |(\mathbf{K}_v * \mathbf{F}^{(k+1)} - \mathbf{V}_y^{(k+1)}) + \mathbf{A}_2^{(k)}|^{p-1}, 0 \} \\ \mathbf{Z}_3 = & \text{shrink}_p((\mathbf{K}_h * \mathbf{V}_x^{(k+1)}) + \mathbf{A}_3^{(k)}, u/\beta) = \\ & \max\{ |(\mathbf{K}_h * \mathbf{V}_x^{(k+1)}) + \mathbf{A}_3^{(k)}| - \\ & (u/\beta)^{2-p} |(\mathbf{K}_h * \mathbf{V}_x^{(k+1)}) + \mathbf{A}_3^{(k)}|^{p-1}, 0 \} \\ \mathbf{Z}_4 = & \text{shrink}_p((\mathbf{K}_v * \mathbf{V}_y^{(k+1)}) + \mathbf{A}_4^{(k)}, u/\beta) = \\ & \max\{ |(\mathbf{K}_v * \mathbf{V}_y^{(k+1)}) + \mathbf{A}_4^{(k)}| - \\ & (u/\beta)^{2-p} |(\mathbf{K}_v * \mathbf{V}_y^{(k+1)}) + \mathbf{A}_4^{(k)}|^{p-1}, 0 \} \\ \mathbf{Z}_5 = & \text{shrink}_p((\mathbf{K}_h * \mathbf{V}_x^{(k+1)} + \mathbf{K}_v * \mathbf{V}_y^{(k+1)}) + \mathbf{A}_5^{(k)}, \\ & u/\beta) = \max\{ |(\mathbf{K}_h * \mathbf{V}_x^{(k+1)} + \mathbf{K}_v * \mathbf{V}_y^{(k+1)}) + \\ & \mathbf{A}_5^{(k)}| - (u/\beta)^{2-p} |(\mathbf{K}_h * \mathbf{V}_x^{(k+1)} + \\ & \mathbf{K}_v * \mathbf{V}_y^{(k+1)}) + \mathbf{A}_5^{(k)}|^{p-1}, 0 \} \end{aligned} \quad (18)$$

1.3.3 $\mathbf{A}_i (i = 1, 2, \dots, 5)$ 子问题求解

对于 \mathbf{Z}_1 的对偶变量 \mathbf{A}_1 , 其目标子函数为:

$$J_5 = \max_{\mathbf{A}_1} \beta_0 \langle \mathbf{A}_1, (\mathbf{K}_h * \mathbf{F}^{(k+1)} - \mathbf{V}_x^{(k+1)}) - \mathbf{Z}_1^{(k+1)} \rangle \quad (19)$$

利用梯度上升法可得其更新公式为:

$$\mathbf{A}_1^{(k+1)} = \mathbf{A}_1^{(k)} + \gamma((\mathbf{K}_h * \mathbf{F}^{(k+1)} - \mathbf{V}_x^{(k+1)}) - \mathbf{Z}_1^{(k+1)}) \quad (20)$$

其中 γ 为学习率。

类似地, 对偶变量 $\mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3, \mathbf{A}_4, \mathbf{A}_5$ 的更新公式

如下:

$$\begin{cases} \mathbf{A}_2^{(k+1)} = \mathbf{A}_2^{(k)} + \gamma((\mathbf{K}_v * \mathbf{F}^{(k+1)} - \mathbf{V}_y^{(k+1)}) - \mathbf{Z}_2^{(k+1)}) \\ \mathbf{A}_3^{(k+1)} = \mathbf{A}_3^{(k)} + \gamma((\mathbf{K}_h * \mathbf{V}_x^{(k+1)}) - \mathbf{Z}_3^{(k+1)}) \\ \mathbf{A}_4^{(k+1)} = \mathbf{A}_4^{(k)} + \gamma((\mathbf{K}_v * \mathbf{V}_y^{(k+1)}) - \mathbf{Z}_4^{(k+1)}) \\ \mathbf{A}_5^{(k+1)} = \mathbf{A}_5^{(k)} + \gamma((\mathbf{K}_h * \mathbf{V}_x^{(k+1)} + \mathbf{K}_v * \mathbf{V}_y^{(k+1)}) - \mathbf{Z}_5^{(k+1)}) \end{cases} \quad (21)$$

至此, 提出模型的所有子问题都得以解决。将整个算法总结如下:

算法: TGV₂-Lp 图像去噪方法伪代码。

Input: 观测图像 \mathbf{G} ;

Output: 去噪图像 \mathbf{F} 。

Initialize:

$k = 1, \mathbf{Z}_i = 0, \mathbf{A}_i = 0 (i = 1, 2, \dots, 5)$,

$\mathbf{F}^{(k)} = 0$,

$\mu_0, \beta_0, \mu_1, \beta_1, \gamma, \text{tol}, \text{Max}, E = 1$

1: While $E > \text{tol}$ do

2: 利用式(13)~式(15)更新 $\mathbf{F}^{(k+1)}, \mathbf{V}_x^{(k+1)}, \mathbf{V}_y^{(k+1)}$;

3: While $n < \text{Max}$ do

4: 利用式(17)、式(18)更新 $\mathbf{Z}_{i(n+1)} (i = 1, 2, \dots, 5)$;

5: $n = n + 1$;

6: End while

7: $\mathbf{Z}_i^{(k+1)} = \mathbf{Z}_{i(n+1)}^{(k+1)} (i = 1, 2, \dots, 5)$;

8: 利用式(20)、式(21)更新 $\mathbf{A}_i^{(k+1)} (i = 1, 2, \dots, 5)$;

9: $k = k + 1$;

10: $\|\mathbf{F}^{(k+1)} - \mathbf{F}^{(k)}\|_2 / \|\mathbf{F}^{(k)}\|_2 > \text{tol}$

11: End while

12: Return $\mathbf{F}^{(k)}$ as \mathbf{F}

2 实验结果与环境分析

2.1 实验环境

为了验证提出的 TGV₂-Lp 模型的优越性和合理性, 如图 1 所示, 选取了 6 幅不同风格的测试图进行实验。图像的大小为 512×512 。实验采用的噪声为高斯随机白噪声^[19] (Gaussian random white noise), 其中均值都为 0, 标准差分别为 10, 20, 50。在实验中, 将提出的 TGV₂-Lp 算法与已有的去噪方法进行对比, 对比算法包括: 各向异性全变分模型 (anisotropic total variation, ATV)、分数阶全变分 (fractional order total variation, FATV)^[20-21]、二阶广义全变分模型。为了保证实验的公平性与有效性, 所有实验采用相同的硬件环境, 即都是在版本为 R2018a 的 MATLAB 编程环境下实现的, 并且所有的实验都是在同一台笔记本电脑上实现的, 笔记本配置为 2.8 G 的英特尔核处理器, 4GRAM 的硬件环境以及 Windows10 操作系统。

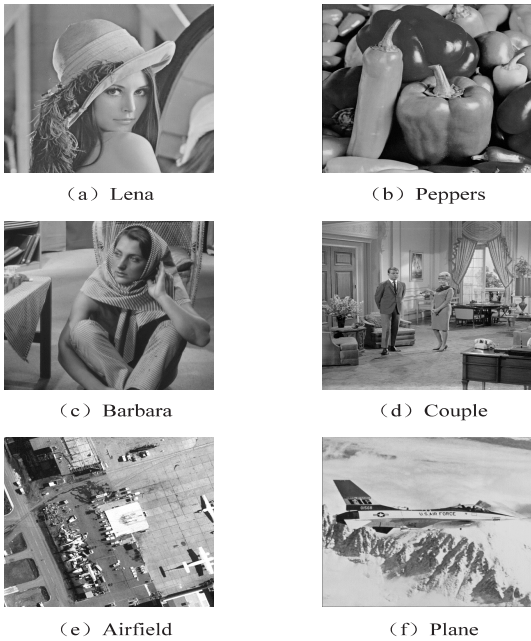


图 1 测试图

实验的评价指标选择峰值信噪比(peak signal-to-noise ratio, PSNR)和结构相似性信息(structural similarity, SSIM)。权重系数 μ 的值随着噪声水平的增加而增大。峰值信噪比和结构相似性的定义如下:

表 1 四种算法对不同图像去噪的 PSNR(dB)和 SSIM 值

图像	方差	ATV		FATV		TGV		TGV ₂ -LP	
		PSNR	SSIM	PSNR	SSIM	PSNR	SSIM	PSNR	SSIM
Lena	10	32.842	0.887	32.824	0.887	32.891	0.846	32.976	0.891
	20	29.214	0.818	29.185	0.816	29.569	0.830	29.694	0.828
	50	25.434	0.703	25.319	0.702	25.432	0.706	25.536	0.715
Peppers	10	32.670	0.887	32.598	0.887	32.738	0.567	32.812	0.861
	20	28.915	0.821	28.733	0.821	29.231	0.835	29.337	0.834
	50	23.734	0.688	23.549	0.687	23.837	0.365	23.924	0.741
Barbara	10	29.334	0.877	29.298	0.877	29.438	0.881	29.566	0.895
	20	24.905	0.727	25.065	0.736	25.128	0.745	25.382	0.756
	50	22.025	0.564	21.975	0.563	22.141	0.388	22.399	0.386
Couple	10	30.795	0.878	30.771	0.878	31.134	0.881	31.450	0.884
	20	26.468	0.739	26.619	0.749	26.744	0.753	26.899	0.759
	50	22.551	0.521	22.458	0.519	22.689	0.538	22.871	0.571
Airfield	10	29.412	0.860	29.382	0.860	29.447	0.698	29.524	0.709
	20	24.852	0.695	25.033	0.708	25.341	0.715	25.623	0.729
	50	20.540	0.490	20.450	0.489	20.690	0.516	20.777	0.531
Plane	10	32.518	0.899	32.460	0.899	32.531	0.899	32.736	0.901
	20	28.268	0.845	28.281	0.843	28.419	0.847	28.686	0.847
	50	20.880	0.393	20.472	0.375	20.942	0.382	21.278	0.429

从表 1 可以看出,在对一组不同图像加入了三种不同水平的噪声后,文中提出的 TGV₂-Lp 模型对加噪

$$\begin{aligned} \text{PSNR} &= 10\lg \frac{255^2}{\frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (X_{ij} - Y_{ij})^2} \quad (22) \\ \text{SSIM} &= \frac{(2\mu_X \mu_Y + 255^2 k_1^2)(2\sigma_{XY} + 255^2 k_2^2)}{(\mu_X^2 + \mu_Y^2 + 255^2 k_1^2)(\sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + 255^2 k_2^2)} \quad (23) \end{aligned}$$

其中, μ_x 和 μ_y 分别代表图像 X 和 Y 的平均值, σ_x^2 和 σ_y^2 分别代表图像 X 和 Y 的方差, σ_{xy} 代表图像 X 和 Y 的协方差, k_1 和 k_2 用于确保结构相似性表达式的分母值非零,实验中取 $k_1 = 0.01$ 和 $k_2 = 0.03$ 。

峰值信噪比的数值越大,说明图像去噪效果越好,SSIM 的数值取值范围是(0,1),其值越接近于 1 表示相似度越高,去噪效果越好。

2.2 几种去噪算法的测试与比较

高斯噪声是测试过程中所使用的噪声,其均值为 0,噪声的标准差分别为 10、20 和 50。为了保证实验评价的合理性、有效性和公正性,算法的迭代停止条件均规定为:

$$\| \mathbf{F}^{(k+1)} - \mathbf{F}^{(k)} \|_2 / \| \mathbf{F}^{(k)} \|_2 \leq 10^{-4} \quad (24)$$

调节各种算法的正则参数,以达到各自的最佳去噪效果。对不同图像的测试结果如表 1 所示。

图像恢复的 PSNR 值和 SSIM 值均高于其他三种方法。表明 TGV₂-Lp 去噪模型具有更优秀的去噪效果,同时

所恢复出的图像与原始图像更为接近。

图2是对大小为 512×512 的 Lena 图像加入噪声标准差为 20 的高斯白噪声后的四种算法重建的边缘细节图;图3是对大小为 512×512 的 Peppers 图像加入噪声标准差为 20 的高斯白噪声后的四种算法恢复图。分别观察用 ATV、FATV、TGV、 TGV_2-L_p 图像去噪模型重建图像的图。从视觉的角度来看,可以看出 TGV_2-L_p 方法恢复的图像效果最佳, TGV_2-L_p 图像去噪模型在图像边缘细节的处理上有很大的优势,对边缘细节和纹理的保留更优,整体来说 TGV_2-L_p 去噪模型的去噪能力更突出。

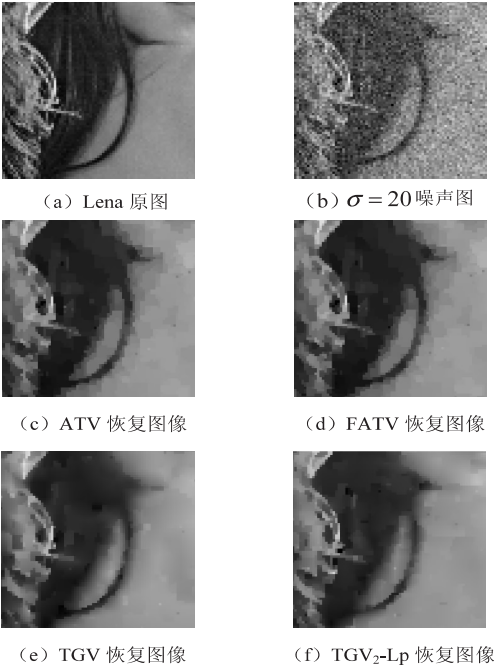


图2 Lena 四种算法边缘细节图

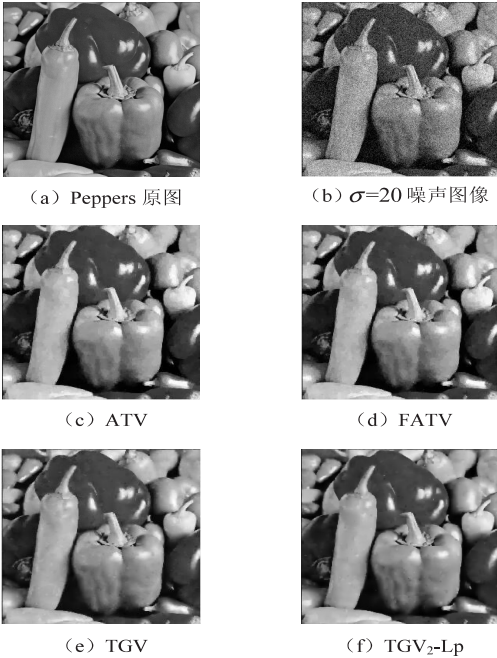


图3 Peppers 四种算法恢复图

3 结束语

提出了一种新的基于 L_p 收缩算子的变分去噪方法。为求解该去噪模型,引入快速傅里叶变换理论和 ADMM 算法。在 TGV_2-L_p 的模型中, L_p 收缩算子通过更好地刻画图像高阶梯度场的稀疏性,从而有效地提高了 TGV 的去噪性能。从实验数据可以得出以下结论: TGV_2-L_p 相对于 ATV、FATV、TGV 能获得更大的 PSNR 和 SSIM,这说明了文中方法无论从误差的角度还是从结构相似性的角度都优于其他三种算法; TGV_2-L_p 方法从视觉上看恢复的图像效果最佳。但该方法的不足之处在于对图像的结构相似性的刻画能力有限,因此未来还要在图像的结构化稀疏先验角度上继续深入研究。

参考文献:

[1] 刘卓亚. 图像去噪技术综述[J]. 科技信息,2013(15):317.

[2] RUDIN L I, OSHER S, FATEMI E. Nonlinear total variation based noise removal algorithms[J]. Physica D Nonlinear Phenomena,1992,60(1-4):259-268.

[3] GISOLF F, MALGOEZAR A, BAAR T, et al. Improving source camera identification using a simplified total variation based noise removal algorithm [J]. Digital Investigation, 2013, 10(3):207-214.

[4] BREDIES K, KUNISCH K, POKK T. Total generalized variation[J]. SIAM Journal on Imaging Sciences,2010,3(3):492-526.

[5] KNOLL F, BREDIES K, POKK T, et al. . Second order total generalized variation (TGV) for MRI [J]. Magnetic Resonance in Medicine,2011,65(2):480-491.

[6] 管 阳. 基于 l_p 范数稀疏增强的人脸识别算法[J]. 自动化与仪器仪表,2016(7):197-199.

[7] 彭真明,陈颖频,蒲 恬,等. 基于稀疏表示及正则约束的图像去噪方法综述[J]. 数据采集与处理,2018,33(1):1-11.

[8] CHEN Y P, PENG Z M, Gholami Ali, et al. Seismic signal sparse time - frequency representation by L_p -quasinorm constraint[J]. Digital Signal Processing, 2019,87:43-59.

[9] LIN F, CHEN Y P, WANG L Z, et al. An efficient image reconstruction framework using total variation regularization with L_p -quasinorm and group gradient sparsity [J]. Information, 2019,10(3):115.

[10] BOYD S, PARIKH N, CHU E, et al. Distributed optimization and statistical learning via the alternating direction method of multipliers[J]. Foundations & Trends in Machine Learning, 2010,3(1):1-122.

[11] COCHRAN W, CLLOEY J, FAYIN D, et al. What is the fast Fourier transform? [J]. IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics, 1967,15(2):45-55.