基于组合排序的约束多目标优化算法

李振宇,胡　涵
(南京航空航天大学 计算机科学与技术学院,江苏 南京 211100)

摘　要:约束的多目标优化问题(CMOPs)常见于工程应用和现实生活中,这类问题往往包括多个冲突的目标以及一组约束条件。与无约束的多目标优化问题相比,此类问题包含了一些复杂的特征,解决起来也要困难得多。对此,文中提出了一种基于组合排序的约束处理方法。该方法与一个最新提出的基于约束分解的算法框架相结合来解决约束的多目标优化问题。基于网格的约束分解的进化算法(CDG-MOEA)是新提出的解决多目标优化的算法,在解决无约束多目标优化问题上具有多样性和鲁棒性等良好的特性。基于此框架,提出了基于组合排序的约束处理方法,旨在算法的每次进化中,选择出种群中多样性比较好且可行的那些解。为了验证算法的有效性,将提出的约束多目标优化算法(CDG-CS)与现有算法在多个约束的优化问题上进行实验分析,结果表明,该算法在约束的多目标优化问题上有着不错的效果。

关键词:约束优化;多目标优化算法;基于网格的约束分解;约束处理

中图分类号:TP301.6　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1673-629X(2019)11-0032-05

doi:10.3969/j.issn.1673-629X.2019.11.007

Research on Constrained Multi-objective Optimization Algorithm Based on Combined Rank

LI Zhen-yu,HU Han
(School of Computer Science and Technology,Nanjing University of Aeronautics and Astronautics,Nanjing 211100,China)

Abstract:Constrained multi-objective optimization problems (CMOPS) are common in engineering applications and real life, which often involve multiple conflicting objectives as well as a number of constraints. Compared with unconstrained many-objective optimization problems, CMOPs contain some complicated features and are much more difficult to solve. Therefore, we propose a constraint-handling mechanism based on a combined sorting, and combines it with a newly proposed optimization algorithm framework based on constrained decomposition to solve CMOPs. A constrained decomposition MOEA with grid (CDG-MOEA) is newly proposed to perform great in terms of diversity and robustness. Based on this framework, we propose the constraint-handling mechanism based on combined sorting, which aims to select solutions that are feasible and have better diversity. To verify the effectiveness of the algorithm, the proposed constrained multi-objective optimization algorithm (CDG-CS) will compare with other algorithms on some constrained optimization problems. The experiment demonstrates that CDG-CS can solve CMOPs very well.

Key words:constrained optimization;multi-objective optimization;constrained decomposition with grids;constraint handling

0　引　言

现实世界中很多优化问题都是约束的多目标优化问题(CMOPs),这些问题往往包括多个冲突的目标以及一组约束条件。在多目标优化问题中[1],在一个目标上的改善可能会导致另一个或者其余几个目标上性能的降低,此时算法关注的是收敛性与多样性的平衡。当引入一组约束条件后,算法求解出可行解又成了新的挑战,此时算法关注的是收敛性,多样性与可行性的平衡。约束的多目标进化算法[2](CMOEA)在求解此类问题时旨在找到一组满足约束条件的最优解集。

文中提出一种约束的多目标进化算法(CDG-CS)。该算法采用基于网格的约束分解(CDG)框架[3]。在选择解的阶段,设计了一个组合排序的约束处理策略,该策略与约束分解的框架相结合,可以保持CDG 拥有较好的多样性及对特殊 PF 形状具有鲁棒性的优点,又能够求解出一组符合约束条件的可行解集。

收稿日期:2018-11-10　　**修回日期**:2019-03-13　　**网络出版时间**:2019-06-26

基金项目:中国航空科技基金(20175552042)

作者简介:李振宇(1993-),男,硕士,CCF 会员(88897G),研究方向为智能计算与机器学习。

网络出版地址:http://kns.cnki.net/kcms/detail/61.1450.TP.20190626.0829.020.html

1 概　述

1.1 约束多目标优化问题的定义

一个约束多目标优化问题(CMOP)定义如下:

$$\text{minimize}\quad F(x)=(f_1(x),\cdots,f_m(x))^{\mathrm{T}}$$

$$\text{subject to}\ \ g_i(x)\leqslant 0, i=1,2,\cdots,p$$

$$h_j(x)=0, j=1,2,\cdots,q$$

$$x\in\Omega$$

其中,Ω 是决策空间,$x\in\Omega$ 是决策变量。$F:\Omega\rightarrow R^m$ 是由 m 个实值目标函数组成的目标空间。此外,p 是不等式约束的数量,q 是等式约束的数量。通常情况下,等式约束都会转化为不等式约束的形式,如下:

$$|h_j(x)|-\varepsilon\leqslant 0, j=1,2,\cdots,q$$

其中,ε 是一个允许的正容差值。

基于以上陈述,约束违反值 $\varphi(x)$ 可以根据约束条件定义如下:

$$\varphi(x)=\sum_i \max(0,g_i(x))+\sum_j \max(0,|h_j(x)|-\varepsilon)$$

1.2 多目标优化中的一些定义

定义 1(可行解):解 x 为可行解当且仅当 $\varphi(x)\leqslant 0$,否则解 x 为不可行解。

定义 2(Pareto 支配):对于解 $u,v\in R^m$,u 支配 v($u\prec v$)当且仅当对于所有的 $i\in\{1,2,\cdots,m\}$ 都有 $u_j<v_j$,且至少存在一个 $j\in\{1,2,\cdots,m\}$ 有 $u_j<v_j$。

定义 3(Pareto 最优):解 $x^*\in\Omega$ 是 Pareto 最优解当且仅当 $F(x^*)$ 在整个目标集中是非支配的,$F(x^*)$ 也被称为 Pareto 最优目标向量。

定义 4(ideal point 理想点):理想点 z^* 可表示为向量 $z^*=\{z_1^*,z_2^*,\cdots,z_m^*\}^{\mathrm{T}}$,其中 $z_j^*=\min\limits_{x\in\Omega}f_j(x)$,$j\in\{1,2,\cdots,m\}$。

定义 5(nadir point 极值点):极值点 z^{nad} 可表示为向量 $z^{\mathrm{nad}}=(z_1^{\mathrm{nad}},z_2^{\mathrm{nad}},\cdots,z_m^{\mathrm{nad}})^{\mathrm{T}}$,其中 $z_j^{\mathrm{nad}}=\max\limits_{x\in \mathrm{PS}}f_j(x)$,$j\in\{1,2,\cdots,m\}$。

1.3 约束优化的背景

对于解决约束的单目标优化问题,近年来有很多约束处理技术[4-7](CHTs)。但是专门处理多目标优化问题的约束处理技术很少。根据一篇关于约束处理技术的调查[8],早期的约束处理技术可以分为这几种:惩罚函数法、特殊算子法、分离目标与约束法等。在基于数学规划的方法中,惩罚函数法[9-10]首先在进化计算中提出,具有以下公式:

$$\Phi(\vec{x})=f(\vec{x})+g(\vec{x})$$

其中,$\Phi(\vec{x})$ 是更新后的目标值;$g(\vec{x})$ 是惩罚函数值。

通过增加一个附加的惩罚函数值,不可行解的目标值在计算之后会变差。然而,在算法迭代的不同阶段,难以给出惩罚函数合适的值。分离目标与约束法也较为常见,它是将约束转化为一个新的目标后使用多目标优化算法来解决约束的优化问题。

近年来,约束的多目标优化[11]也受到了很多的关注。其中约束支配原则[12](CDP)是一个在约束的多目标优化中广泛使用的约束处理技术。在约束支配原则中,解 x_i 要优于解 x_j 当且仅当在以下条件满足时才成立:(1)解 x_i 和解 x_j 都是可行的且解 x_i 支配解 x_j;(2)解 x_i 与解 x_j 都是不可行解,但是解 x_i 比解 x_j 拥有更小的约束违反值;(3)解 x_i 是可行解而解 x_j 是不可行解。随机数排序法[13](SR)引入了一个概率因子 p_f。当两个解都不可行时,此概率因子用来控制两个体是根据目标值还是约束违反值来比较。当 $p_f=1$ 时,随机数排序法就会等价于约束支配法。Jan 和 Khanum[9]将这两种约束处理技术与 MOEA/D 整合在一起,提出了两种约束的多目标进化算法(MOEA/D-CDP,MOEA/D-SR)。除此之外,在 $\in$ -约束处理方法中[14],将约束违反值小于一个动态变化的阈值 $\in$ 的解视作可行解,$\in$ 的值由一个较大的值逐渐减小为 0。相似地,这个方法可以应用到多目标的情形中。M. Asafuddoula 和 T. Ra[14]提出了一种新的约束多目标进化算法(C-MOEA/D)。该算法在 MOEA/D 框架下使用了一个自适应的约束违反阈值。

1.4 多目标进化算法

多目标进化算法可以按照它们的选解方式分为不同的种类。常见的有基于支配的[12],基于指标的[15]以及基于分解的多目标进化算法[16]。MOEA/D 是一个典型的基于分解的多目标进化算法,将一个多目标优化问题分解为一组单目标优化问题并以协作的方式来优化它们[16]。

为了更好地保持种群的多样性,提出了一个基于网格的约束分解(CDG)框架[3]。在 CDG 中,一个目标函数被选择去优化当且仅当其他所有的目标通过设置上界和下界转换为约束。所有边界的等高线形成了一个网格系统,可以用于选择种群并保持更好的种群多样性。此外,CDG 对于处理不同 PF 的形状也具有鲁棒性,例如在非常凸的 PFs 或者不同尺度的目标上。实验结果显示 CDG 在常规 PFs 同样表现良好。

2 算　法

2.1 基于网格的约束分解

(1)网格系统的设置。

与基于一组均匀分布的权重向量的分解方法不同,CDG-MOEA 中使用的约束分解方法基于一个网格系统。首先,每个目标在理想点和极值点之间被划分为 K(K 是一个参数)个间隔。此时,每个间隔的宽

度可以表示为：

$d_j = (z_j^{nad} - z_j^* + 2 \times \sigma)/K$

因此，解 x 在第 j 个目标上的坐标 $g_j(x)$ 计算如下：

$g_j(x) = \lceil (f_j(x) - z_j^* + \sigma)/d_j \rceil$

其中，$\lceil \cdot \rceil$ 是向上取整函数；$f_j(x)$ 是第 j 个目标函数；σ 是一个很小的正数，用来确保 g_j 大于 0 且小于等于 K 。

定义 6（网格间距）：对于解 $u,v \in R^m$，u,v 之间的网格间距 $GD(u,v)$ 可以定义为：

$GD(u,v) = \max_{j=1,2,\cdots,m} (|g_j(u) - g_j(v)|)$

定义 7（网格邻居）：一个解 x 在网格间距 T 之内的网格邻居可以定义为：

$GN(x,T) = \{x^* \mid GD(x,x^*) \leq T, x, x^* \in R^m\}$

（2）有关约束分解的定义。

约束分解可以基于上述网格系统进行介绍，其中第 l 个目标上的第 k 个子问题定义为：

$$\begin{aligned} &\text{minimize} \quad f_l(x) \\ &\text{subject to} \quad g_j(x) = k_j, j = 1,2,\cdots,m, j \neq 1 \\ &k_j \in \{1,2,\cdots,K\} \\ &x \in \Omega \end{aligned}$$

其中，K 是决定网格数目的参数。

每个目标向量上被均匀地划分为 K 个间隔，这样原始的多目标优化问题就被划分为 $m \times K^{m-1}$ 个子问题。因此，在第 l 个目标上第 k 个子问题中包含的一个解集 $S_l(k)$ 可以定义如下：

$$\begin{aligned} S_l(k) = \{x \mid\ & g_1(x) = k_1, \cdots, g_{l-1}(x) = k_{l-1}, \\ & g_{l+1}(x) = k_{l+1}, \cdots, g_m(x) = k_m\} \end{aligned}$$

$\text{subject to} \quad l \in \{1,2,\cdots,m\}, k \in \{1,2,\cdots,K\}^{m-1}$

2.2 CDG-CS 主要框架

该算法主要基于 CDG-MOEA 算法框架。首先，在解空间生成一组初始解集，并根据这些初始解初始化网格系统，网格系统的初始化方法如 2.1 节。然后，算法的迭代部分，根据网格的邻居定义以及差分进化算子[17]，每次生成大小和初始种群相同的子代种群。下一步，根据子代种群及上代的父代种群，更新理想点（ideal point）和极值点（nadir point）并根据此来更新网格系统。最后，使用基于组合排序的选择方法，选择出下代种群。当满足算法的终止条件，输出保存的最终可行种群。算法的主框架伪代码如下：

算法：主框架。

输入：算法的终止条件；种群大小 N；划分网格间隔数的参数 K

输出：一组可行解集

/ * 初始化 * /

（1）初始化种群并且划分初始网格系统

/ * 生成子代解 * /

（2）利用网格邻居及差分进化（differential evolution）生成子代种群

/ * 更新网格系统 * /

（3）根据生成的子代解更新理想点和极值点，然后根据它们来更新网格系统

/ * 选择新解 * /

（4）使用基于组合排序的方法选择可行解

（5）if 满足终止条件，停止并输出最终可行解集，否则转到步骤 2

2.3 基于组合排序的选择

在 CDG-MOEA 中，提出了一个基于序关系的选解方法用来选择更优的解。其中包括基于分解的排序和字典排序这两部分。这两种排序方法都在提出的选解方法中应用了，但是对于可行解和不可行解，它们的排序方法是不同的。

在 2.1 节介绍了约束分解中的子问题。其中，每个子问题中 $S_l(k)$ 都包含一个解集。在约束问题中，此解集中可能同时包含可行解以及不可行解。在提出的组合排序中，子问题中所有的可行解都按照目标值的优劣去排序。对于每个子问题中的不可行解，它们都根据约束违反程度来排序，并且它们的排序在所有可行解之后。在对每个子问题中的解排完序后，使用字典排序选择出前 N 个最优的解。

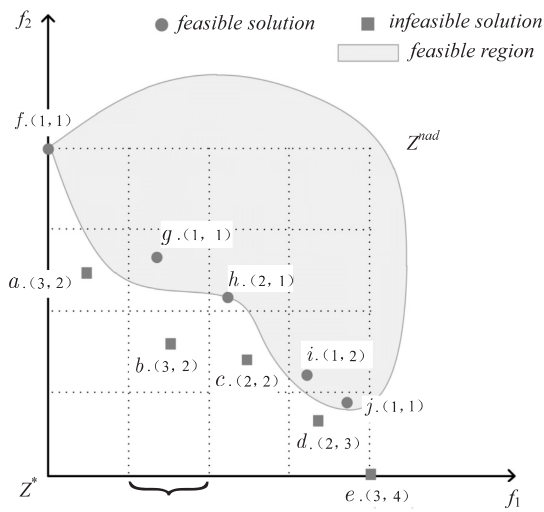

图 1 可行解、不可行解及其排序在一个约束优化问题中的展示

如图 1 所示，阴影区域是可行区域，其中圆点表示可行解，正方形点表示不可行解，其中不可行解的约束违反大小为 cv（ d ）<cv（ c ）<cv（ a ）<cv（ b ）<cv（ e ）。以解 b ，c ，i 所在的子问题举例，i 为可行解，所以在 f_1 方向上的排序为 1，而对于不可行解 b ，c ，由于 cv（ c ）<cv（ b ），所以不可行解 c 在 f_1 方向上的排序为 2，解 b 的排序是 3。每个解根据基于组合排序的结果都标识出了。表 1 展示了选解的过程，在每个子

问题中的排序结束后,应用字典排序可以选择出前 N 个解,作为下一次迭代的父代种群。

表 1　基于组合排序选解的过程

$R(x)$	$R'(x)$	字典排序
a.(3,2)	a.(2,3)	f.(1,1)√
b.(3,2)	b.(2,3)	g.(1,1)√
c.(2,2)	c.(2,2)	j.(1,1)√
d.(2,3)	d.(2,3)	h.(1,2)√
e.(3,4)	e.(3,4)	i.(1,2)√
f.(1,1)	f.(1,1)	c.(2,2)×
g.(1,1)	g.(1,1)	a.(2,3)×
h.(2,1)	h.(1,2)	b.(2,3)×
i.(1,2)	i.(1,2)	d.(2,3)×
j.(1,1)	j.(1,1)	e.(3,4)×

3　实验与分析

为了验证提出算法的性能,选择了约束多目标优化问题(CF)进行了对比分析。对比的算法有 NSGAⅡ-CDP[12]、MOAE/D-CDP[9] 以及性能比较好的 CMOEA/D[17]算法。

3.1　实验测试集

CF 测试问题集[18]是由 Zhang Qingfu 提出并用于 CEC2009 的多目标优化竞赛中。其中 CF1 的 Pareto 前沿是由一组不连续的点集组成,CF3,CF5 以及 CF7 问题具有一定的挑战性,由于这些问题的 Pareto 前沿很难去近似,它们的目标函数以及约束函数比较复杂。

3.2　度量指标

实验中选取反向迭代距离(IGD)[19-20]。该指标是指真实 PF 中的点到所求帕里托近似解集中的解的最小距离的平均值。设 P^* 是真实 PF 采样点所组成的集合,P 是求得的帕里托近似解集,IGD 有如下定义:

$$\mathrm{IGD}(P,P^*)=\frac{1}{|P^*|}\sum_{v\in P^*}\mathrm{dist}(v,P)$$

其中,$\mathrm{dist}(v,P)$ 是一个向量 $v\in P^*$ 到 P 中最近向量的欧氏距离;$|P^*|$ 是集合 P^* 的基数。IGD 的值越小,表明 P 能够更好地近似整个 PF。

3.3　实验参数设置

种群大小 N 设为 200;划分网格的参数 K 设为 120;算法的终止条件:对所有算法所有测试问题,函数评估次数设置为 300 000;对于所有的基准测试集,算法独立运行 30 次,最后结果取平均值。

3.4　实验结果与分析

实验比较了 CS-CDG 与 NSGAⅡ-CDP,MOEA/D-CDP 和 CMOEA/D 在 CF 问题上的结果,最终的 IGD 值对比如表 2 所示。CS-CDG 在所有问题上都比 NSGAⅡ-CDP,MOEA/D-CDP 取得了更好的效果。在与效果较好的 CMOEA/D 算法的比较中,除了 CF1 问题实例,其他问题实例上 CS-CDG 都取得了更好的结果。可以看到,基于组合排序的约束处理方法与基于网格的约束分解框架的结合,能够有效地处理约束多目标优化问题。

表 2　CS-CDG 与比较算法在 CF 问题上 IGD 的比较

问题实例	NSGAⅡ-CDP	MOEA/D-CDP	CMOEAD	CS-CDG
CF1	8.430E-03(1.165E-03)	1.019E-03(4.287E-04)	5.662E-04(2.242E-04)	4.491E-03(4.820E-04)
CF2	2.167E-02(1.818E-02)	8.326E-03(1.940E-02)	3.658E-03(3.560E-03)	1.785E-03(1.833E-04)
CF3	2.316E-01(3.640E-02)	2.423E-01(8.715E-02)	2.409E-01(1.509E-01)	1.530E-01(4.840E-02)
CF4	6.799E-02(1.497E-02)	5.867E-02(5.006E-02)	7.625E-03(2.653E-03)	5.336E-03(7.273E-04)
CF5	2.232E-01(7.041E-02)	4.513E-01(1.756E-01)	2.135E-01(9.029E-02)	1.372E-01(1.097E-01)
CF5	1.188E-01(4.763E-02)	6.034E-02(3.109E-02)	5.525E-02(1.947E-02)	2.261E-02(1.961E-02)
CF7	2.797E-01(1.249E-01)	3.265E-01(1.616E-01)	1.717E-01(1.146E-01)	1.364E-01(7.711E-02)

4 结束语

文中提出了一种约束多目标优化算法。该算法在基于网格的约束分解框架的基础上，使用了一个组合排序的约束处理方法，可以在保证种群多样性的同时，选择出种群中较好的可行解。由于基于网格的约束分解具有较好的多样性，基于组合排序的约束处理方法也能在一定程度上维持收敛性，多样性与可行性的一个平衡。通过在 CF 约束测试问题集上的实验结果可以看到，CS-CDG 在约束的多目标优化问题上具有很好的效果。

参考文献：

[1] 公茂果，焦李成，杨咚咚，等. 进化多目标优化算法研究[J]. 软件学报，2009，20(2)：271-289.

[2] 王 勇，蔡自兴，周育人，等. 约束优化进化算法[J]. 软件学报，2009，20(1)：11-29.

[3] CAI Xinye，MEI Zhiwei，FAN Zhun，et al. A constrained decomposition approach with grids for evolutionary multiobjective optimization [J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation，2018，22(4)：564-577.

[4] GONG Wenyin，CAI Zhihua，LIANG Dingwen. Adaptive ranking mutation operator based differential evolution for constrained optimization[J]. IEEE Transactions on Cybernetics，2015，45(4)：716-727.

[5] HAMZA N M，ESSAM D L，SARKER R A. Constraint consensus mutation-based differential evolution for constrained optimization[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation，2015，20(3)：447-459.

[6] MAESANI A，IACCA G，FLOREANO D. Memetic viability evolution for constrained optimization[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation，2016，20(1)：125-144.

[7] ZENG Sanyou，JIAO Ruwang，LI Changhe，et al. A general framework of dynamic constrained multiobjective evolutionary algorithms for constrained optimization[J]. IEEE Transactions on Cybernetics，2017，47(9)：2678-2688.

[8] MEZURA-MONTES E，COELLO C A C. Constraint-handling in nature-inspired numerical optimization：past，present and future[J]. Swarm & Evolutionary Computation，2011，1(4)：173-194.

[9] JAN M A，KHANUM R A. A study of two penalty-parameterless constraint handling techniques in the framework of MOEA/D[J]. Applied Soft Computing，2013，13(1)：128-148.

[10] WOLDESENBET Y G，YEN G G，TESSEMA B G. Constraint handling in multiobjective evolutionary optimization [J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation，2009，13(3)：514-525.

[11] 孟红云，张小华，刘三阳. 用于约束多目标优化问题的双群体差分进化算法[J]. 计算机学报，2008，31(2)：228-235.

[12] DEB K，PRATAP A，AGARWAL S，et al. A fast and elitist multiobjective genetic algorithm：NSGA-II[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation，2002，6(2)：182-197.

[13] RUNARSSON T P，YAO X. Stochastic ranking for constrained evolutionary optimization[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation，2000，4(3)：284-294.

[14] TAKAHAMA T，SAKAI S. Constrained optimization by the ε constrained differential evolution with an archive and gradient-based mutation [C]//IEEE congress on evolutionary computation. Barcelona，Spain：IEEE，2010：1-9.

[15] ZITZLER E，KÜNZLI S. Indicator-based selection in multiobjective search[C]//International conference on parallel problem solving from nature. [s. l.]：[s. n.]，2004：832-842.

[16] ZHANG Qingfu，LI Hui. MOEA/D：a multiobjective evolutionary algorithm based on decomposition[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation，2007，11(6)：712-731.

[17] ASAFUDDOULA M，RAY T，SARKER R，et al. An adaptive constraint handling approach embedded MOEA/D [C]//IEEE congress on evolutionary computation. Brisbane，QLD，Australia：IEEE，2012：1-8.

[18] ZHANG Q. Multiobjective optimization test instances for the CEC 2009 special session and competition[R]. [s. l.]：[s. n.]，2008.

[19] ZHOU Aimin，ZHANG Qingfu，JIN Yaochu，et al. A model-based evolutionary algorithm for bi-objective optimization [C]//IEEE congress on evolutionary computation. Edinburgh，Scotland，UK：IEEE，2005：2568-2575.

[20] ZHANG Qingfu，ZHOU Aimin，JIN Yaochu. RM-MEDA：a regularity model-based multiobjective estimation of distribution algorithm[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation，2008，12(1)：41-63.