

基于符号计算的 BBM 方程的精确解

胡凯丽, 李 岩

(陕西师范大学 计算机科学学院, 陕西 西安 710119)

摘 要:符号计算又称计算机代数,是涉及数学、计算机科学和人工智能的新兴交叉学科,研究如何在计算机上进行符号演算和自动推理,是数学机械化的主要工具。常用的符号计算系统主要有 Maple、Mathematica、REDUCE 等。非线性偏微分方程可以真实准确地描述客观世界中的自然现象,因此求解非线性偏微分方程精确解具有非常重要的意义。近年来,随着各种求解方法的不断出现,过去难以求解的方程得到了解决,尤其是借助符号计算系统,复杂的求解过程变得更加简洁快速。文中借助符号计算系统 Maple,利用 (G'/G^2) -展开法求解 Benjamin-Bona-Mahony 方程,得到了方程的三角函数通解、双曲函数通解以及有理函数通解。特别地,当双曲函数通解中的常数取特殊值时,得到了方程的孤立波解。研究结果表明, (G'/G^2) -展开法简洁高效,适用于其他非线性偏微分方程。

关键词:计算机代数; Benjamin-Bona-Mahony 方程; (G'/G^2) -展开法; 精确解

中图分类号: TP31

文献标识码: A

文章编号: 1673-629X(2019)05-0070-04

doi:10.3969/j.issn.1673-629X.2019.05.015

Exact Solution of BBM Equation Based on Symbolic Computation

HU Kai-li, LI Yan

(School of Computer Science, Shaanxi Normal University, Xi'an 710119, China)

Abstract: Symbolic computation, also known as computer algebra, is a new interdisciplinary subject involving mathematics, computer science and artificial intelligence. It studies how to perform symbolic computation and automatic reasoning on computers and is the main tool of mathematical mechanization. The common symbolic computation systems include Maple, Mathematica, REDUCE and so on. The nonlinear partial differential equation can describe the natural phenomena in the objective world truly and accurately. Therefore, it is very important to solve the exact solution of the nonlinear partial differential equation. In recent years, with the continuous emergence of various solution methods, the equations which are difficult to solve in the past have been solved, especially with the aid of symbolic computing system, the complex solution process becomes more concise and rapid. With the help of symbolic computation system Maple, the (G'/G^2) -expansion method is used to solve the Benjamin-Bona-Mahony equation for the general solution of the trigonometric function, the hyperbolic function and the rational function. In particular, when the constants in the general solution of hyperbolic functions are given special values, the solitary wave solutions of the equations are obtained. The results show that the (G'/G^2) -expansion method, which is simple and efficient, is suitable for other nonlinear partial differential equations.

Key words: computer algebra; Benjamin-Bona-Mahony equation; (G'/G^2) -expansion method; exact solution

0 引 言

随着计算机科学的迅猛发展,计算机技术越来越多地服务于各行各业,如教育、医疗、交通等。在数学领域,也逐渐兴起了与计算机相结合的学科,即计算机代数。20 世纪 60 年代早期,诞生了最早的计算机代数系统,科学家用 LISP 语言编写了第一个符号积分程序,随后一些专业化计算机代数程序也开始问世。计算机代数也被称为符号代数计算(简称符号计算),是

数学、计算机科学和人工智能等领域新兴的交叉学科。

在不断探索和解决各种复杂问题的过程中,人们发现非线性这一现象普遍存在于自然界、人类社会等众多领域。20 世纪 60 年代以来,研究非线性现象获得了巨大的进展,其应用也变得较为广泛,由此发展形成了研究非线性现象的普遍规律学科,即非线性动力学。随着科学技术的不断发展,非线性动力学已经广泛地渗透到了各个领域,例如通信技术、计算机技术、

收稿日期:2018-07-05

修回日期:2018-11-15

网络出版时间:2018-11-22

基金项目:国家自然科学基金(11471004)

作者简介:胡凯丽(1994-),女,硕士,研究方向为非线性科学与符号计算。

网络出版地址: <http://jns.cnki.net/kcms/detail/61.1450.TP.20181122.1506.002.html>

材料科学、生命科学、动力系统等。因此,非线性偏微分方程的求解问题成为了研究的重点。近年来,人们提出了多种求解非线性偏微分方程的方法,例如齐次平衡法^[1]、Tanh 函数展开法^[2-4]、Hirota 双线性展开法^[5]、Jacobi 椭圆函数展开法^[6]、 $(G'/G) -$ 展开法^[7]等。文献[8]提出了推广的 $(G'/G) -$ 展开法— $(G'/G^2) -$ 展开法,实践表明, $(G'/G^2) -$ 展开法在求解非线性微分方程时具有简单、快捷等优势,已求解了部分方程^[9-16]。因此,文中利用该方法研究 Benjamin-Bona-Mahony^[17-19]方程。

文中应用符号计算系统 Maple 并借助 PDEtools 工具包,结合 $(G'/G^2) -$ 展开法求解 BBM 方程,当精确解中的常数取特殊值时得到方程的孤波解,利用 plots 工具包绘制出孤波解的三维图。

1 $(G'/G^2) -$ 展开法

考虑如下形式的非线性偏微分方程:

$$P(u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}, \dots) = 0 \quad (1)$$

其中, $u = u(x, t)$ 是未知函数, P 是关于 u 及 u 的各阶偏导数的多项式。利用 $(G'/G^2) -$ 展开法求解方程1的具体步骤如下:

第1步:对方程1作行波变换 $u = u(\xi)$, $\xi = x - Vt$, 得到如下常微分方程。

$$Q(u, u', u'', u''', \dots) = 0 \quad (2)$$

第2步:假设方程2有如下形式的解。

$$u(\xi) = \sum_{i=0}^m \alpha_i \left(\frac{G'}{G^2} \right)^i, i = 0, 1, \dots, m \quad (3)$$

其中, $G = G(\xi)$ 且满足二阶线性常微分方程。

$$\left(\frac{G'}{G^2} \right)' = a + b \left(\frac{G'}{G^2} \right)^2 \quad (4)$$

其中, α_i, a, b 是待定常数; m 可以通过齐次平衡法得到。

利用 Maple 求解方程4的具体过程如下所述:

(1)调用 Maple 的 PDEtools 工具包,输入方程4;

(2)利用 dsolve() 方法直接求解方程4,得到 $G(\xi)$ 的值;

(3)令 $\psi(\xi) = \frac{G'(\xi)}{G^2(\xi)}$, 求出 $\psi(\xi)$ 即可。

具体代码如下:

```
>restart; with(PDEtools);
>eq1:=diff(diff(G(xi),xi)/G(xi)^2,xi)=a+b*(diff(G
(xi),xi)/G(xi)^2);
>eq2:=psi(xi)=diff(G(xi),xi)/G(xi)^2;
>eq3:=dsolve(eq1,G(xi));
>eq4:=dsolve(eq3,eq2);
```

由上述过程,方程4有以下三组解:

(1)当 $ab \neq 0$ 时

$$\frac{G'(\xi)}{G^2(\xi)} = -\frac{\sqrt{ab}}{b} \frac{C_1 \cos(\sqrt{ab}\xi) + C_2 \sin(\sqrt{ab}\xi)}{C_1 \sin(\sqrt{ab}\xi) - C_2 \cos(\sqrt{ab}\xi)} \quad (5)$$

(2)当 $ab < 0$ 时

$$\frac{G'(\xi)}{G^2(\xi)} = -\frac{\sqrt{|ab|}}{b} \frac{C_1 \sinh(\sqrt{|ab|}\xi) + C_2 \cosh(\sqrt{|ab|}\xi)}{C_1 \cosh(\sqrt{|ab|}\xi) + C_2 \sinh(\sqrt{|ab|}\xi)} \quad (6)$$

(3)当 $a = 0, b \neq 0$ 时

$$\frac{G'(\xi)}{G^2(\xi)} = -\frac{C_1}{C_2 b \xi + C_2 b} \quad (7)$$

其中, C_1, C_2 为任意常数。

第3步:将式3代入方程2,借助方程4,可以得到关于 (G'/G^2) 的多项式,令其各次幂的系数为零,可得到一组关于 α_i, a, b 的代数方程组,通过求解方程组得到 α_i, a, b 的值。

第4步:将第3步得到的结果代入方程3和方程4,即可得方程1的解。

2 $(G'/G^2) -$ 展开法的应用及实现

根据第1节中的算法步骤,借助 Maple,现考虑如下形式的BBM方程。

$$u_t + u_x + uu_x - u_{xx} = 0 \quad (8)$$

将行波变换 $u(x, t) = u(\xi)$, $\xi = x - Vt$ 代入式8,然后对其两边积分,取积分常数为零,得到:

$$-Vu + u + (1/2)u^2 + Vu' = 0 \quad (9)$$

由齐次平衡法得 $N = 2$ 。因此,设方程8的解为:

$$u(\xi) = \alpha_2 \left(\frac{G'}{G^2} \right)^2 + \alpha_1 \left(\frac{G'}{G^2} \right) + \alpha_0 \quad (10)$$

利用式4和式10,分别求出 u', u^2 的值,将 u', u^2 的值代入式9,得到:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2} \alpha_2^2 + 6Vb^2 \alpha_2 \right) \left(\frac{G'}{G^2} \right)^4 + (\alpha_1 \alpha_2 + 2Vb^2 \alpha_1) \left(\frac{G'}{G^2} \right)^3 + \\ & (-V\alpha_2 + \alpha_2 + \alpha_0 \alpha_2 + \frac{1}{2} \alpha_1^2 + 8Vab \alpha_2) \left(\frac{G'}{G^2} \right)^2 + \\ & (-V\alpha_1 + \alpha_1 + \alpha_0 \alpha_1 + 2Vab \alpha_1) \frac{G'}{G^2} - V\alpha_0 + \alpha_0 + \\ & \frac{1}{2} \alpha_0^2 + 2V\alpha_2 a^2 = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

令 (G'/G^2) 的各次幂系数分别为零,可以得到以下两组参数:

$$\begin{cases} \alpha_0 = -\frac{12ab}{4ab+1} \\ \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = -\frac{12b^2}{4ab+1} \\ V = \frac{1}{4ab+1} \end{cases} \quad (12)$$

$$\begin{cases} \alpha_0 = \frac{4ab}{4ab-1} \\ \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = \frac{12b^2}{4ab-1} \\ V = -\frac{1}{4ab-1} \end{cases} \quad (13)$$

Maple 符号计算代码如下:

```
>PDEeq:=diff(u(x,t),t)+diff(u(x,t),x)+u(x,t)*diff(u
(x,t),x)-diff(u(x,t),x,x,t);
>ode1:=dsubs(u(x,t)=u(x-V*t),PDEeq);
>ode2:=subs(x-V*t=xi,ode1);
>ode2:=convet(ode2,diff);
>ode3:=int(ode2,xi);
>ode4:=dsubs(u(xi)=alpha[0]+alpha[1]*psi(xi)+alpha
[2]*psi(xi)^2,ode3);
>ode5:=dsubs(diff(psi(xi),xi),ode4);
>ode6:=collect(ode5,psi);
>ltt:=[];
for i from 1 to nops(ode6)
do p(i):=coeffs(coeffs(op(i,ode6)),psi(xi));
ltt:=[p(i),op(ltt)];
end do;
ltt;
>solve(ltt,{alpha[0],alpha[1],alpha[2],V});
```

则方程 8 的解为:

$$u_1(\xi) = -\frac{12b^2}{4ab+1} \left(\frac{G'}{G^2}\right)^2 - \frac{12ab}{4ab+1} \quad (14)$$

$$u_2(\xi) = \frac{12b^2}{4ab-1} \left(\frac{G'}{G^2}\right)^2 + \frac{4ab}{4ab-1} \quad (15)$$

把方程 4 的解即 (G'/G^2) 的值分别代入式 14 和式 15, 可得 BBM 方程的精确解。

第一种情况, 将方程 4 的解代入式 14:

(1) 当 $ab > 0$ 时, 得到的三角函数通解为

$$u_{11}(\xi) = -\frac{12ab}{4ab+1} \left(\frac{C_1 \cos(\sqrt{ab}\xi) + C_2 \sin(\sqrt{ab}\xi)}{C_1 \sin(\sqrt{ab}\xi) - C_2 \cos(\sqrt{ab}\xi)} \right)^2 - \frac{12ab}{4ab+1} \quad (16)$$

其中, C_1, C_2 为任意常数, $\xi = x - \frac{1}{4ab+1}t$ 。

(2) 当 $ab < 0$ 时, 得到的双曲函数通解为:

$$u_{12}(\xi) = -\frac{12|ab|}{4ab+1} \left(\frac{C_1 \sinh(\sqrt{|ab|}\xi) + C_2 \cosh(\sqrt{|ab|}\xi)}{C_1 \cosh(\sqrt{|ab|}\xi) + C_2 \sinh(\sqrt{|ab|}\xi)} \right)^2 - \frac{12ab}{4ab+1} \quad (17)$$

其中, C_1, C_2 为任意常数, $\xi = x - \frac{1}{4ab+1}t$ 。

对于式 17, 考虑以下两种特殊情况, 可获得如下形式的孤立波解:

(a) 当 $C_1 \neq 0, C_2 = 0$ 时, 其孤立波解为:

$$u_{12}(\xi) = -\frac{12|ab|}{4ab+1} \tanh^2(\sqrt{|ab|}\xi) - \frac{12ab}{4ab+1} \quad (18)$$

若将式 18 中的常数分别取值为: $a = 0.5, b = 0.9, V = 1$, 利用 Maple 中的 plots 工具包可绘制出孤波解的三维图, 如图 1 所示。

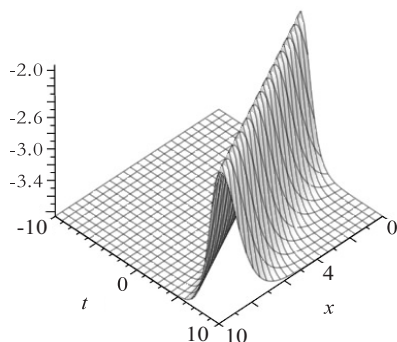


图 1 孤波解的三维图 ($x = 0 \cdots 10, t = -10 \cdots 10$)

(b) 当 $C_1 = 0, C_2 \neq 0$ 时, 其孤立波解为:

$$u_{12}(\xi) = -\frac{12|ab|}{4ab+1} \coth^2(\sqrt{|ab|}\xi) - \frac{12ab}{4ab+1} \quad (19)$$

(3) 当 $a = 0, b \neq 0$ 时, 得到有理函数解为:

$$u_{13}(\xi) = -\frac{12b^2}{4ab+1} \left(\frac{C_1}{C_2 b \xi + C_2 b} \right)^2 - \frac{12ab}{4ab+1} \quad (20)$$

其中, C_1, C_2 为任意常数, $\xi = x - \frac{1}{4ab+1}t$ 。

第二种情况, 将方程 4 的解代入式 15:

(1) 当 $ab > 0$ 时, 得到三角函数通解为:

$$u_{21}(\xi) = \frac{12ab}{4ab-1} \left(\frac{C_1 \cos(\sqrt{ab}\xi) + C_2 \sin(\sqrt{ab}\xi)}{C_1 \sin(\sqrt{ab}\xi) - C_2 \cos(\sqrt{ab}\xi)} \right)^2 + \frac{4ab}{4ab-1} \quad (21)$$

其中, C_1, C_2 为任意常数, $\xi = x + \frac{1}{4ab-1}t$ 。

(2) 当 $ab < 0$ 时, 得到的双曲函数通解为:

$$u_{22}(\xi) = \frac{12|ab|}{4ab-1} \left(\frac{C_1 \sinh(\sqrt{|ab|}\xi) + C_2 \cosh(\sqrt{|ab|}\xi)}{C_1 \cosh(\sqrt{|ab|}\xi) + C_2 \sinh(\sqrt{|ab|}\xi)} \right)^2 + \frac{4ab}{4ab-1} \quad (22)$$

其中, C_1, C_2 为任意实数, $\xi = x + \frac{1}{4ab-1}t$ 。

对于式 22, 考虑以下两种特殊情况, 可获得其如下形式的孤立波解。

(a) 当 $C_1 \neq 0, C_2 = 0$ 时, 其孤立波解为:

$$u_{22}(\xi) = \frac{12|ab|}{4ab-1} \tanh^2(\sqrt{|ab|}\xi) + \frac{4ab}{4ab-1} \quad (23)$$

若将式 23 的常数分别取值为: $a = 2, b = 3.7, V = 0.21$, 利用 Maple 中的 plots 工具包可绘制出孤波解的三维图, 如图 2 所示。

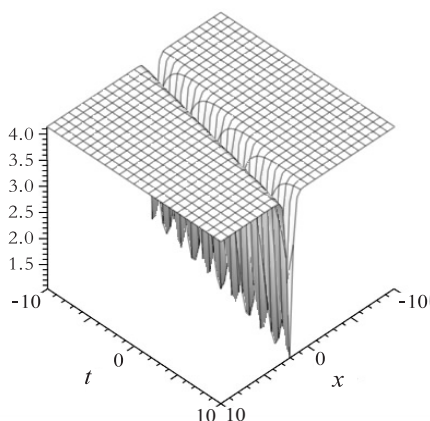


图 2 孤波解的三维图 ($x = -10 \cdots 10$, $t = -10 \cdots 10$)

(b) 当 $C_1 = 0, C_2 \neq 0$ 时, 其孤立波解为:

$$u_{22}(\xi) = \frac{12|ab|}{4ab-1} \coth^2(\sqrt{|ab|}\xi) + \frac{4ab}{4ab-1} \quad (24)$$

(3) 当 $a = 0, b \neq 0$ 时, 得到的有理函数解为:

$$u_{23}(\xi) = \frac{12b^2}{4ab-1} \left(\frac{C_1}{C_1 b \xi + C_2 b} \right)^2 + \frac{4ab}{4ab-1} \quad (25)$$

其中, C_1, C_2 为任意常数, $\xi = x + \frac{1}{4ab-1}t$ 。

3 结束语

采用 (G'/G^2) -展开法研究了 BBM 方程, 在符号计算系统 Maple 的帮助下, 得到了方程的三角函数、双曲函数以及有理函数形式的精确解, 且当双曲函数解中部分参数取特殊值时, 得到了方程的孤立波解, 从而丰富了 BBM 方程的精确解系。从求解过程及求得的精确解来看, 该方法简单、高效, 是求解非线性方程的较好选择。

参考文献:

- [1] 王明亮, 李志斌, 周宇斌. 齐次平衡原则及其应用[J]. 兰州大学学报: 自然科学版, 1999, 35(3): 8-15.
- [2] FAN E G. Extended tanh-method and its applications to non-

linear equations[J]. Physics Letters A, 2000, 277(4-5): 212-218.

- [3] 王艳红, 王振辉, 毛星星. KdV-mKdV 方程的精确解[J]. 河南理工大学学报: 自然科学版, 2013, 32(1): 118-121.
- [4] 马云峰. 推广 Tanh 函数展开法求 KdV 方程新的精确解[J]. 兰州工业学院学报, 2014, 21(4): 27-29.
- [5] HIROTA R. Exact solution of the Korteweg de-Vries equation for multiple collisions of solitons[J]. Physical Review Letters, 1971, 27(18): 1192-1194.
- [6] LIU Shikuo, FU Zuntao, LIU Shida, et al. Jacobi elliptic function expansion method and periodic wave solutions of nonlinear wave equations[J]. Physics Letters A, 2001, 289(1-2): 69-74.
- [7] WANG M L, LI X Z, ZHANG J L. The (G'/G) -expansion method and traveling wave solutions of nonlinear evolution equations in mathematical physics[J]. Physics Letters A, 2008, 372(4): 417-423.
- [8] LI W A, CHEN H, ZHANG G C. The (w/g) -expansion method and its application to Vakhnenko equation[J]. Chinese Physics B, 2009, 18(2): 400-404.
- [9] 王思源, 陈浩. 求解 KdV 方程和 mKdV 方程的新方法: (g'/g^2) 展开法[J]. 华南师范大学学报: 自然科学版, 2014, 46(1): 42-45.
- [10] 孙鹏, 崔泽建. (g'/g^2) 展开法及其在 KPP 方程中的应用[J]. 西华师范大学学报: 自然科学版, 2015, 36(4): 336-338.
- [11] 冯庆江, 肖绍菊. 应用改进的 (G'/G^2) 展开法求 Zakharov 方程的精确解[J]. 量子电子学报, 2015, 32(1): 40-45.
- [12] 陈晓艳, 吉飞宇, 鱼翔. 推广的 (G'/G) 展开法与 Zhiber-Shabat 方程的精确解[J]. 纯粹数学与应用数学, 2012, 28(4): 546-552.
- [13] 叶彩儿, 张卫国. 求 BBM 方程精确行波解的新方法[J]. 上海理工大学学报, 2010, 32(4): 307-310.
- [14] 姜喜春. BBM 方程的显式精确行波解[J]. 辽宁工业大学学报, 2010, 30(2): 136-140.
- [15] SINGH K, GUPTA R K, KUMAR S. Benjamin - Bona - Mahony (BBM) equation with variable coefficients; similarity reductions and Painlevé analysis[J]. Applied Mathematics & Computation, 2011, 217(16): 7021-7027.
- [16] BENJAMIN T B, BONA J L, MAHONY J J. Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems[J]. Philosophical Transactions of The Royal Society B Biological Sciences, 1972, 272(1220): 47-78.
- [17] 套格图桑, 斯仁道尔吉. BBM 方程和修正的 BBM 方程新的精确孤立波解[J]. 物理学报, 2004, 53(12): 4052-4060.
- [18] 张哲, 李德生. 修正的 BBM 方程新的精确解[J]. 原子与分子物理学报, 2013, 30(5): 829-832.
- [19] 刘岫, 田立新, 吴玉海. 基于首次积分法对修正 BBM 方程的精确解的研究[J]. 数学的实践与认识, 2013, 43(1): 276-280.