

# 一种新的字典更新和原子优化的图像去噪算法

汤中民,唐贵进,刘小花,崔子冠,刘 峰

(南京邮电大学 江苏省图像处理与图像通信重点实验室,江苏 南京 210003)

**摘 要:**经典的 K-奇异值分解(K-SVD)算法通过字典对图像进行稀疏表示,在去噪的同时保持了原图像的有效信息。但是在基于噪声图像字典学习所得到的学习字典中通常含有大量的噪声信息,这也使得恢复出的图像仍然含有许多噪声,特别是在强噪声下,该算法性能表现较差。鉴于 K-SVD 算法的局限性,提出了一种新的基于字典更新和字典原子优化的图像去噪算法。首先利用一种加权的顺序字典学习(SDL)方法替代 K-SVD 算法,在字典更新阶段添加稀疏约束,这样能够得到更为稀疏的表示图像的字典;然后自适应地根据图像的结构复杂度和噪声强度进行字典原子检测并删除噪声原子;最后利用优化后的字典重构图像。实验结果表明,该算法与经典 K-SVD、SDL 等去噪算法相比,能够取得更好的去噪效果。

**关键词:**字典学习;稀疏表示;顺序更新;字典优化;图像去噪

**中图分类号:**TP391.41

**文献标识码:**A

**文章编号:**1673-629X(2019)04-0033-05

**doi:**10.3969/j.issn.1673-629X.2019.04.007

## A New Image Denoising Algorithm Based on Dictionary Updating and Atom Optimization

TANG Zhong-min, TANG Gui-jin, LIU Xiao-hua, CUI Zi-guan, LIU Feng

(Key Lab on Image Processing and Image Communication of Jiangsu Province, Nanjing University of Posts and Telecommunications, Nanjing 210003, China)

**Abstract:** The classical K-singular value decomposition (K-SVD) algorithm sparsely expresses the image through the dictionary, and retains the original image's effective information while denoising. However, the learning dictionary based on the noise image dictionary usually contains a large amount of noise information, which also makes the recovered image still contain many noises. Especially under strong noise, the performance of the algorithm is poor. In view of the limitations of the K-SVD algorithm, we propose a new image denoising algorithm based on dictionary updating and dictionary atom optimization. Firstly, a weighted sequential dictionary learning (SDL) method is used instead of the K-SVD algorithm to add sparse constraints in the dictionary update phase, so that a more sparse representation of the image dictionary can be obtained. Second, the dictionary noise atom is detected adaptively according to the structural complexity and noise intensity of the image and removed. Finally, the image can be reconstructed by using the optimized dictionary. The experiment shows that this algorithm can achieve better denoising results compared with the classical K-SVD, SDL and other denoising algorithms.

**Key words:** dictionary learning; sparse representation; sequence updating; dictionary optimization; image denoising

## 0 引言

随着压缩感知理论的完善和发展,稀疏表示和字典学习在不同领域得到了广泛应用,包括图像去噪<sup>[1-2]</sup>、人脸识别<sup>[3]</sup>、图像压缩<sup>[4]</sup>等。基于字典学习的

方法已经成功应用在图像去噪领域,这些方法主要是利用过完备字典<sup>[5]</sup>的冗余性对图像进行稀疏表示,在保证图像结构性的同时达到去噪的目的。

在稀疏编码阶段使用的稀疏约束是任何字典学习

收稿日期:2018-05-21

修回日期:2018-09-26

网络出版时间:2018-12-20

**基金项目:**国家自然科学基金(61501260);江苏省研究生科研与实践创新计划项目(KYCX17\_0776);江苏高校优势学科建设工程和南京邮电大学自然科学基金(NY214039)

**作者简介:**汤中民(1991-),男,硕士研究生,研究方向为图像处理与多媒体通信;唐贵进,副教授,硕导,研究方向为图像处理、视频分析、多媒体通信等;刘小花,实验师,研究方向为图像处理与多媒体通信等;崔子冠,副教授,硕导,研究方向为视频编码与传输、图像处理、视频主观质量评价等;刘 峰,教授,博导,研究方向为网络视频传输、多媒体通信等。

网络出版地址: <http://kns.cnki.net/kcms/detail/61.1450.TP.20181220.1049.054.html>

算法的关键。但是 K-SVD<sup>[6]</sup> (K-singular value decomposition) 算法的稀疏约束仅仅在稀疏编码阶段使用,却没有在字典更新阶段使用。为了克服这一缺点,顺序字典学习<sup>[7]</sup> (sequential dictionary learning, SDL) 和加权的顺序字典学习<sup>[8]</sup> 相继提出。该方法在字典更新阶段使用稀疏约束,更能够有效地更新字典,因此提出使用加权的顺序字典学习替代 K-SVD 算法。在字典原子优化部分,考虑到在较高噪声的影响下,更新后的字典中通常含有许多噪声原子,然而直接阈值删除<sup>[9]</sup> 或者替代<sup>[10]</sup> 检测的噪声原子依然存在不足。因而根据原始含噪图像以及纹理图像(由 MCA<sup>[11-12]</sup> 图像分离得到)的复杂度,提出采用 Bartlett 检验法自适应地判断字典噪声原子,进而删除这些噪声原子以达到优化字典的目的。

## 1 基于 K-SVD 的图像去噪算法

对于给定大小为  $\sqrt{N} \times \sqrt{N}$  的原始图像  $X$  和含噪图像  $Y$ ,字典  $D \in R^{n \times K}$  表示含有  $K$  个  $n$  维的字典原子。图像去噪模型可以表示为:

$$\{\hat{a}_{ij}, \hat{X}\} = \arg \min_{a_{ij}, X} \lambda \|X - Y\|_2^2 + \sum_{ij} \mu_{ij} \|a_{ij}\|_0 + \sum_{ij} \|Da_{ij} - R_{ij}X\|_2^2 \quad (1)$$

其中,右边第一项为数据保真项,用来控制含噪信号矩阵  $Y$  与去噪后信号矩阵  $X$  之间的逼近程度,  $\lambda$  是正则化参数;第二项为稀疏性约束,  $a_{ij}$  为稀疏系数;第三项表示重建子图与原原子图的相似性,  $R_{ij}$  为子图提取矩阵,  $\hat{X}$  为去噪后的图像。

去噪过程为:初始字典  $D$ , 取  $X = Y$ 。首先,通过 OMP 算法得到稀疏分解系数;再利用 K-SVD 算法更新字典。上述两个步骤经过一定次数的迭代,得到最终的稀疏分解系数  $a_{ij}$  和字典  $D$ , 并且重构图像得到最终去噪图像  $\hat{X}$ :

$$\hat{X} = (\lambda I + \sum_{ij} R_{ij}^T R_{ij})^{-1} (\lambda Y + \sum_{ij} R_{ij}^T D \hat{a}_{ij}) \quad (2)$$

## 2 一种新的字典更新和字典原子优化的图像去噪算法

### 2.1 加权顺序字典更新

K-SVD 算法只是在稀疏编码阶段使用了稀疏约束,但是在字典更新阶段却没有使用。而使用加权的顺序字典更新来替代 K-SVD 字典更新,可以有效利用稀疏约束,得到更为近似表示原数据的学习字典。加权顺序字典更新模型<sup>[8]</sup> 为:

$$\{\hat{D}, \hat{A}\} = \arg \min_{D, A} \text{tr}((Y - DA)^T Q (Y - DA)) \\ \text{subject to } \|a_i\|_0 \leq s, \forall i \in [1, N] \\ \text{万方数据} \quad (3)$$

其中,  $Q = \text{diag}(\varepsilon_1^2, \dots, \varepsilon_m^2)^{-1} \in R^{m \times m}$  是残差矩阵  $E = Y - DA$  的协方差对角线元素构成对角矩阵的逆矩阵,  $\text{tr}$  是矩阵迹的运算符。  $Q$  是一个权重矩阵,对残差矩阵的不同方差赋予不同的权重。约束  $a_i$  的  $l_0$  问题是非凸的,可以通过交替优化的方法来解决。

在稀疏编码阶段,采用凸松弛的方法,然后保持字典固定并通过  $l_1$  范数最小化方法来求解:

$$\hat{a}_i = \arg \min_{a_i} \|y_i - Da_i\|_Q^2 + \gamma \|a_i\|_1, \\ \forall i \in [1, N] \quad (4)$$

其中,  $\|v\|_Q^2 = v^T Q v$ ,  $\gamma$  是控制稀疏度的参数。实验中使用 OMP 算法替代坐标下降算法<sup>[13]</sup> 解决上述稀疏编码问题。

在字典更新阶段,通过加权范数来稀疏约束第  $k$  列的行向量  $a_k^{\text{row}}$ ,应用迭代幂法<sup>[14]</sup> 或交替最小二乘法近似得到  $d_k a_k^{\text{row}}$  的 1 级矩阵,从而替代 SVD 分解字典更新的方法。其优化问题表述为:

$$\{d_k, \hat{a}_k^{\text{row}}\} = \arg \min_{d_k, a_k^{\text{row}}} \frac{1}{2} \|E_k - d_k a_k^{\text{row}}\|_Q^2 + \alpha \|a_k^{\text{row}}\|_1 \quad (5)$$

其中,  $\|P\|_Q^2 = \text{tr}(P^T Q P)$ ,  $\alpha$  是控制稀疏度的参数。上式优化问题可以通过使用惩罚回归方法来解决。当保持  $d_k$  固定且  $\|d_k\|_2 = 1$ ,  $a_k^{\text{row}}$  可以通过式 6 最小化,得到:

$$\hat{a}_k^{\text{row}} = \frac{1}{d_k^T Q d_k} \text{sgn}(d_k^T Q E_k) \cdot (|d_k^T Q E_k| - \alpha \mathbf{1}_{(N)})_+ \quad (6)$$

其中,  $\mathbf{1}_{(N)}$  是属于  $R^N$  的全为 1 的行向量。由于  $Q$  的加权作用,因此就产生了不同的结果 ( $a_k^{\text{row}}$ )。对于  $Q$  中较大方差的相关项,提出的更新规则降低了惩罚权重,因此该相关项被缩减为零的概率更高。随后保持  $a_k^{\text{row}}$  固定,式 5 中最小化  $d_k$  为:

$$\hat{d}_k = \frac{E_k a_k^{\text{row}T}}{\|E_k a_k^{\text{row}T}\|_2} \quad (7)$$

加权的顺序字典更新能够在字典更新阶段得到更稀疏的  $a_k^{\text{row}}$ ,这样可以更好地提升稀疏模式性能。

### 2.2 自适应字典原子优化

在学习得到的字典中,有些字典原子几乎就是噪声,不包含有意义的内容。特别是在强噪声的情况下,字典中含有过多的噪声原子往往会严重影响去噪后的图像质量。Lee 等<sup>[15]</sup> 提出利用图像块特征结构性来描述原子特性。即在至少某一方向上,信号原子的相关性很强,而噪声原子的随机分布导致信号原子在各个方向上几乎没有相关性。文献[10]中使用 Bartlett 检验法从四个方向(水平、垂直、主对角线以及次对角线)检测原子的特征向量的方差  $v_i$  是否相等或者至少有两个方向的原子方差不等,来判断原子是否为噪声

原子。但是图像块的结构特征并不由上述四个方向的结构向量表征,因此提出新增一个方向的结构特征即螺旋形方向特征,并重新定义 Bartlett 检验统计量为:

$$T = \frac{(n-2)(5\ln(\sum_{i=1}^5 v_i^2/5) - \sum_{i=1}^5 \ln v_i^2)}{1 + \frac{1}{12}(\frac{5}{n-2} - \frac{1}{5(n-2)})} \quad (8)$$

其中,  $v_i^2$  表示特征向量的方差;  $n$  表示字典原子的维度。

为了检测字典中的噪声原子,需要对字典原子依次进行判断。若原子的 Bartlett 检验统计量满足  $T < \chi^2(\rho; 4)$ , 则认为该原子是噪声原子。其中,  $\chi^2(\rho; 4)$  表示自由度为 4 的 chi-平方分布对应  $\rho$  百分点的值。

不同的噪声强度和原始图像的图像结构复杂度直接会影响对噪声原子检测的判断。因此考虑自适应选取  $\rho$  值来检测字典的噪声原子。

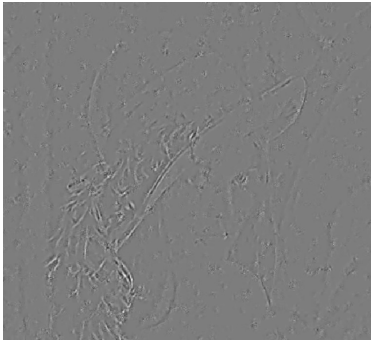
在学习字典中,通过字典原子的 TV 活跃性测度,来分离出卡通原子和纹理原子。卡通原子相对光滑,可以表示图像的卡通部分;而纹理原子中包含有图像块的纹理部分以及绝大部分噪声。因此,可以通过 MCA 分离出来的纹理图像的复杂度(用图像的方差来衡量)以及含噪图像的复杂度这两个变量,选取不同的  $\rho$  值来判断噪声原子。实验中,在不同强度噪声情况下测试了大量图像的数据,并对  $\rho$  最优拟合使得去噪效果达到最优。其中,拟合函数为:

$$\rho = \sqrt{\frac{\eta}{\omega\zeta}} \quad (9)$$

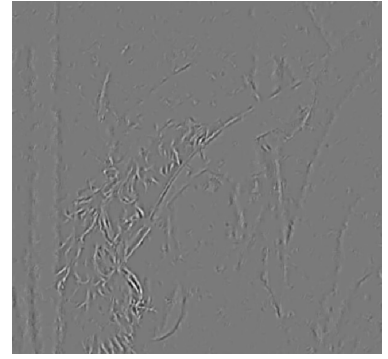
其中,  $\eta$  为含噪图像复杂度;  $\zeta$  为经过字典学习后分离出来的纹理图像复杂度。  $\sigma$  为噪声强度,参数设定如下:

$$\omega = \begin{cases} 10, \sigma \in [0, 20) \\ 14, \sigma \in [20, 40) \\ 16, \text{其他} \end{cases} \quad (10)$$

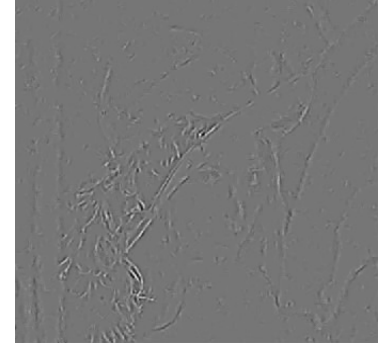
实验中,使用 K-SVD 算法对噪声强度为 40 的 Lena 含噪图像进行处理,并且对比了硬阈值删除以及根据拟合函数自适应阈值删除字典噪声原子的纹理图像和去噪图像的质量和效果,如图 1 所示。



(a) 原始含噪纹理图像及对应去噪图像 (PSNR=28.458)



(b) 硬阈值删除方法纹理图像及对应去噪图像 (PSNR=28.857)



(c) 自适应阈值删除方法纹理图像及对应去噪图像 (PSNR=29.013)

图 1 对比效果

由图 1 可知,图像(a)中引入了过多噪声,(b)中纹理的细节部分损失的比较严重,(c)则有效避免了上述两个问题。对比去噪图像 PSNR 可知,自适应字典原子检测在排除字典噪声原子干扰上具备一定的优势。

### 2.3 算法描述

文中方法使用加权顺序字典更新来代替经典的 K-SVD 字典更新,并且在此基础上使用自适应阈值删除噪声原子优化字典原子,使得字典  $D$  更能近似表示原始图像。算法描述如下:

已知:训练数据  $Y \in \mathbb{R}^{m \times N}$ , 初始字典  $D_{ini}$ , 参数  $\alpha$  和迭代次数  $J$ , 令  $D = D_{ini}$

步骤 1: 加权顺序字典更新

(1) 通过误差矩阵计算  $Q$  矩阵,并由式 4 得到稀疏系数矩阵  $A$

(2) 对于字典  $D$  的每一列  $k = 1, 2, \dots, K$

(2.1) 计算误差矩阵  $E_k = E + d_k a_k^{row}$

(2.2) 由式 6 得到稀疏系数  $a_k^{row}$ , 由式 7 更新字典原子  $d_k$

(2.3) 更新误差矩阵  $E = E_k - d_k a_k^{row}$

以上步骤经过  $J$  次迭代得到学习字典  $D$  和稀疏矩阵  $A$

步骤 2: 自适应字典原子优化

(3) 计算原含噪图像的复杂度  $\eta$  和 MCA 分离后纹理图像的复杂度  $\zeta$

(4) 根据式 9 自适应判断字典噪声原子并删除,得到优化字典  $D'$

最后通过得到的优化字典和对应的稀疏矩阵重构图像得到最终的去噪图像  $X$

3 实验结果与分析

实验是在 64 位 Windows7 系统下利用 MATLAB R2014a 图形仿真软件进行的。为了验证文中算法在图像去噪性能上的有效性,选取 5 幅测试图像,包括像素为  $512 \times 512$  的 Lena、Barbara、Countryside 和像素为  $256 \times 256$  的 House、Monarch 灰度图像。并且对比了经典的 K-SVD 算法、SDL 算法<sup>[7]</sup>和 ProDL 算法<sup>[16]</sup>的性能。图像中添加均值为 0、标准差为  $\sigma$  的高斯白噪声。初始化字典选取 DCT 字典,大小为  $64 \times 256$ ,即字典原子数目  $K = 256$ 。图像块选取的大小为  $8 \times 8$ ,并且为了保证文中算法和对比算法比较的合理性,算法的迭代次数全部设置为  $J = 10$ 。式 5 中用于更新稀疏系数的参数设置为  $\alpha = 8$ 。图像的客观质量评价标准为峰值信噪比 (peak signal to noise ratio, PSNR) 和

平均结构相似度 (mean structure similarity, MSSIM)。表 1 给出了 5 幅图像在不同噪声强度下通过 4 种去噪方法的 PSNR 和 MSSIM 对比。可以看出,文中算法相对其他三种算法在 PSNR 和 MSSIM 上都具有很大的优势,特别是随着噪声强度的增加,算法的去噪效果更为突出。例如, Lena 图像在  $\sigma = 40$  时,文中算法的 PSNR 相比其他算法提高了 0.6 ~ 0.7 dB, MSSIM 也有一定提高;在  $\sigma = 80$  时,文中算法的 PSNR 相比其他算法提高了约 1.1 dB。

图 2 对比了 House 图像在  $\sigma = 40$  时四种算法的去噪效果。可以看出,文中算法相对于其他三种算法能够去除大部分的噪声,并且在一定程度上保证了图像细节。

表 1 去噪图像的 PSNR(dB) 和 MSSIM 对比

图像	$\sigma$	K-SVD		SDL		ProDL		文中算法	
		PSNR	MSSIM	PSNR	MSSIM	PSNR	MSSIM	PSNR	MSSIM
Lena	20	31.822	0.791	32.329	0.801	32.367	0.802	32.459	0.808
	40	28.458	0.656	28.947	0.687	29.018	0.691	29.332	0.717
	60	26.210	0.556	26.714	0.586	26.794	0.594	27.284	0.637
	80	24.332	0.471	24.834	0.502	24.920	0.511	25.451	0.566
Barbara	20	30.410	0.821	30.897	0.851	30.979	0.852	31.016	0.854
	40	26.636	0.691	27.125	0.720	27.163	0.723	27.278	0.732
	60	24.167	0.569	24.559	0.598	24.594	0.601	24.776	0.617
	80	21.877	0.451	22.406	0.483	22.450	0.488	22.404	0.497
Countryside	20	29.876	0.724	30.369	0.753	30.392	0.754	30.413	0.751
	40	26.890	0.586	27.384	0.605	27.422	0.607	27.518	0.607
	60	25.047	0.498	25.545	0.507	25.595	0.510	25.888	0.534
	80	23.495	0.423	23.993	0.432	24.055	0.437	24.521	0.463
House	20	32.311	0.745	32.762	0.774	32.888	0.778	33.189	0.787
	40	28.646	0.621	29.119	0.651	29.240	0.657	29.818	0.706
	60	26.049	0.513	26.525	0.542	26.635	0.552	27.368	0.624
	80	23.912	0.417	24.433	0.447	24.536	0.457	25.380	0.543
Monarch	20	29.318	0.853	29.800	0.883	29.895	0.886	29.944	0.889
	40	25.752	0.754	26.247	0.785	26.346	0.789	26.610	0.808
	60	23.616	0.666	24.063	0.694	24.190	0.702	24.517	0.736
	80	21.870	0.587	22.366	0.617	22.419	0.623	22.834	0.666



(a) 原图像



(b) 含噪图像  
(PSNR=16.063)



(c) K-SVD 算法  
(PSNR=28.646)



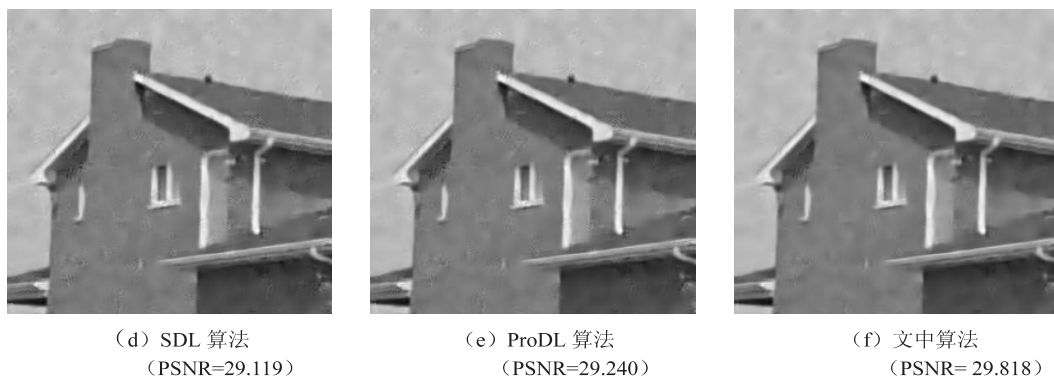


图2 四种算法的去噪结果(House含噪图像的噪声强度为40)

## 4 结束语

通过使用加权的顺序字典更新替代原始K-SVD字典更新,在字典更新的过程中,充分利用稀疏约束,有效更新了学习字典。在字典原子优化过程中,自适应选取阈值去除字典噪声原子,以最大化地减少较高强度噪声对去噪结果的影响。实验结果表明,与K-SVD算法、SDL算法以及ProDL算法相比,文中算法不仅在客观评价标准上明显提高,而且去噪后的图像边缘以及细节部分也有一定的优势。下一步,可以从优化文中算法的时间复杂度方面展开研究。

### 参考文献:

- [1] 刘 钢. 基于压缩感知和稀疏表示理论的图像去噪研究[D]. 成都:电子科技大学,2013.
- [2] 郭德全,杨红雨,刘东权,等. 基于稀疏性的图像去噪综述[J]. 计算机应用研究,2012,29(2):406-413.
- [3] 刘 梓,宋晓宁,唐振民. 稀疏表示和贪婪搜索的人脸分类[J]. 中国图象图形学报,2015,20(1):39-49.
- [4] 西 霞,陈 菲,贾小林,等. 基于改进K-SVD字典学习的医学图像压缩算法[J]. 西南科技大学学报,2016,31(3):74-78.
- [5] 杨 俊,谢勤岚. 基于DCT过完备字典和MOD算法的图像去噪方法[J]. 计算机与数字工程,2012,40(5):100-103.
- [6] AHARON M, ELAD M, BRUCKSTEIN A.  $\ell_1$ -SVD: an algorithm for designing overcomplete dictionaries for sparse representation[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2006, 54(11):4311-4322.
- [7] SEGHOUEANE A K, HANIF M. A sequential le-

arning algorithm with enforced sparsity[C]//IEEE international conference on acoustics, speech and signal processing. Brisbane, QLD, Australia; IEEE, 2015:3876-3880.

- [8] IQBAL A, SEGHOUEANE A K. An approach for sequential dictionary learning in nonuniform noise[C]//International conference on digital image computing: techniques and applications. Sydney, NSW, Australia; IEEE, 2017:1-5.
- [9] 杨爱萍,田玉针,何宇清,等. 基于改进K-SVD和非局部正则化的图像去噪[J]. 计算机工程,2015,41(5):249-253.
- [10] 华志胜,付丽华. 基于块分类和字典优化的K-SVD图像去噪研究[J]. 计算机工程与应用,2017,53(16):187-192.
- [11] ELAD M. 稀疏与冗余表示:理论及其在信号与图像处理中的应用[M]. 北京:国防工业出版社,2015.
- [12] 胡文瑾,李战明,刘仲民. 快速非局部均值形态成分分析唐卡图像修复算法[J]. 计算机辅助设计与图形学学报,2014,26(7):1067-1074.
- [13] WU Tongtong, LANGE K. Coordinate descent algorithms for lasso penalized regression[J]. The Annals of Applied Statistics, 2008, 2(1):224-244.
- [14] GOLUB G H, VAN LOAN C F. Matrix computations[M]. [s. l.]: JHU Press, 2012.
- [15] LEE J, KIM Y H, NAM J H. Adaptive noise reduction algorithms based on statistical hypotheses tests[J]. IEEE Transactions on Consumer Electronics, 2008, 54(3):1406-1414.
- [16] PENG G J, HWANG W L. A proximal method for dictionary updating in sparse representations[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2015, 63(15):3946-3958.