

具有非均匀接触模式的网络传播建模与分析

缪超

(南京邮电大学 自动化学院 江苏 南京 210046)

摘要: 大部分病毒传播模型具有均匀混合假设,即在一个群体中,每个个体有相同的几率被一个与之相邻的被感染节点感染。然而由于个体免疫系统、生活习惯以及对病毒信息预警所持的态度各有不同,个体之间感染病毒的概率也将不尽相同。因此,网络中存在异质接触模式的病毒传播动力过程成为一个新的研究方向。为了研究非均匀接触模式对病毒传播的影响,以 SIS 模型为基础,在 BA 无标度网络上结合非均匀平均场理论,提出了一种具有非均匀接触模式(即具有不同特性的人群具有不同的病毒感染率)的改进型 SIS 模型,分析求解了传播阈值,并通过蒙特卡罗仿真验证了阈值表达式的有效性。仿真结果表明,非均匀接触 SIS 模型的阈值由两种人口比例按权重构成,且与网络结构参数有关。

关键词: 非均匀接触;多重感染率;非线性平均场理论;SIS 模型;无标度网络;阈值

中图分类号: TP309

文献标识码: A

文章编号: 1673-629X(2019)02-0135-04

doi: 10.3969/j.issn.1673-629X.2019.02.028

Modeling and Analysis of Epidemic Spreading on Network with Heterogeneous Contact Pattern

MIAO Chao

(School of Automation, Nanjing University of Posts and Telecommunications, Nanjing 210046, China)

Abstract: Most classical mathematical models of epidemic spreading assume uniform mixing among individuals, namely, each individual has an equal chance of being infected by an infected neighbor in a population. However, due to the body's immunologic system, habits and the attitude of the early virus warning, the contact pattern among populations and the individual's resistance to the epidemic is different. Therefore, the impact of heterogeneous contact pattern on epidemic spreading among populations has become an important research direction. Based on the heterogeneous mean-field method, we propose an improved SIS model with heterogeneous contact pattern on a BA scale-free network, namely, individuals may have different infectious rates and belong to different population groups. The epidemic threshold is analyzed and solved, and the validity of the expression is verified by Monte Carlo simulation. It is found that the threshold of the heterogeneous contact SIS model is composed of two population proportions according to weight and is related to the network structure parameters.

Key words: heterogeneous contact pattern; multi-infection rates; heterogeneous mean-field; SIS model; scale-free network; threshold

0 引言

近年来,研究者们发现了许多真实网络的特性,如小世界效应^[1]、无标度特性^[2]等等,从而促进了复杂网络理论的迅速发展。复杂网络上传播动力学研究日益成为一个研究热点。为了深入研究复杂网络上的病毒传播机理,有效预防与控制大规模病毒传播,已经提出了多种不同的病毒传播模型。其中较经典的传播模型有 SI(susceptible-infected)、SIR(susceptible-infected-recovered) 与 SIS(susceptible-infected-susceptible) 模型^[3]。May 和 Lloyd 讨论了网络规模对无标度网络上

传播行为的影响,发现了有限规模的无标度网络存在正的传播强度临界值。Barthelemy 等深入分析了 SI 模型中病毒爆发的特性,发现病毒传播动力学结构具有明显的层次性。

研究传染病的临界行为和阈值特性对于预测和控制传染病的传播具有非常大的现实意义。很多真实网络的节点度值分布较为集中,这些网络称为同构网络,如均匀网络^[4]、随机网络^[5]和小世界网络^[6]等。这些网络中的传播模型分析通常存在一个共同的假设:均匀混合假设,即假设个体间具有相等的传染性,没有考

收稿日期: 2018-03-05

修回日期: 2018-07-11

网络出版时间: 2018-11-15

基金项目: 国家自然科学基金(61672298)

作者简介: 缪超(1993-),男,硕士,研究方向为复杂网络传播动力学。

网络出版地址: <http://kns.cnki.net/kcms/detail/61.1450.TP.20181115.1050.080.html>

虑个体差异对传播行为的影响,这与真实情况存在较大的差异。因此许多研究者们开始研究人口以及网络非均匀性对病毒传播的影响。非均匀平均场方法^[7-12] (heterogeneous mean-field method) 不再简单地把所有节点看作是相似的,而是将相同的节点进行平均近似。这种方法考虑了节点异质性。由于接触的非均匀性已经被证明对流行病的阈值和流行病的最终规模有很大的影响,Volz 等^[13] 通过研究美国一个大型城市人口交往模式数据,建立了一种随机分布接触模型来研究传播过程。Fournet 等^[14] 研究高中学生之间两组高度时间分布差异的接触模式来描述其传播过程并设计相应的抑制方式。Colizza 等^[15] 运用非均匀平均场方法在多个亚群中推导出病毒流动感染的阈值表达式,提出了感染一定亚群所需要的最小流动感染病毒节点数。Lee 等^[16] 讨论了动态节点非均匀接触模式对转发算法性能的影响。Apolloni 等^[17] 研究了双层异构网络的非均匀性,这对病毒在一个地区传播以及在多个地区的流动传播的控制和预防有很大的贡献。Gong 等^[18] 研究了非均匀感染率对动态节点阈值的影响。

文中在充分考虑人群传播差异性的前提下,以 SIS 模型为基础,建立了具有分类人群传播率的改进模型,在无标度网络下研究传染病的临界行为和阈值特性,并通过仿真证明阈值计算的有效性。

1 多重传播率 SIS 模型的建立

传播动力学的研究主要集中于病毒传播、信息传播等,文中主要研究病毒传播特性。病毒传播动力学模型是根据病毒产生、发展以及网络环境变化等情况,建立能够反映传播过程以及爆发或灭绝状况的数学模型,通过对传播模型的解析与研究来描述病毒发展的过程,预测传染病的流行规律与发展趋势,分析疾病爆发的原因,从而达到控制病毒传播的目的。

SIS 模型是研究病毒传播常用的动力学模型,该模型适用于能够反复感染的传播模型,如流感。在此模型中个体处于易感态(S) 或者感染态(I) 处于 S 态的节点以一定的概率 λ 感染为 I 态,而处于 I 态的节点也将以概率 μ 恢复为 S 态。当某一个个体感染病毒,成为网络中的种子节点,在一定的时间内与其有接触的其他节点有一定概率感染病毒,从而引起病毒在整个网络中的传播。

为了更好地描述传播过程,按照节点度对网络中的节点进行区分,定义 $p(k)$ 表示度为 k 的节点占总节点的比例, $p(k'|k)$ 表示一个给定的度为 k 的节点与一个度为 k' 的节点相互连接的概率。于是当 $p(k) \neq 0$ 时,不难得出:

$$p(k'|k) = [kp(k)] / [\sum_k k'p(k')] \quad (1)$$

在无标度网络中,对于 SIS 病毒传播模型,将确定人口区分为感染率分别为 λ_1, λ_2 的两个人群,定义相对密度 $I_{1k}(t), I_{2k}(t)$ 分别表示度为 k 的节点被感染的概率。由于恢复率 μ 只影响系统稳定时间,所以不妨设 $\mu = 1$ 。

对于一个度为 k 的高感染率节点,在 $(t, t + \Delta t)$ 时间段内必然经历以下两种过程:

(1) 节点以 $I_{1k}(t)$ 的概率处于感染态(I),将以 1 的概率转变为易感态(S);

(2) 节点以 $I_{2k}(t)$ 的概率处于易感态(S),每个与其连接的节点有一定概率使其感染成为感染态(I)。

其传播动力学方程如式 2 所示:

$$\begin{cases} \frac{dI_{1k}(t)}{dt} = -I_{1k}(t) + kS_k(t) [\lambda_1 \Theta_1(I_1) + \lambda_2 \Theta_2(I_2)] (1-p) \\ \frac{dI_{2k}(t)}{dt} = -I_{2k}(t) + S_k(t) [\lambda_1 \Theta_1(I_1) + \lambda_2 \Theta_2(I_2)] p \end{cases} \quad (2)$$

其中 $p \in (0, 1)$ 为不同人口比例,且

$$\begin{aligned} \Theta_1(I_1) &= p(k'|k) I_{1k}(t) \\ \Theta_2(I_2) &= p(k'|k) I_{2k}(t) \\ S_k(t) &= 1 - I_{1k}(t) - I_{2k}(t) \end{aligned} \quad (3)$$

2 阈值分析

记 $w_k(t), \mu_k(t)$ 的稳态值为 I_{1k}, I_{2k} , 令式 2 右端为 0, 经过运算可得式 4:

$$\begin{cases} I_{1k} = \frac{k [\lambda_1 \Theta_1 + \lambda_2 \Theta_2]}{1 + k [\lambda_1 \Theta_1 + \lambda_2 \Theta_2]} (1-p) \\ I_{2k} = \frac{k [\lambda_1 \Theta_1 + \lambda_2 \Theta_2]}{1 + k [\lambda_1 \Theta_1 + \lambda_2 \Theta_2]} p \end{cases} \quad (4)$$

由于无标度网络具有非关联性,所以可得:

$$p(k'|k) = \frac{kp(k)}{\langle k \rangle} \quad (5)$$

故不妨记 $\Theta = \lambda_1 \Theta_1 + \lambda_2 \Theta_2$, 将式 5 代入式 4 可得:

$$\begin{aligned} \Theta &= \lambda_1 \frac{kp(k)}{\langle k \rangle} I_{1k}(t) + \lambda_2 \sum_k \frac{kp(k)}{\langle k \rangle} I_{2k}(t) = \\ &= \lambda_1 \sum_k \frac{kp(k)}{\langle k \rangle} \frac{k\Theta}{1 + k\Theta} (1-p) + \\ &= \lambda_2 \sum_k \frac{kp(k)}{\langle k \rangle} \frac{k\Theta}{1 + k\Theta} p = \\ &= \frac{1}{\langle k \rangle} \sum_k kp(k) \frac{k\Theta}{1 + k\Theta} [\lambda_1 (1-p) + \lambda_2 p] \quad (6) \end{aligned}$$

易得式 6 存在一个平凡解 $\Theta = 0$ 。假设该方程存在一个非平凡解 $\Theta \neq 0$, 则需要满足如下条件:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\Theta} \left\{ \frac{1}{\langle k \rangle} \sum_k kp(k) \frac{k\Theta}{1 + k\Theta} [\lambda_1 (1-p) + \lambda_2 p] \right\} \\ |_{\Theta=0} \geq 1 \end{aligned} \quad (7)$$

即有:

$$\sum_k \frac{k p(k)}{\langle k \rangle} [\lambda_1(1-p) + \lambda_2 p] k = [\lambda_1(1-p) + \lambda_2 p] \frac{\langle k^2 \rangle}{\langle k \rangle} \geq 1 \quad (8)$$

从而可以求得无标度网络的传播临界值 λ_c 为:

$$\lambda_c = [\lambda_1(1-p) + \lambda_2 p] = \langle k \rangle / \langle k^2 \rangle \quad (9)$$

其中感染率取值范围如下:

$$\begin{cases} \max[0, \frac{1}{1-p}(\frac{\langle k \rangle}{\langle k^2 \rangle} - p)] < \lambda_1 < \frac{\langle k \rangle}{\langle k^2 \rangle} \\ \frac{\langle k \rangle}{\langle k^2 \rangle} < \lambda_2 < \min(\frac{1}{p} \frac{\langle k \rangle}{\langle k^2 \rangle}, 1) \end{cases} \quad (10)$$

由上式可见:

(1) 无标度网络中的多传播率传播阈值受两种传播率影响,其影响强度由两种传播率人群比例决定。

(2) 与单一传播率类似,传播阈值受网络规模以及平均度分布影响,当网络规模 $N \rightarrow \infty$ 时, $\langle k \rangle \rightarrow \infty$ 从而有 $\lambda_c = [\lambda_{c1}(1-p) + \lambda_{c2}p] \rightarrow 0$ 。

3 仿真与结果分析

通过具体实例对具有多种传播率的 SIS 模型进行

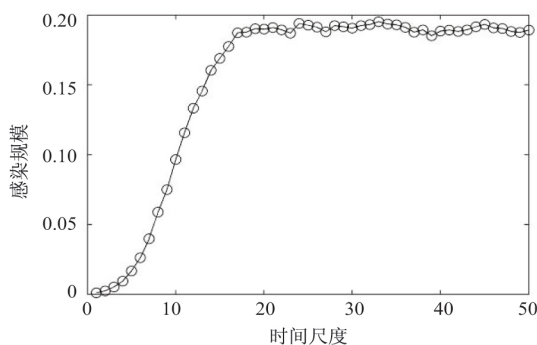


图1 时间演化曲线 ($\lambda_{2a} = 0.2$)

由图可知,当 $[\lambda_1(1-p) + \lambda_2 p] \langle k^2 \rangle / \langle k \rangle < 1$ 时,病毒在网络中爆发并长期存在,反之,病毒在有限时间内迅速消亡。

为了确定病毒爆发的临界值,首先将分别固定两种传播率中的一个,研究另一种传播率的传播特性。

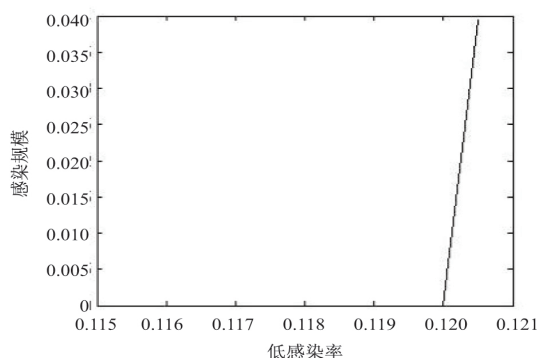


图3 单阈值演化 ($\lambda_1 = 0.16$)

阈值仿真 验证计算所得的阈值。

首先,生成一个具有1000个节点的BA无标度网络,给定该网络平均度分布为6,连边数为3000,大部分节点度集中在平均度附近,只有小部分节点拥有较大的度,符合无标度网络优先连接特性。对生成的BA无标度网络计算各参数数据:平均度分布 $\langle k \rangle = 6$,二阶矩 $\langle k^2 \rangle = 41.436$ 。于是由式9计算结果可得阈值条件如下:

$$\lambda_c = \lambda_1 p + \lambda_2 (1-p) = \frac{\langle k \rangle}{\langle k^2 \rangle} = 0.145 \quad (11)$$

设定恢复率为1,两种传播率人口比例为4:6。将人口比例代入式10,计算病毒临界传播率 λ_1, λ_2 的取值范围:

$$\begin{cases} 0 < \lambda_1 < \langle k \rangle / \langle k^2 \rangle \\ \langle k \rangle / \langle k^2 \rangle < \lambda_2 < \langle k \rangle / 0.6 \langle k^2 \rangle \end{cases} \quad (12)$$

根据上述条件,选定低传播节点传播率 $\lambda_1 = 0.1$,高传播节点传播率分别为 $\lambda_{2a} = 0.12$ 和 $\lambda_{2b} = 0.2$,由求

得的阈值条件可知 $\begin{cases} \lambda_{ca} = 0.112 < 0.145 \\ \lambda_{cb} = 0.16 > 0.145 \end{cases}$,仿真绘制时间演化曲线如图1和图2所示。

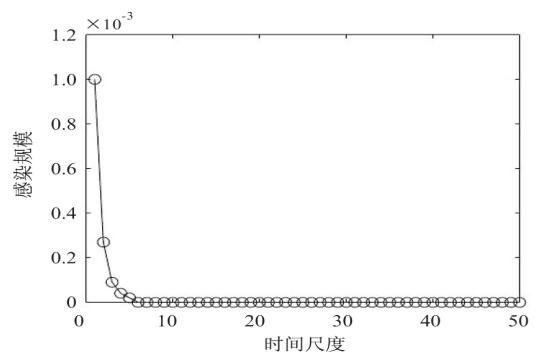


图2 时间演化曲线 ($\lambda_{2b} = 0.12$)

根据式10求得的临界值条件,分别设定高传播率为0.16和0.18,经过计算低传播率阈值分别为:0.1225和0.0925,画出低传播率阈值传播图,分别如图3和图4所示。

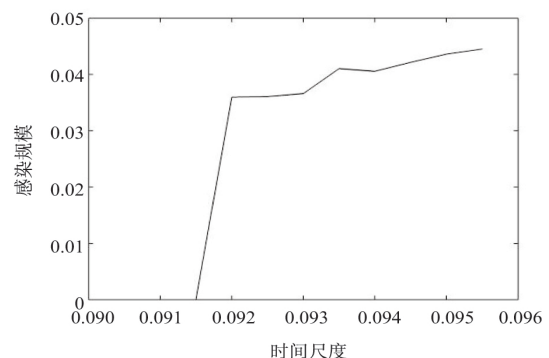


图4 单阈值演化 ($\lambda_1 = 0.18$)

由图可知,仿真所得低传播率传播阈值与计算结果相符。

为了完整地验证阈值条件,根据式 10 所列范围,绘制三维阈值,如图 5 所示。

根据图 5 将仿真实验结果填入表 1,其中 λ_1 为高传播率, λ_2 为低传播率理论阈值, λ_{2e} 为实验数据,对比仿真结果与理论数值表明,在误差允许范围内,仿真结果与第二节中求得的理论结果相一致。

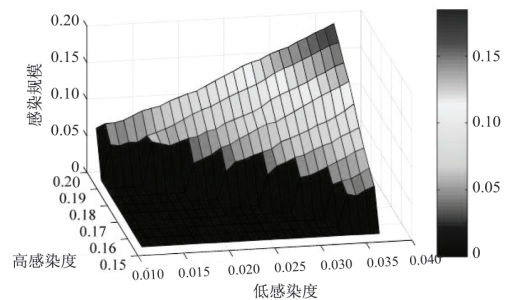


图 5 三维阈值

表 1 三维阈值数据分析

阈值	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
λ_1	0.15	0.16	0.17	0.18	0.19	0.2	0.21	0.22	0.23	0.24
λ_{2e}	0.137 5	0.122 5	0.107 5	0.092 5	0.077 5	0.062 5	0.047 5	0.032 5	0.017	0.002
λ_{2e}	0.14	0.12	0.115	0.1	0.085	0.065	0.05	0.03	0.01	0

4 结束语

网络传播动力学作为复杂网络研究中的重要课题,具有极其重要的意义。文中介绍了一种具有多重传播率的 SIS 传播模型,可以描述具有显著人群差异性的人口网络模型中的传播过程。应用异质平均场方法研究网络特性,异质平均场理论将度相同的节点进行平均近似,而不再将所有节点简单近似。对相同节点度的节点分组,研究某一节点度 k 下的节点传播过程,继而推广至整个网络。从推导和仿真结论可以看出,具有多重传播率的 SIS 传播模型与普通传播模型类似地存在与传播率以及网络平均度相关的传播阈值,多重传播率阈值由传播率以及不同类型人口比例构成。这为如何定向免疫与控制类似现实网络中的病毒传播过程提供了一个可行的方向。

参考文献:

- [1] WATTS D J, STROGATZ S H. Collective dynamics of 'small-world' networks [J]. Nature, 1998, 393(6684): 440-442.
- [2] BARABÁSI A L, ALBERT R. Emergence of scaling in random networks [J]. Science, 1999, 286(5439): 509-512.
- [3] 汪小帆. 复杂网络理论及其应用 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2006: 73-78.
- [4] 肖 詠. 复杂网络的病毒传播模型及免疫策略研究 [D]. 重庆: 西南大学, 2016.
- [5] 曹进德, 王 毅. 复杂网络疾病传播动力学研究进展 [J]. 大学数学, 2016, 32(4): 1-11.
- [6] 巩永旺. 考虑个体行为的复杂网络病毒传播研究 [D]. 南京: 南京邮电大学, 2014.
- [7] 刘胜久. 复杂网络模型构建及特性分析 [D]. 成都: 西南交通大学, 2015.
- [8] PASTOR-SATORRAS R, VESPIGNANI A. Epidemic dy-

namics and endemic states in complex networks [J]. Physical Review E, 2001, 63-65: 066117.

- [9] 刘胜久, 李天瑞, 洪西进, 等. 超网络模型构建及特性分析 [J]. 计算机科学与探索, 2017, 11(2): 194-211.
- [10] BOGUÑA M, PASTOR-SATORRAS R, VESPIGNANI A. Absence of epidemic threshold in scale-free networks with degree correlations [J]. Physical Review Letters, 2003, 90(2): 028701.
- [11] MORENO Y, GÓMEZ J B, PACHECO A F. Epidemic incidence in correlated complex networks [J]. Physical Review E, 2003, 68-70: 035103.
- [12] BAILEY N T J. The mathematical theory of infectious diseases and its applications [J]. Journal of the Royal Statistical Society, 1977, 26(1): 85-87.
- [13] VOLZ E. Susceptible-infected-recovered epidemics in populations with heterogeneous contact rates [J]. Physics of Condensed Matter, 2008, 63(3): 381-386.
- [14] FOURNET J, BARRAT A. Contact patterns among high school students [J]. PLoS ONE, 2014, 9(9): e107878.
- [15] COLIZZA V, VESPIGNANI A. Epidemic modeling in metapopulation systems with heterogeneous coupling pattern: theory and simulations [J]. Journal of Theoretical Biology, 2008, 251(3): 450-467.
- [16] LEE C H, EUN D Y. On the forwarding performance under heterogeneous contact dynamics in mobile opportunistic networks [J]. IEEE Transactions on Mobile Computing, 2013, 12(6): 1107-1119.
- [17] WANG Lin, LI Xiang. Spatial epidemiology of networked metapopulation: an overview [J]. Chinese Science Bulletin, 2014, 59(28): 3511-3522.
- [18] GONG Yongwang, SONG Yurong, JIANG Guoping. Epidemic spreading in metapopulation networks with heterogeneous infection rates [J]. Physica A: Statistical Mechanics & Its Applications, 2014, 416: 208-218.