

# 基于符号计算的变系数 KP 方程的孤子解

薛瑞梅,王书敏,姚若侠

(陕西师范大学 计算机科学学院 陕西 西安 710119)

**摘要:** 计算机代数是数学和计算机科学以及人工智能的交叉学科,致力于研究在计算机上进行符号计算。Maple 是世界上应用最广泛的符号计算系统,可以将复杂繁琐的计算过程算法化,交由计算机处理,将人类的双手解放出来,极大地提高了计算效率。文中以符号计算系统 Maple 为工作平台,采用修正的 CK 直接约化方法,将变系数 KP 方程约化为等价常系数方程,获得了变系数与常系数方程的关系及解。通过推广的 Painlevé 非标准截断方法求得相应的常微分方程的解,进而得到变系数微分方程的解,分析了常系数 KP 方程的孤子解。研究表明,借助符号计算 Maple 系统,修正的 CK 直接约化方法和 Painlevé 非标准截断方法的结合不仅能对变系数偏微分方程轻松求解,还可节省计算时间,并广泛应用于若干数学物理模型中。

**关键词:** 符号计算; 变系数 KP 方程; CK 约化; Painlevé 非标准截断展开; 孤子解

中图分类号: TP301

文献标识码: A

文章编号: 1673-629X(2019)02-0073-04

doi: 10.3969/j.issn.1673-629X.2019.02.015

## Soliton Solution of KP Equation with Variable Coefficients Based on Symbolic Computation

XUE Rui-mei, WANG Shu-min, YAO Ruo-xia

(School of Computer Science, Shaanxi Normal University, Xi'an 710119, China)

**Abstract:** Computer algebra is the interdisciplinary subject of mathematics, computer science and artificial intelligence, studying symbolic computation on computer. Maple as the most widely used symbolic computation system in the world, can turn complex computational process into algorithms issued by computers, and hand it over to the computer for processing, which greatly improves the calculation efficiency. In this paper, with the symbolic calculation system Maple as the working platform, the modified CK direct reduction method is adopted to reduce the KP equation with variable coefficients to the equivalent constant coefficient equation, and the relationship and solution between the variable coefficient and the constant coefficient equation are obtained. Painlevé nonstandard truncation method is extended to obtain the solution of the corresponding ordinary differential equation, then getting the solution of the differential equation with variable coefficients. The soliton solution of KP equation with constant coefficients is analyzed. Studies show that the combination of modified CK direct reduction method and Painlevé non-standard truncation method to calculate Maple system with the help of sign can not only solve partial differential equation with variable coefficient easily, but also save computation time, which is widely used in several mathematical and physical models.

**Key words:** symbolic computation; variable coefficient KP equation; CK reduction; Painlevé nonstandard truncated expansions; soliton solution

### 0 引言

计算机科学的蓬勃发展推动了其他学科的发展,计算机符号计算系统<sup>[1-3]</sup>的出现为人类分析和研究数学物理模型提供了极大的便利。近年来,计算机数学在数学物理领域的应用,使得非线性科学焕发了新的活力。在力学、物理学、生命科学、工程技术等许多领

域,非线性偏微分方程的精确解都发挥着重要作用。科学研究者提出了大量的求解非线性微分方程的方法,如反散射法<sup>[4]</sup>、双线性法<sup>[5]</sup>、齐次平衡法<sup>[6]</sup>等。而变系数非线性偏微分方程往往比常系数的非线性偏微分方程具有更广泛的物理意义,它的解更具一般性,也更贴近现象的本质。Maple 作为一个应用广泛的符号

收稿日期: 2018-03-22

修回日期: 2018-07-24

网络出版时间: 2018-11-15

基金项目: 国家自然科学基金(11471004)

作者简介: 薛瑞梅(1992-),女,硕士,研究方向为非线性科学与符号计算;姚若侠,教授,博导,研究方向为非线性科学与符号计算、孤子理论。

网络出版地址: <http://kns.cnki.net/kcms/detail/61.1450.TP.20181115.1048.054.html>

计算系统 结合了世界上最强大的数学引擎和接口 ,使用它非常容易分析、探索、可视化 and 解决数学问题。1970 年 ,Kadomtsev 和 Petviashvili 提出的用以描述散色和非线性介质中的扰动 KP 方程<sup>[7]</sup> ,在流体力学、气体动力学等领域有着广泛的意义 ,它的解对许多问题都有重要的参考价值<sup>[8]</sup>。文中借助计算机符号计算系统 Maple ,通过修正的 CK 直接约化方法<sup>[9-11]</sup>和推广的 Painlevé 非标准截断方法<sup>[12-14]</sup>求解一类变系数 KP 方程。

文中研究的一般变系数 KP 方程的形式如下<sup>[15]</sup> :

$$[u_t + f(t)(6uu_x + u_{xxx})]_x + g(t)u_{yy} = 0 \quad (1)$$

其中 , $f(t)$   $g(t)$  是关于  $t$  的任意函数。当  $f(t) = a$   $g(t) = b$  ( $a$   $b$  是常数) 时 ,式 1 变为常系数方程。

$$[u_t + a(6uu_x + u_{xxx})]_x + bu_{yy} = 0 \quad (2)$$

以 Maple 为计算工具 ,采用修正的 CK 方法获得了式 1 与式 2 的解之间的关系 ,再利用 Painlevé 非标准截断方法构造出式 2 的解 ,继而获得式 1 的解。

## 1 变系数 KP 方程的 CK 约化

设式 1 有如下形式的解:

$$u(x, y, t) = \alpha(x, y, t) + \beta(x, y, t)U(X, Y, T) \quad (3)$$

其中 , $\alpha = \alpha(x, y, t)$   $\beta = \beta(x, y, t)$   $X = X(x, y, t)$  ,  $Y = Y(x, y, t)$   $T = T(x, y, t)$  均为待定函数 ,并且在变换  $\{u, x, y, t\} \rightarrow \{U, X, Y, T\}$  下 ,要求  $U(X, Y, T)$  满足式 2 ,即

$$(U_T + a(UU_X + U_{XXX}))_X + bUU_{YY} = 0 \quad (4)$$

其中 , $a$   $b$  是常数。

式 1 的约化过程如下所述:

(1) 调用 Maple 的偏微分方程工具包 PDEtools ,即 [`>with PDEtools()`] ;然后在 Maple 中输入式 1;

(2) 调用微分替换函数 `dsubs()` ,执行 `dsubs()` 语句 ,用式 3 替换式 1 中的  $u$  之后 ,再将式 4 代入;

(3) 借助 `collect()` 函数和 `coeff()` 函数 ,整理并提取出未知函数  $U$  及其导数项系数 ,令其为零 ,由此可获得一个代数方程组 ,解之得:

$$X = \frac{k_1}{T_t}x + F(t) \quad Y = k_2y + k_3 \quad T = T(t) \quad \beta = \frac{k_1}{T_t} \quad \alpha = \frac{k_1^6 x T_u}{4a T_t^7} h(t) = -\frac{2T_t^2 F_t + kx T_u}{2k T_t} f(t) = \frac{a T_t^6}{k_1^6} \quad (5)$$

其中 , $F(t)$   $T(t)$  是  $t$  的任意函数;  $k_1$   $k_2$   $k_3$  是任意常数。

在 Maple 中式 1 约化过程的主要算法如下:

`>restart: with PDEtools();`

`>PDEque:=方程(1);#将方程(1)输入计算机,命名为“PD-Eque”`

`>equ1:=dsubs(u(x,y,t)=alpha(x,y,t)+beta(x,y,t)U(X,Y,T),PDEque);`

`>equ2:=equ1-(U_T+alpha(UU_X+U_{XXX}))_X+bUU_{YY}=0;`

`>equ3:=collect(equ2,U(X,Y,T));`

#以下部分提取出未知函数  $U$  及其导数项系数 ,由此可获得一个代数方程组 ,解之

`>str:=[];`

`>for i from 1 to nops(equ3) do`

`>ss(i):=coeffs(op(i,equ3),U(X,Y,T));`

`>str:=[ss(i),op(equ3)];`

`>od;`

`>str;`

`>solve(str);`

根据上述过程 ,有如下定理:

定理 1: 如果  $X, Y, T, \alpha, \beta$  按式 5 给出 ,则式 1 的解可表示为:

$$u = \frac{k_1^6 x T_u}{4a T_t^7} + \frac{k_1^2}{T_t^2} \left( \frac{k_1}{T_t} x + F(t) \right) (k_2 y + k_3 T(t)) \quad (6)$$

## 2 常系数 KP 方程的 Painlevé 非标准截断展开

通常 ,对于如下给定的偏微分方程:

$$F(t, x_1, x_2, \dots, x_n, u, u_{x_1}, u_{x_2}, \dots, u_{x_n}, u_{x_1 x_1}, \dots, u_{x_1 x_1 x_1}, \dots) \equiv F(u) = 0 \quad (7)$$

它的 Painlevé 展开为:

$$u = \phi^\alpha \sum_{j=0}^{\infty} u_j \phi^j \quad (8)$$

其中 , $\phi = \phi(x_1, x_2, \dots, x_n, t) = 0$  是任意的奇性流形 ,由于  $\phi$  的任意性 ,Conte<sup>[16]</sup> 令:

$$\chi \equiv \left[ \frac{\phi_x}{\phi} - \frac{\phi_{xx}}{2\phi_x} \right]^{-1} (x = x_1) \quad (9)$$

即可获得一个新的展开式:

$$u = \chi^\alpha \sum_{j=0}^{\infty} u_j \chi^j \quad (10)$$

其中的展开系数  $u_j$  在 Mobious 变换  $\phi \rightarrow$

$\frac{a\phi + b}{c\phi + d}$  ( $ad \neq cb$ ) 下是不变的。

对于 2+1 维系统 ( $y = x_2$ ) ,将式 9 分别对  $x, y$  和  $t$  求微分 ,可得下述三个恒等式:

$$\begin{cases} \chi_x = 1 + \frac{1}{2} S \chi^2 \\ \chi_t = -K + K_x \chi - \frac{1}{2} (K_{xx} + KS) \chi^2 \\ \chi_y = -C + C_x \chi - \frac{1}{2} (C_{xx} + CS) \chi^2 \end{cases} \quad (11)$$

其中

$$S_t + K_{xxx} + 2K_x S + K S_x = 0$$

$$S_y + C_{xxx} + 2C_x S + C S_x = 0$$

$$K_y - C_x + C K_x - K C_x = 0$$

$$S \equiv \frac{\phi_{xxx}}{\phi_x} - \frac{3}{2} \left( \frac{\phi_{xx}}{\phi_x} \right)^2, \quad \mathcal{C} \equiv \frac{\phi_y}{\phi_x}, \quad K \equiv \frac{\phi_t}{\phi_x} \quad (12)$$

其中,  $S, \mathcal{C}, K$  均在 Mobious 变换下保持不变。

Pickering 对上述方法作了进一步推广<sup>[17]</sup>, 取一个新的变量  $g$  作为一个新的展开函数使得展开式为:

$$u = g^\alpha \sum_{j=0}^{\infty} u_j g^j \quad (13)$$

其中,  $g$  要满足以下条件:

$$\begin{cases} g_x = -1 + \frac{S}{2} (d - g)^2 \\ g_y = C - C_x (d - g) + \frac{1}{2} (C_{xx} - CS) (d - g)^2 \\ g_t = K - K_x (d - g) + \frac{1}{2} (K_{xx} - KS) (d - g)^2 \end{cases} \quad (14)$$

式 14 的自洽条件为  $g_{xt} = g_{tx}, g_{yt} = g_{ty}, g_{xy} = g_{yx}$ 。

所要研究的 (2+1) 维 KP 方程具有以下形式:

$$[u_t + a(uu_x + u_{xxx})]_x + bu_{yy} = 0 \quad (15)$$

将  $u$  按照 Pickering 推广的方法展开为:

$$u = \sum_{j=0}^{2|\alpha|} u_j g^{j+\alpha} \quad (16)$$

借助主项平衡, 得到  $\alpha = -2$ , 代入式 16, 展开如下:

$$u = \frac{u_0}{g^2} + \frac{u_1}{g} + u_2 + u_3 g + u_4 g^2 \quad (17)$$

其中  $g$  要满足式 14。

继而, 与第二部分约化过程一致, 这里就不对算法进行赘述。借助 Maple 系统的 `dsubs()` 函数, 把式 14 和式 17 代入式 15; 再用 `collect(equation, g)` 语句整理方程; 然后, 再把所得到的方程通过 Maple 系统的 `sort()` 函数, 按照  $g$  的幂次高低排列; 最后, 提取  $g$  的各个幂次项的系数。如果仅仅希望得到原方程的孤子解的话, 则可以令  $S = s, \mathcal{C} = c, K = k$ , 也就是说把它们当作常数处理, 此时再令  $g$  的各次项系数为零, 即可得到一系列复杂的方程组, 通过 Maple 计算, 在之后给出结果, 式中的  $s, c, k$  均为常数, 且由式 14 通过 Maple 计算可得:

$$g = d - \sqrt{\frac{2}{s}} \tanh \left[ \sqrt{\frac{s}{2}} (x - cy - kt) \right] \quad (18)$$

参数解 1:

$$u_0 = -\frac{1}{2} d^4 s^2 + 2d^2 s - 2, \quad \mu_1 = d^3 s^2 - 2ds,$$

$$u_2 = -\frac{1}{2} d^2 s^2 + \frac{2}{3} s + \frac{1}{6a} k - \frac{1}{6a} bc^2,$$

$$u_3 = 0, \quad \mu_4 = 0 \quad (19)$$

对应式 2 的单孤子解为:

$$u = \frac{-\frac{1}{2} d^4 s^2 + 2d^2 s - 2}{\left( d - \sqrt{\frac{2}{s}} \tanh \left( \sqrt{\frac{s}{2}} (x - cy - kt) \right) \right)^2} + \frac{d^3 s^2 - 2ds}{d - \sqrt{\frac{2}{s}} \tanh \left( \sqrt{\frac{s}{2}} (x - cy - kt) \right)} - \frac{1}{6} 3d^2 s^2 + \frac{2}{3} s + \frac{k}{6a} - \frac{bc^2}{6a} \quad (20)$$

当  $s = 1, c = 1, k = 0, a = 1, b = 1, d = 1$  (或者  $s = 1, c = 0, k = 1, a = 1, b = 1, d = 1$ ) 时, 用 Maple 中的 `Plots` 命令可以轻易画出解的三维图, 如图 1 所示。

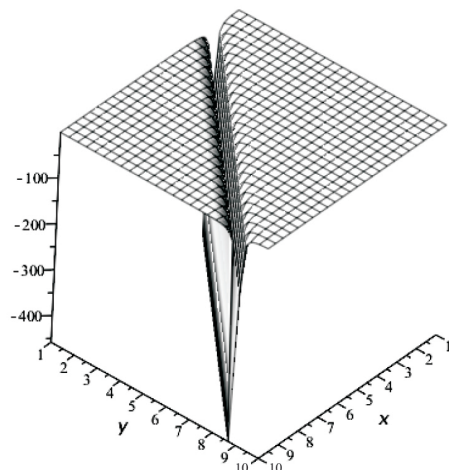


图 1 三维图 (1)

参数解 2:

$$u_0 = 0, \quad \mu_1 = 0, \quad \mu_2 = -\frac{1}{2} d^2 s^2 + \frac{2}{3} s + \frac{1}{6a} k - \frac{1}{6a} bc^2,$$

$$u_3 = ds^2, \quad \mu_4 = -\frac{1}{2} s^2 \quad (21)$$

对应式 2 的单孤子解为:

$$u = -\frac{1}{2} d^2 s^2 + \frac{2}{3} s + \frac{k}{6a} - \frac{bc^2}{6a} + \frac{ds^2 \left( d - \sqrt{\frac{2}{s}} \tanh \left( \sqrt{\frac{s}{2}} (x - cy - kt) \right) \right)}{\left( d - \sqrt{\frac{2}{s}} \tanh \left( \sqrt{\frac{s}{2}} (x - cy - kt) \right) \right)^2} - \frac{1}{2} s^2 \left( d - \sqrt{\frac{2}{s}} \tanh \left( \sqrt{\frac{s}{2}} (x - cy - kt) \right) \right)^2 \quad (22)$$

同样, 当  $s = 1, c = 0, k = 1, a = 1, b = 1, d = 1$  (或者  $s = 1, c = 1, k = 0, a = 1, b = 1, d = 1$ ) 时, 解的三维图如图 2 所示。

利用式 6 进而得到式 1 的单孤子解。

解 1:

$$u_1 = \frac{k_1^6 x T_u}{4a T_t^7} + \frac{k_1^2}{T_t^2} \left( \frac{-\frac{1}{2} d^4 s^2 + 2d^2 s - 2}{\left( d - \sqrt{\frac{2}{s}} \tanh\left( \sqrt{\frac{s}{2}} (x - cy - kt) \right) \right)^2} + \frac{d^3 s^2 - 2ds}{d - \sqrt{\frac{2}{s}} \tanh\left( \sqrt{\frac{s}{2}} (x - cy - kt) \right)} - \frac{1}{2} d^2 s^2 + \frac{2}{3} s + \frac{k}{6a} - \frac{bc^2}{6a} \right) \quad (23)$$

解 2:

$$u_2 = \frac{k_1^6 x T_u}{4a T_t^7} + \frac{k_1^2}{T_t^2} \left( -\frac{1}{2} d^2 s^2 + \frac{2}{3} s + \frac{k}{6a} - \frac{bc^2}{6a} + ds^2 \left( d - \sqrt{\frac{2}{s}} \tanh\left( \sqrt{\frac{s}{2}} (x - cy - kt) \right) \right) - \frac{1}{2} s^2 \left( d - \sqrt{\frac{2}{s}} \tanh\left( \sqrt{\frac{s}{2}} (x - cy - kt) \right) \right)^2 \right) \quad (24)$$

通过对变系数 KP 方程的求解,可以发现:利用 Maple 只需很少的执行语句,就可以轻松地对复杂的变系数 KP 方程求精确解,并且可以利用 Maple 中的 Plots 命令绘制约化后的常系数方程孤子解三维的图形,使数学问题可视化,有助于研究者直观地分析微分方程的解。

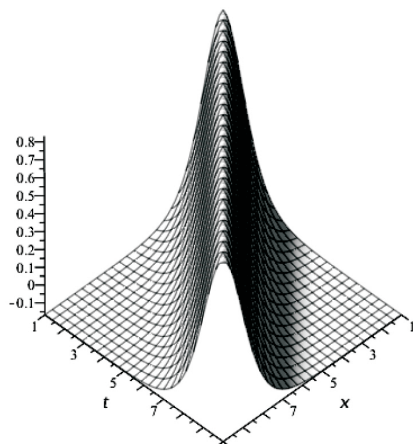


图 2 三维图(2)

### 3 结束语

以符号计算系统 Maple 为工作平台对变系数 KP 方程进行求解,利用修正的 CK 直接约化方法建立了变系数 KP 方程与其对应的常系数方程之间的关系,之后利用推广的 Painlevé 非标准截断展开法分析了常系数方程,求出了常系数方程的两个解,进而得到变系数 KP 方程的两个单孤子解。实验结果表明,该方法可用于一部分变系数偏微分方程的求解。

参考文献:

- [1] 李 梓.关于符号计算的探讨[J].计算机应用与软件,1993 (6): 25-28.
- [2] 王稼军,韩其智,张 玫,等.符号计算与物理[J].物理学

报,1992 21(11): 665-670.

- [3] 闫守礼.符号计算与科学技术进步[J].软件产业,1990 (3): 16-19.
- [4] ABLOWITZ M J. Solutions, nonlinear evolution equations and inverse scattering [M]. New York: Cambridge University Press, 1991.
- [5] HIROTA R. Solitons [M]. Berlin: Springer, 1980.
- [6] 王明亮,李志斌.齐次平衡法原则及其应用[J].兰州大学学报:自然科学版,1999 35(3): 8-16.
- [7] KADOMTSEV B B, PETVIASHVILI V I. On the stability of solitary waves in weakly dispersive media [J]. Soviet Physics Doklady, 1970, 15(6): 539-541.
- [8] 王岗伟,刘希强,张颖元.变系数 KP 方程的新精确解[J].河北师范大学学报:自然科学版,2012 36(6): 556-559.
- [9] 李 康,刘希强.广义变系数 Kuramoto-Sivashinsky 方程的显式解[J].量子电子学报,2015 32(4): 419-424.
- [10] 冯春明,刘庆松.含色散项 Zabolotskaya-Khokhlov 方程的对称、约化、精确解和守恒律[J].量子电子学报,2015 32(1): 45-52.
- [11] 程雪苹,李金玉,薛江蓉.耦合 KdV 方程的约化及求解[J].物理学报,2011 60(11): 110204.
- [12] 诸跃进.推广的 Painlevé 展开法及非线性耦合标量场方程的精确解[J].宁波大学学报:理工版,1998 11(2): 22-27.
- [13] 冯国鑫,王 卿,钱贤民.2\_1 维 Broer-Kaup 方程推广的 Painlevé 非标准截断展开和精确解[J].绍兴文理学院学报,2003 23(10): 16-20.
- [14] 楼森岳.推广的 Painlevé 展开及 KdV 方程的非标准截断解[J].物理学报,1998 47(12): 1937-1945.
- [15] 李向正,王乔丹,张金良.变系数 KP 方程和变系数广义 KP 方程的变通孤波解[J].河南科技大学学报:自然科学版,2016 37(6): 82-84.
- [16] CONTE R. Invariant Painlevé analysis of partial differential equations [J]. Physics Letters A, 1989 140(7): 383-390.
- [17] PICKERING A. A new truncation in Painlevé analysis [J]. Journal of Physics A, 1993 26(17): 4395-4405.