

# 基于稀疏度区间的变步长最优子空间追踪算法

孙润润

(安徽理工大学 计算机科学与工程学院 安徽 淮南 232001)

**摘 要:** 针对压缩感知逐步最优子空间算法(stepwise optimal subspace pursuit, SOSP)在迭代过程中使用固定步长和稀疏度未知的问题,提出一种基于稀疏度区间的变步长最优子空间追踪算法。该算法首先是在SOSP最优扩增缩减方法的基础上根据匹配测试公式获取初始固定步长,再使用增删迭代公式,在假定支撑集的增加过程中根据信号残差能量的变化判断稀疏度的区间。最后在稀疏度区间中使用黄金分割法(golden ratio)逐渐减小区间得出信号稀疏度,并在区间分割的过程中逐渐删减假定支撑集中多余的元素,最终重构原始稀疏信号。实验结果表明,对于一维信号重建实验,在不同的稀疏度和测量值下,与同类算法相比,该算法都能够很好地重建原始信号且重构误差小。对于二维图像重建实验,图像重建精度较高且有很好的视觉效果。

**关键词:** 贪婪算法; 稀疏自适应; 变步长; 最优子空间

中图分类号: TP391

文献标识码: A

文章编号: 1673-629X(2019)02-0048-06

doi: 10.3969/j.issn.1673-629X.2019.02.010

## Variable Step Size Optimal Subspace Pursuit Algorithm Based on Sparsity Interval

SUN Run-run

(School of Computer Science and Engineering, Anhui University of Science and Technology,  
Huainan 232001, China)

**Abstract:** In order to solve the problem of fixed step in the iterative process and unknown sparse signal in stepwise optimal subspace pursuit (SOSP), we propose a variable step size optimal subspace pursuit algorithm based on sparsity interval. Firstly, based on SOSP, a method of optimal expansion and reduction, the initial fixed step size is obtained according to the matching test formula. Then, the iterative formulas about addition and deletion is used to judge the sparsity interval according to the change of signal residual energy in the increase of assumed support set. Finally, the golden ratio method is used to gradually reduce the interval for getting signal sparsity in the sparsity degree interval. In the process of interval segmentation, it deletes the unwanted elements in assumed support set and reconstructs the original sparse signal. The experiment shows that for one dimensional signal reconstruction experiment, the proposed algorithm is of little reconstruction error and reconstructs the original signal well under the different sparsity and measured values compared with the different algorithm. For two-dimensional image reconstruction experiment, it has high accuracy of image reconstruction with great visual effect.

**Key words:** greedy algorithm; sparse adaptivity; variable step size; optimal subspace

### 1 概述

传统的信号采样技术通常基于Nyquist采样定理:只有当采样频率大于信号带宽的2倍以上时,采样后的数字信号才能得到原有完整的信息。高采样频率使得采样的数据量过大导致资源浪费,给硬件系统、存储处理和成本带来很大的压力。近年来国际上出现的压缩感知理论(compressed sensing, CS)解决了一系列

问题。该理论指出:如果信号是稀疏的或者在某一个稀疏域是稀疏的,那么可以选取与稀疏基不相关的矩阵对信号进行低维投影,再通过一系列的 $L_1$ 范数最小化的优化算法进行重建,可以较高精度地重构出该信号<sup>[1]</sup>。

因此,压缩感知理论打破了传统采样定理的先压缩再采样的模式,使用采样压缩并用的技术极大地节

收稿日期: 2018-03-28

修回日期: 2018-07-12

网络出版时间: 2018-11-15

基金项目: 国家自然科学基金(61471004)

作者简介: 孙润润(1995-),女,硕士,研究方向为图像处理、压缩感知。

网络出版地址: <http://kns.cnki.net/kcms/detail/61.1450.TP.20181115.1046.002.html>

省了资源,而且目前该理论已涉及众多领域,具有极大的应用价值和研究前景。

压缩感知理论主要包括三个方面:稀疏、低维观测和重构。在现实生活中很少有信号是真正稀疏的,当某个信号是可压缩时,代表该信号是可以通过稀疏信号来近似表达的。假设采样信号  $X(X \in R^{N \times 1})$ , 稀疏基  $\Psi(\Psi \in R^{N \times N})$  为正交矩阵,则  $X$  可以表示成:  $X = \Psi\Theta$ , 即为信号  $X$  在稀疏域的稀疏表示。其中  $\Theta$  的非零元个数为  $K(K \ll N)$ , 则信号  $X$  是  $K$ -稀疏的。其中常用的稀疏基包括傅里叶变换基、离散余弦基。

信号  $X$  经过稀疏基变换成稀疏信号后,再通过选取与稀疏基不相关的矩阵对信号进行压缩。假设选取矩阵  $\Phi(\Phi \in R^{M \times N})$  为观测矩阵,对信号进行低维观测:  $Y = \Phi\Psi\Theta = \Phi X$ , 其中传感矩阵  $A = \Phi\Psi$ , 满足  $M \geq K \log(N/K)$ 。其中观测数  $Y$  的维数  $M$  远小于信号  $X$  的维数  $N$ , 即  $K < M \ll N$ 。Emmanuel Candes 和 Terence Tao 提出,如果观测矩阵和稀疏基满足约束等距条件(RIP), 则可以通过求解最小  $L_0$  范数优化问题,从观测值  $Y$  中重构信号:  $\Theta = \argmin \|\Theta\|_0, s.t. A\Theta = Y$ 。但  $L_0$  范数最小化是一个 NP(nondeterministic polynomial-time hard) 问题。然而事实上,在一定条件下  $L_0$  范数求解可以转换成  $L_1$  范数求解:  $\Theta = \argmin \|\Theta\|_1, s.t. A\Theta = Y$ 。

对于上述公式的求解主要分为凸优化类算法、组合算法和贪婪算法。凸优化算法是将非凸问题转化成凸问题进行求解,计算复杂度高,包括 BP 算法、内点法、梯度投影法和迭代阈值法。组合算法要求信号的采样支持分组测试而快速重建,但是应用不大,包括傅里叶采样、链式追踪和 HHS(heavy hitters steroids) 追踪。贪婪类算法在每次迭代中寻找一个局部最优解来逐步逼近原始信号,运算速度快且重构效果好,与其他两种方法相比应用广泛。

贪婪类算法的典型首先是匹配追踪算法 MP(matching pursuit)<sup>[2]</sup>, 算法相对简单但是不能保证重建误差足够小,并且每次迭代的结果不是最优而是次优的。为解决这些问题,随后出现了正交匹配追踪算法 OMP(orthogonal matching pursuit) 在正交方向寻找非零元,保证了迭代的最优性,减少了迭代次数<sup>[3]</sup>。为

了提高算法的收敛速度,随后发展起来的算法有分段匹配追踪算法 StOMP(stagewise OMP)<sup>[4]</sup>、正则化正交匹配算法 ROMP(regularized orthogonal matching pursuit)<sup>[5]</sup>。后来又引入了具有回溯思想的压缩感知匹配追踪算法 CoSaMP(compressive sampling matching pursuit)、子空间追踪算法 SP(subspace pursuit)<sup>[6]</sup>。以上这些算法都是基于稀疏度为先验知识,但是现实生活中稀疏度  $K$  通常是未知的。T.DO 等提出了稀疏度自适应匹配追踪算法 SAMP(sparse adaptive matching pursuit)<sup>[7]</sup>, 在迭代过程中逐渐改变步长,使得逐渐逼近稀疏度  $K$ 。逐步最优子空间追踪算法 SOSP(stepwise optimal subspace pursuit) 是一种使用逐个最优扩增缩减方法修正假定支撑集的算法,保证了残差的收敛性且重构精度较高<sup>[8-9]</sup>。

文中提出的基于稀疏度区间的变步长最优子空间追踪算法 VssOSP(Variable step size optimal subspace pursuit algorithm based on sparsity interval) 就是在 SOSP 的最优增减支撑集的基础上,打破稀疏度自知的限制,根据匹配测试公式获取初始固定步长。再在假定支撑集的增加过程中,根据信号残差能量的迭代变化先判断稀疏度的区间。随着支撑集个数的不断增加,残差内积将首先单调减小最后保持为一个很小的值,且稳定在较小的范围内<sup>[10-13]</sup>。再在稀疏度区间中使用黄金分割法逐渐得出信号稀疏度,并在区间分割的过程中逐渐删减假定支撑集中多余的元素,最终重构原始稀疏信号。

## 2 基于稀疏度区间的变步长最优子空间追踪算法

### 2.1 符号定义与理论推导

假设全集  $\Omega(\Omega = \{1, 2, \dots, N\})$ , 假定支撑集为  $S(S \in \Omega)$ , 补集  $\bar{S}(S \cup \bar{S} = \Omega)$ , 矩阵  $y = \Phi x(y \in R^{M \times 1}, \Phi \in R^{M \times N}, x \in R^{N \times 1})$ ,  $i$  为选中的列索引,  $[S, i]$  表示将元素  $i$  加入到  $S$  集合中,  $S \setminus \{i\}$  表示从集合  $S$  中除去元素  $i$ , 子内积的逆矩阵  $P_S = (\Phi_S^T \Phi_S)^{-1}$ ,  $E$  为单位矩阵, 残差  $r_S = y - \Phi_S (\Phi_S^T \Phi_S)^{-1} \Phi_S^T y$ , 残差内积  $\Delta_S = r_S^T r_S$ 。

公式一: 分块矩阵求逆。

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} + A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1} \\ -(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & (D - CA^{-1}B)^{-1} \end{pmatrix}$$

由上式可以看出含有公因式  $(D - CA^{-1}B)^{-1}$ , 令  $f = D - CA^{-1}B$ , 则原式化简为:

$$\begin{pmatrix} A^{-1} + A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1} \\ -(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & (D - CA^{-1}B)^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{f} \begin{pmatrix} A^{-1}BCA^{-1} & -A^{-1}B \\ -CA^{-1} & 1 \end{pmatrix}$$

公式二: 增加假定支撑集元素的迭代公式,  $i \in \bar{S}$ 。

$$P_{[S \setminus i]} = \begin{pmatrix} P_S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{f_S} \begin{pmatrix} C_S C_S^T & -C_S \\ -C_S^T & 1 \end{pmatrix}$$

其中,  $C_S = (\Phi_S^T \Phi_S)^{-1} (\Phi_S^T \phi_i)$ ,  $P_S = (\Phi_S^T \Phi_S)^{-1}$ ;

$$A_{[S \setminus i]} = A_S + \frac{(A_S - E)(\phi_i \phi_i^T)(A_S - E)^T}{f_S}$$

其中,  $f_S = \phi_i^T (E - A_S) \phi_i$ ,  $A_S = \Phi_S (\Phi_S^T \Phi_S)^{-1} \Phi_S^T$ 。

证明:  $E$  为单位矩阵, 由残差公式:  $\Delta_S = r_S^T r_S = y^T y - y^T \Phi_S (\Phi_S^T \Phi_S)^{-1} \Phi_S^T y$ , 令  $A_S = \Phi_S (\Phi_S^T \Phi_S)^{-1} \Phi_S^T$ , 则残差公式可以简化为:  $\Delta_S = r_S^T r_S = y^T y - y^T A_S y$ 。又

$$P_{[S \setminus i]} = \begin{pmatrix} (\Phi_S^T \Phi_S)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{f_S} \begin{pmatrix} (\Phi_S^T \Phi_S)^{-1} (\Phi_S^T \phi_i) (\phi_i^T \Phi_S) (\Phi_S^T \Phi_S)^{-1} & -(\Phi_S^T \Phi_S)^{-1} (\Phi_S^T \phi_i) \\ -(\phi_i^T \Phi_S) (\Phi_S^T \Phi_S)^{-1} & 1 \end{pmatrix}$$

此时令  $C_S = (\Phi_S^T \Phi_S)^{-1} (\Phi_S^T \phi_i)$ , 则简化为:  $P_{[S \setminus i]} =$

$$\begin{pmatrix} P_S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{f_S} \begin{pmatrix} C_S C_S^T & -C_S \\ -C_S^T & 1 \end{pmatrix}。$$

再将上述  $P_{[S \setminus i]}$  带入  $A_{[S \setminus i]}$  中, 且  $A_{[S \setminus i]} = \Phi_{[S \setminus i]} P_{[S \setminus i]} \Phi_{[S \setminus i]}^T$ , 可以得出如下结果:  $A_{[S \setminus i]} = (\Phi_S \phi_i) P_{[S \setminus i]} \begin{pmatrix} \Phi_S^T \\ \phi_i^T \end{pmatrix} = (\Phi_S \phi_i) \begin{pmatrix} P_S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_S^T \\ \phi_i^T \end{pmatrix} + \frac{1}{f_S} (\Phi_S \phi_i) \begin{pmatrix} C_S C_S^T & -C_S \\ -C_S^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_S^T \\ \phi_i^T \end{pmatrix} = \Phi_S P_S \Phi_S^T + \frac{1}{f_S} (\Phi_S C_S C_S^T - \phi_i \phi_i^T - \Phi_S C_S + \phi_i) \begin{pmatrix} \Phi_S^T \\ \phi_i^T \end{pmatrix} = A_S + \frac{1}{f_S} (\Phi_S C_S - \phi_i) (C_S^T \Phi_S^T - \phi_i^T)。$

最后由  $C_S = (\Phi_S^T \Phi_S)^{-1} (\Phi_S^T \phi_i)$ , 则  $\Phi_S C_S - \phi_i = (A_S - E) \phi_i$ , 得出结果如下:

$$A_{[S \setminus i]} = A_S + \frac{(A_S - E)(\phi_i \phi_i^T)(A_S - E)^T}{f_S}$$

其中,  $f_S = \phi_i^T (E - A_S) \phi_i$ ,  $A_S = \Phi_S (\Phi_S^T \Phi_S)^{-1} \Phi_S^T$ 。

公式三: 假定支撑集增加过程中残差变化  $\Delta_S$  的迭代公式。

$$\Delta_S - \Delta_{[S \setminus i]} = \frac{y^T (A_S - E)(\phi_i \phi_i^T)(A_S - E)^T y}{f_S}$$

其中,  $f_S = \phi_i^T (E - A_S) \phi_i$ ,  $A_S = \Phi_S (\Phi_S^T \Phi_S)^{-1} \Phi_S^T$ 。

证明: 由公式二得出  $A_{[S \setminus i]}$ , 且根据上述残差简化公式  $\Delta_S = r_S^T r_S = y^T y - y^T A_S y$  得:  $\Delta_S - \Delta_{[S \setminus i]} = y^T (A_{[S \setminus i]} - A_S) y$ 。带入公式二中  $A_{[S \setminus i]}$  的公式可得出结果。

公式四: 删减假定支撑集元素的迭代公式,  $i \in S$ 。

$$P_S = \begin{pmatrix} P_{S \setminus i} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{f_{S \setminus i}} \begin{pmatrix} C_{S \setminus i} C_{S \setminus i}^T & -C_{S \setminus i} \\ -C_{S \setminus i}^T & 1 \end{pmatrix}$$

其中,  $C_{S \setminus i} = (\Phi_{S \setminus i}^T \Phi_{S \setminus i})^{-1} (\Phi_{S \setminus i}^T \phi_i)$ ,  $A_S =$

由子内积逆  $P_S = (\Phi_S^T \Phi_S)^{-1}$  得出  $A_S = \Phi_S P_S \Phi_S^T$ 。此时如果想由  $A_S$  得出  $A_{[S \setminus i]}$  进行迭代, 首先求解  $P_{[S \setminus i]}$ 。

由子内积逆公式  $P_S = (\Phi_S^T \Phi_S)^{-1}$ ,  $[S \setminus i]$  表示将元素  $i$  加入到  $S$  集合中,  $\Phi_{[S \setminus i]} = (\Phi_S \phi_i)$ , 得  $P_{[S \setminus i]} = (\Phi_{[S \setminus i]}^T \Phi_{[S \setminus i]})^{-1} = \begin{pmatrix} \Phi_S^T \Phi_S & \Phi_S^T \phi_i \\ \phi_i^T \Phi_S & \phi_i^T \phi_i \end{pmatrix}^{-1}$ 。

此时带入公式一, 则  $A = \Phi_S^T \Phi_S$ ,  $B = \Phi_S^T \phi_i$ ,  $C = \phi_i^T \Phi_S$ ,  $D = \phi_i^T \phi_i$ , 而其中公式一所述的公因式  $f$  表示为  $f_S = D - CA^{-1}B = \phi_i^T \phi_i - \phi_i^T \Phi_S (\Phi_S^T \Phi_S)^{-1} \Phi_S^T \phi_i = \phi_i^T (E - A_S) \phi_i$ , 所以:

$$A_{S \setminus \{i\}} = \frac{\Phi_S P_S (\phi_i \phi_i^T) \Phi_S^T}{P_S (\phi_i \phi_i^T)}。$$

证明:  $S \setminus \{i\}$  表示从集合  $S$  中除去选中的列索引元素  $i$ ,  $A_S = \Phi_S (\Phi_S^T \Phi_S)^{-1} \Phi_S^T$ , 为求解删减之后的  $A_{S \setminus \{i\}}$ , 可以借鉴之前的公式二。可知增加支撑集之前集合  $S$  里没有元素  $i$ , 增加之后含有元素  $i$ ; 同理, 删减支撑集之前集合  $S$  包含元素  $i$ , 删除之后不包含元素  $i$ , 包含状态类似。当前公式二为:  $A_{[S \setminus i]} = A_S + \frac{(A_S - E)(\phi_i \phi_i^T)(A_S - E)^T}{f_S}$ , 可以推算出:  $A_{S \setminus \{i\}} =$

$$A_{S \setminus \{i\}} + \frac{(A_{S \setminus \{i\}} - E)(\phi_i \phi_i^T)(A_{S \setminus \{i\}} - E)^T}{f_{S \setminus \{i\}}}。而(A_{S \setminus \{i\}} - E) \phi_i = \Phi_{S \setminus \{i\}} (\Phi_{S \setminus \{i\}}^T \Phi_{S \setminus \{i\}})^{-1} \Phi_{S \setminus \{i\}}^T \phi_i - \phi_i = (\Phi_{S \setminus \{i\}} \phi_i) \begin{pmatrix} (\Phi_{S \setminus \{i\}}^T \Phi_{S \setminus \{i\}})^{-1} \Phi_{S \setminus \{i\}}^T \phi_i \\ -1 \end{pmatrix}，$$

此时又由公式二说明的  $C_S = (\Phi_S^T \Phi_S)^{-1} (\Phi_S^T \phi_i)$  推导的  $C_{S \setminus \{i\}} = (\Phi_{S \setminus \{i\}}^T \Phi_{S \setminus \{i\}})^{-1} (\Phi_{S \setminus \{i\}}^T \phi_i)$  带入,  $(A_{S \setminus \{i\}} - E) \phi_i = (\Phi_{S \setminus \{i\}} \phi_i) \begin{pmatrix} C_{S \setminus \{i\}} \\ -1 \end{pmatrix}$ , 且其中  $(\Phi_{S \setminus \{i\}} \phi_i) = \Phi_S$ 。

将  $(A_{S \setminus \{i\}} - E) \phi_i$  的值带入  $A_{S \setminus \{i\}}$  的公式得:

$$A_{S \setminus \{i\}} = A_{S \setminus \{i\}} + \frac{\Phi_S \begin{pmatrix} C_{S \setminus \{i\}} \\ -1 \end{pmatrix} \left( \Phi_S \begin{pmatrix} C_{S \setminus \{i\}} \\ -1 \end{pmatrix} \right)^T}{f_{S \setminus \{i\}}}。再根据$$

公式二证明中的子内积逆矩阵  $P_{[S \setminus i]}: P_{[S \setminus i]} =$

$$\begin{pmatrix} P_S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{f_S} \begin{pmatrix} C_S C_S^T & -C_S \\ -C_S^T & 1 \end{pmatrix}, 可以得出 P_S = \begin{pmatrix} P_{S \setminus i} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{f_{S \setminus i}} \begin{pmatrix} C_{S \setminus i} C_{S \setminus i}^T & -C_{S \setminus i} \\ -C_{S \setminus i}^T & 1 \end{pmatrix}。$$

可以推导出:  $P_S (\phi_i \phi_i^T) = \frac{1}{f_{S \setminus i}} \begin{pmatrix} -C_{S \setminus i} \\ 1 \end{pmatrix} P_S (\phi_i \phi_i^T) =$

$$\frac{1}{f_{S/\{i\}}}(-\mathbf{C}_{S/\{i\}}^T \mathbf{1}) \mathbf{P}_S(i, i) = \frac{1}{f_{S/\{i\}}}。则$$

$$\mathbf{A}_{[S/\{i\}, i]} = \mathbf{A}_{S/\{i\}} + \frac{\Phi_S \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{S/\{i\}} \\ -1 \end{pmatrix} \left( \Phi_S \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{S/\{i\}} \\ -1 \end{pmatrix} \right)^T}{f_{S/\{i\}}} =$$

$$\mathbf{A}_{S/\{i\}} + \frac{\Phi_S \mathbf{P}_S(:, i) (\Phi_S \mathbf{P}_S(:, i))^T}{\mathbf{P}_S(i, i)} \text{ 而 } [S/\{i\}, i] = S,$$

所以可得出如下结论:  $\mathbf{A}_S - \mathbf{A}_{S/\{i\}} = \frac{\Phi_S \mathbf{P}_S(:, i) (\Phi_S \mathbf{P}_S(:, i))^T}{\mathbf{P}_S(i, i)}。$

公式五: 假定支撑集删减过程中残差变化  $\Delta_S$  的迭代公式。

$$\Delta_{S/\{i\}} - \Delta_S = \frac{\mathbf{y}^T \Phi_S \mathbf{P}_S(:, i) (\Phi_S \mathbf{P}_S(:, i))^T \mathbf{y}}{\mathbf{P}_S(i, i)}$$

证明: 由公式四得出  $\mathbf{A}_{S/\{i\}}$ , 且根据上述公式二残差简化公式  $\Delta_S = \mathbf{r}_S^T \mathbf{r}_S = \mathbf{y}^T \mathbf{y} - \mathbf{y}^T \mathbf{A}_S \mathbf{y}$ , 得出:  $\Delta_{S/\{i\}} - \Delta_S = \mathbf{y}^T (\mathbf{A}_S - \mathbf{A}_{S/\{i\}}) \mathbf{y}$ 。带入公式四  $\mathbf{A}_{S/\{i\}} \Delta_{S/\{i\}} - \Delta_S = \mathbf{y}^T (\mathbf{A}_S - \mathbf{A}_{S/\{i\}}) \mathbf{y} = \frac{\mathbf{y}^T \Phi_S \mathbf{P}_S(:, i) (\Phi_S \mathbf{P}_S(:, i))^T \mathbf{y}}{\mathbf{P}_S(i, i)}。$

## 2.2 算法步骤

文中提出的基于稀疏度区间的变步长最优子空间追踪算法在  $K$  未知的条件下, 首先使用匹配测试的方法获得初始的固定步长值, 此步长接近且小于  $K$  值, 并获得初始支撑集。再选择残差内积增量最大的原子加入支撑集, 直到满足条件停止增加并获得稀疏值  $K$  的估计区间。由于支撑集个数逐渐增加时, 残差内积首先会迅速下降, 然后趋于稳定的状态, 残差变化的拐点区间就是  $K$  值区间。当支撑集原子个数  $L \geq K$  时,  $K$  个稀疏系数都会被选中。随着残差能量单调递减, 最终收敛在一个局部最小点。最后确定残差变化过程的拐点位置, 即稀疏估计。通过区间的减小同时实现支撑集多余元素的删减, 最终重构信号。算法分为以下三个步骤:

步骤一: 选取初始固定步长。

据文献[10], 初始化  $K_0 = 1$ , 集合  $U = \text{abs}(\Phi^T \mathbf{y})$ , 取集合  $U$  中前  $K_0$  个子集。判断是否满足公式  $\|\Phi_{U_0}^T \mathbf{y}\| < \frac{1 - \delta_k}{\sqrt{1 + \delta_k}} \|\mathbf{y}\|_2$ , 如果结果为真, 则  $K_0$  自增 1, 反之  $K_0$  为所求的固定步长。其中  $K_0$  为接近且小于  $K$  的值。

步骤二: 增加支撑集直到达到要求, 获得稀疏度  $K$  的区间和增加后的支撑集。

根据步骤一得到的  $K_0$ , 定义步长  $L = K_0$ , 步长增量  $\text{step} = K_0$ ,  $t$  为迭代次数,  $R_k$  为第  $k$  次的标记,  $k$  为标记次数, 阈值  $\varepsilon$ 。

(1) 以  $L$  为步长首先增加支撑集, 根据公式二、三

选择残差内积变化量最大的前  $L$  个元素, 依次加入支撑集。

(2) 根据增加过程中的残差变化量进行判断, 若当前残差内积  $\Delta_{\text{new}}$  小于上一次迭代的残差内积  $\Delta_{t-1}$ , 则  $\Delta_t = \Delta_{\text{new}}$ ,  $t = t + 1$ ,  $L = L + \text{step}$ , 继续增加支撑集, 返回步骤(1)。

(3) 若当前残差内积  $\Delta_{\text{new}}$  大于或等于上一次迭代的  $\Delta_{t-1}$ , 说明残差内积开始变大或者基本不变, 则可能此时  $L \geq K$ 。此时开始标记上一次的残差内积:  $R_k = r_{t-1}$ ,  $k$  为标记次数。

(4) 若此时连续两次标记的位置上的残差内积之间的差值大于等于阈值  $\varepsilon$ , 即  $R_{k-1} - R_k \geq \varepsilon$ , 则  $L = L + \text{step}$  且返回继续增加支撑集, 返回步骤(1)。

(5) 若此时连续两次标记的位置上的残差内积之间的差值小于阈值  $\varepsilon$ , 即  $R_{k-1} - R_k < \varepsilon$ , 则停止迭代增加支撑集, 稀疏度区间则为  $[L - 2\text{step}, L - \text{step}]$ 。

步骤三: 黄金分割稀疏度区间至得到  $K$  值, 同时剔除多余支撑集元素, 重构稀疏信号。

根据步骤二得出的区间, 定义区间最大值为  $L_{\text{high}}$ , 区间最小值为  $L_{\text{low}}$ , 区间长度  $\text{range} = L_{\text{high}} - L_{\text{low}}$ , 取估计稀疏值  $K_{\text{try}} = L_{\text{try}} = L_{\text{high}} - \text{range} * 0.382$ 。支撑集剔除残差变化量最小的  $L$  个元素, 其中  $L$  采用黄金分割法 (golden ratio) 从区间中获取。

(1) 根据公式四、五剔除支撑集  $S$  前  $L_{\text{high}} - L_{\text{low}}$  个最小残差变化量, 得到当前假定支撑集  $S_t$ 。

(2) 若此时两次的残差变化小于阈值  $\varepsilon$ , 即  $\Delta_{\text{try}} - \Delta_{\text{high}} < \varepsilon$ , 则  $S = S_t$ ,  $L_{\text{high}} = L_{\text{try}}$ , 保留删除后的支撑集, 返回步骤(1)。

(3) 此时两次残差变化大于或等于阈值  $\varepsilon$ ,  $L_{\text{low}} = L_{\text{try}}$ , 不保留删除后的  $S_t$ ,  $L_{\text{try}} = L_{\text{high}} - \text{range} * 0.382$ , 返回步骤(1)。

(4) 不断缩小  $K$  值范围直到最终确定  $K$  值和相应的支撑集以及残差。

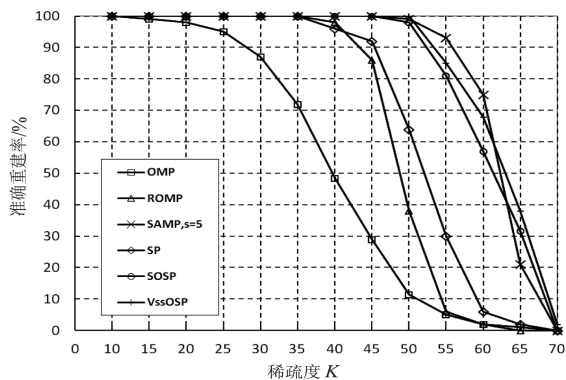
## 3 仿真实验结果及分析

### 3.1 信号重建性实验

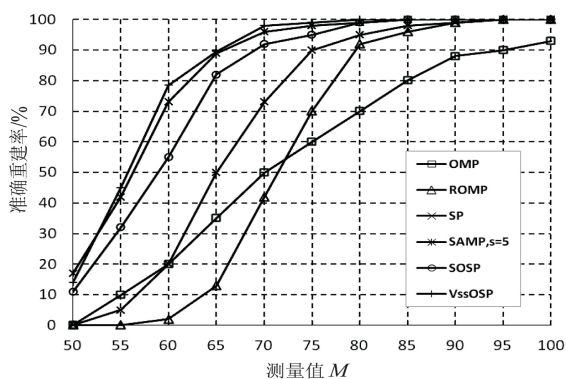
为了验证文中提出算法的重建效果和性能, 对算法进行了一系列的仿真验证实验。在实验中,  $M = 128$ ,  $N = 256$ , 观测矩阵为  $M \times N$  阶独立分布高斯随机矩阵, 原始信号  $\mathbf{x}$  为  $K$  稀疏的矩阵 (从  $\mathbf{x}$  中随机选取了  $K$  个位置, 其中每个位置为独立分布的高斯随机变量, 其他项为零), 稀疏基为单位矩阵, 通过  $\mathbf{y} = \Phi \mathbf{x}$  得到观测矩阵  $\mathbf{y}$ 。首先将文中算法 VssOSP 和典型的贪婪算法 OMP、ROMP、SP、SAMP、SOSP 进行一系列的性能仿真实验对比, 如图 1 所示。

从图 1(a) 可以看出, 所有重构算法在  $M$  固定且稀

疏度  $K$  不断增大的情况下准确重建率不断减小。但各类算法精确重构所适用的信号稀疏度范围有显著差别,OMP、ROMP、SAMP、SP、SOSP、VssOSP 在  $K \leq 18$ ,  $K \leq 35$ ,  $K \leq 46$ ,  $K \leq 37$ ,  $K \leq 48$ ,  $K \leq 50$  时能够保证 100% 准确重构稀疏信号;在  $50 \leq K \leq 62$  时, VssOSP 的重建概率开始明显下降,但依然高于 OMP、ROMP、SP、SOSP,稍低于 SAMP;但是在  $62 \leq K \leq 70$  时, VssOSP 开始稍高于 SAMP、SOSP。相对来说,在在信号所需采样数  $M$  一定的情况下, VssOSP 算法能稳定重建稀疏度更高的信号。



(a) 不同稀疏度  $K$  时的重建率 ( $M=128, N=256$ )



(b) 不同测量值  $M$  时的重建率 ( $K=20, N=256$ )

图 1 不同算法的信号准确重建率

从图 1(b) 同样可以看出,各重构算法在稀疏度固定且采样数越大时准确重构率越大。但 ROMP、SP、SAMP、SOSP、VssOSP 在  $M \geq 92$ ,  $M \geq 90$ ,  $M \geq 80$ ,  $M \geq 85$ ,  $M \geq 80$  时准确重建概率接近为 1;在  $M \geq 53$  时, VssOSP 算法准确重构率明显超过 OMP、ROMP、SP、SOSP,稍高于 SAMP。总体来说, VssOSP 算法能稳定重建信号,所需的采样数较少。

### 3.2 图像重建实验

为检验 VssOSP 算法对二维图像信号的重构性能,选择标准的二维灰度图像(256×256 的 Lena 图片)进行重构,通过比较不同算法的峰值信噪比来判断不同算法的性能。为提高重构信号的质量,先采用离散余弦变换进行基稀疏变换,然后将变换后的各行作为一维信号进行压缩采样,再用不同算法进行重建,重建

完成之后再通过反变换得到重建图像。其中观测矩阵  $\Phi$  为高斯随机矩阵,稀疏基  $\Psi$  为单位阵。

定义图像的采样率为  $M/N$ 。重建图像的质量用峰值信噪比(peak signal to noise ratio, PSNR)表示。运行时间以秒为单位,PSNR 以 dB 为单位。不同算法重构 Lena 的效果图如图 2 所示。可以看出, VssOSP 算法的重构效果明显优于 SP、CoSAMP 算法,稍优于 ROMP、OMP、SAMP、SOSP 算法。经 VssOSP 算法重建后的图像与原始图像相近且有良好的视觉效果。



图 2 不同算法重构 Lena 的效果

表 1 给出了各种算法在不同压缩比  $M/N$  为 0.3、0.4、0.5 时重建图像的 PSNR 和运行时间的对比。可以看出,随着采样率的增大,各种重建算法重建图像的 PSNR 均显著增大,通过增加观测数目可以提高重建

图像的重建质量; 在相同压缩比的条件下,  $V_{ssOSP}$  算法重建图像的 PSNR 值均为最大, 说明该算法对图像的重建精度较高。

表1 不同采样率下重构算法的性能对比

算法	$M/N = 0.3$		$M/N = 0.4$		$M/N = 0.5$	
	PSNR	运行时间	PSNR	运行时间	PSNR	运行时间
OMP	26.31	0.73	29.35	1.22	32.63	1.38
ROMP	26.96	0.47	27.48	0.59	28.09	1.14
COSAMP	14.42	0.54	17.12	0.88	19.84	1.28
SP	18.10	0.82	19.62	1.13	3.75	1.42
SAMP, $s=1$	23.14	13.78	29.04	20.45	30.65	25.88
SOSP	27.05	3.64	29.41	4.69	32.49	6.33
$V_{ssOSP}$	27.56	3.78	30.61	4.56	32.79	6.45

另外, 根据表1中的时间数据可以看出, 随着采样数的增大, 各种重建算法运行时间均增大, 而  $V_{ssOSP}$  的运行时间明显高于其他非稀疏自适应算法。从结果看,  $V_{ssOSP}$  运行时间稍高于 SOSP, 低于 SAMP。

#### 4 结束语

提出的  $V_{ssOSP}$  算法是在 SOSP 算法最优扩增缩减方法理论基础上, 打破稀疏度自知的限制, 首先使用匹配测试的方法获得初始的固定步长值, 此步长接近且小于  $K$  值, 并获得初始支撑集。再选择残差内积增量最大的元素加入支撑集, 直到满足条件停止增加并获得稀疏值  $K$  的估计区间。由于支撑集个数逐渐增加时, 残差内积首先会迅速下降, 然后趋于稳定的状态, 残差变化的拐点区间就是  $K$  值区间。最后确定残差变化过程的拐点位置, 即稀疏估计, 通过区间的减小同时实现支撑集多余元素的删减, 最终重构信号。

实验结果表明, 在各种算法性能对比之下,  $V_{ssOSP}$  在稀疏度递增或采样数变化时都可以很好地重建原始信号, 重建时间稍高于 SOSP, 低于 SAMP, 且重建后的图像与原始图像相近且有很好的视觉效果。

#### 参考文献:

- [1] DONOHOD L. Compressed sensing [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52(4): 1289-1306.
- [2] BILAVARN S, DEBES E, VANDERGHEYNST P, et al. Matching pursuits with time-frequency dictionaries [J]. Speech Communication, 1996, 20(3-4): 215-227.
- [3] TROPP J A. Greed is good: algorithmic results for sparse approximation [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2004, 50(10): 2231-2242.
- [4] DONOHO D L, TSAIG Y, DRORI I, et al. Sparse solution of underdetermined systems of linear equations by stagewise orthogonal matching pursuit [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2012, 58(2): 1094-1121.
- [5] NEEDELL D, VERSHYNIN R. Uniform uncertainty principle and signal recovery via regularized orthogonal matching pursuit [J]. Foundations of Computational Mathematics, 2009, 9(3): 317-334.
- [6] DAI Wei, MILENKOVIC O. Subspace pursuit for compressive sensing signal reconstruction [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2009, 55(5): 2230-2249.
- [7] DO T T, GAN L, NGUYEN N, et al. Sparsity adaptive matching pursuit algorithm for practical compressed sensing [C]//2008 42nd Asilomar conference on signals, systems and computers. Pacific Grove, CA, USA: IEEE, 2008: 581-587.
- [8] VARADARAJAN B, KHUDANPUR S, TRAN T D. Stepwise optimal subspace pursuit for improving sparse recovery [J]. IEEE Signal Processing Letters, 2010, 18(1): 27-30.
- [9] 田金鹏, 刘小娟, 郑国华. 一种变步长稀疏度自适应子空间追踪算法 [J]. 自动化学报, 2016, 42(10): 1512-1519.
- [10] 杨成, 冯巍, 冯辉, 等. 一种压缩采样中的稀疏度自适应子空间追踪算法 [J]. 电子学报, 2010, 38(8): 1914-1917.
- [11] 王蓉芳, 焦李成, 刘芳, 等. 利用纹理信息的图像分块自适应压缩感知 [J]. 电子学报, 2013, 41(8): 1506-1514.
- [12] 毕学霞, 尚振宏, 强振平, 等. 一种基于变步长的稀疏度自适应匹配追踪算法 [J]. 系统仿真学报, 2014, 26(9): 2116-2120.
- [13] 田淑娟, 樊晓平, 裴廷睿, 等. 基于支撑集保护的回环匹配算法 [J]. 通信学报, 2015, 36(9): 127-134.