

# 基于小波树和互补分解的 CS-MRI 重建算法

裴颖<sup>1,2</sup>, 朱金秀<sup>1,2</sup>, 杨语晨<sup>1</sup>, 吴文霞<sup>1,2</sup>

(1. 河海大学 物联网工程学院, 江苏 常州 213022;  
2. 南通河海大学 海洋与近海工程研究院, 江苏 南通 226300)

**摘要:**针对压缩感知(CS)核磁共振成像(MRI)重建算法中全变分(TV)正则项会导致图像细节丢失的问题,引入互补分解模型,结合小波树结构稀疏(简称小波树),提出一种基于小波树和互补分解的CS-MRI重建算法。利用互补分解将图像分成平滑分量和残差分量两个部分,并将平滑分量用于TV正则项,残差分量用于 $\ell_1$ 范数,可避免TV正则项在滤除噪声的同时滤除过多的细节信息;利用小波树结构稀疏可进一步补充小波稀疏等先验信息,减少测量值或提高信噪比。针对目标函数中存在平滑和残差两个未知分量,将目标函数分解为相应的两个子问题交替最小化进行求解。实验结果表明,与基于小波树的WaTMRI和基于TV的TVCMRI、FCSA等重建算法相比,其能在滤除噪声的同时有效改善MRI图像的细节信息。

**关键词:**核磁共振成像;压缩感知;互补分解;小波树结构稀疏(小波树);目标函数;重建算法

中图分类号:TP301.6

文献标识码:A

文章编号:1673-629X(2018)12-0152-05

doi:10.3969/j.issn.1673-629X.2018.12.032

## A CS-MRI Algorithm Based on Complementary Dual Decomposition and Wavelet Tree

PEI Ying<sup>1,2</sup>, ZHU Jin-xiu<sup>1,2</sup>, YANG Yu-chen<sup>1</sup>, WU Wen-xia<sup>1,2</sup>

(1. School of Internet of Things Engineering, Hohai University, Changzhou 213022, China;

2. Research Institute of Ocean and Offshore Engineering, Hohai University, Nantong 226300, China)

**Abstract:** Aiming at the problem that total variation (TV) regularities in compressed sensing (CS) nuclear magnetic resonance imaging (MRI) reconstruction algorithm can lead to the loss of image details, we propose a CS-MRI reconstruction algorithm based on wavelet tree and complementary decomposition by introducing the complementary decomposition model and combining the sparse wavelet tree structure (referred to as wavelet tree). By using complementary decomposition, the image is divided into smooth component and residual component, and the smooth component is used for TV regular term, and the residual component for  $\ell_1$  norm, which can avoid the TV regular term from filtering out too much details while removing noise. By using the sparse wavelet tree structure, the prior information such as the sparse wavelet can be further supplemented to reduce the measured value or improve the signal-to-noise ratio. The objective function is decomposed into the corresponding subproblems and minimized alternately to solve the unknown components of smooth and residual in it. Experiment demonstrates that compared with WaTMRI based on wavelet tree and TVCMRI and FCSA based on TV, the proposed algorithm can effectively improve the details of MRI images while filtering out noise.

**Key words:** magnetic resonance imaging; compressed sensing; complementary dual decomposition; wavelet tree structure; objective function; reconstruction algorithm

## 0 引言

核磁共振成像(magnetic resonance imaging, MRI)是医学成像,应用广泛。目前MRI应用的关键在于快速成像。Nyquist采样定理需两倍带宽,不符合实际应用<sup>[1]</sup>,现常用方法是在压缩感知(compressed sensing,

CS)<sup>[2-3]</sup>框架下,从欠采样 $k$ 空间中重建MRI数据,能有效减少采样时间,达到快速成像的目的。

关于CS-MRI重建算法的研究有很多。例如, Lusting等<sup>[4]</sup>利用全变分(total variation, TV)和小波构建目标函数,提出共轭梯度算法(CG),但重建时间有

收稿日期:2018-01-07

修回日期:2018-05-16

网络出版时间:2018-07-04

基金项目:国家自然科学基金(61273170);2016年南通市市级科技计划(2016800303)

作者简介:裴颖(1993-),女,硕士研究生,研究方向为信号与信息处理;朱金秀,博士,副教授,硕导,研究方向为压缩感知、视频处理。

网络出版地址: <http://kns.cnki.net/kcms/detail/61.1450.TP.20180525.1550.020.html>

待提高;FISTA 算法<sup>[5]</sup>通过计算更合适的起始点以加快收敛速度;TVC MRI<sup>[6]</sup>、RecPF<sup>[7]</sup>和 FCSA<sup>[8]</sup>算法利用算子分割、变量分割思想求解联合正则算子,提高重建速度和质量;文献[9]利用图像在频域的特性优化测量矩阵并提出迭代加权算法,提高了重建精度;文献[2,10]利用 MR 图像低秩特性进行奇异值分解,但过程过于复杂;文献[11-12]提出结构稀疏理论,图像不仅在小波域有稀疏性,其小波稀疏系数也有特定的四叉树结构,在此基础上文献[13]提出 YALLI 算法,利用小波树结构稀疏代替小波稀疏构建目标函数,以提高图像稀疏度;文献[14]提出 WaTMRI 算法,联合小波树结构稀疏和小波稀疏分别拥有的结构稀疏和稀疏性,联合改善图像质量;Park 等<sup>[15]</sup>提出互补分解,将完整图像分为平滑和残差两个分量,仅将平滑分量用于 TV,残差分量用于  $\ell_1$  范数,以解决全变分导致的细节过平滑问题;文献[16]利用贪婪算法提高重建速度,但需要确定图像稀疏度,缺乏实际性;文献[17]基于  $\ell_p$  范数构建重建算法,计算较为复杂。

重建算法常用小波稀疏和 TV 构建目标函数,但

TV 会在滤除噪声的同时平滑图像的边缘纹理信息。因此,文中提出一种基于小波树和互补分解的 CS-MRI (MRI based on complementary dual decomposition and wavelet tree sparsity, DualWaTMRI) 重建算法,利用互补分解抑制 TV 造成的细节过平滑问题,小波树结构稀疏用于补充小波稀疏的先验信息,并与同类重建算法进行了对比。

## 1 基于小波树和互补分解的 CS-MRI 重建算法

基于小波树和互补分解的 CS-MRI 重建算法系统框架如图 1 所示。首先欠采样输入数据得到测量值  $b$ , 将其傅里叶逆变换预处理生成初始重构图像, 再对其互补分解, 生成初始残差分量和平滑分量, 分别进行 TV 和  $\ell_1$  范数处理, 同时利用结构化稀疏理论<sup>[13]</sup>, 对整幅图像进行小波树结构稀疏处理, 最后与最小二乘拟合共同构建目标函数。同时, 提出 DualWaTMRI 重构算法进行求解, 分别得到重构的残差分量和平滑分量, 由两分量叠加组成最终的重建图像。

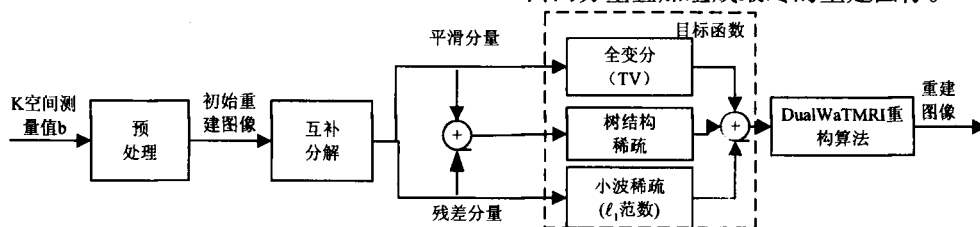


图 1 算法系统框架

### 1.1 基于小波树和互补分解的目标函数

#### 1.1.1 小波树

小波树结构稀疏是图像的小波稀疏系数呈四叉树结构分布,称大尺寸处的系数值是父系数,相邻小尺寸的系数值是子系数,则父子系数间有依赖性,即当某一位置的小波稀疏系数值很大(或接近于 0)时,同位置邻近尺度的小波稀疏系数值也很大(或接近于 0)。根据该特性将系数分组,生成小波树结构稀疏正则项  $\sum_{g \in \zeta} \|(\varphi x)_g\|_2$ , 其中  $\varphi$  表示小波稀疏基,  $x$  表示 MR 图像,  $\zeta$  表示小波树形分组的集合,  $g$  表示其中一组。

#### 1.1.2 互补分解

考虑到对整幅图像进行 TV 处理会同时平滑噪声和图像的细节信息,引入互补分解模型<sup>[13]</sup>,将 MR 图像看成是平滑分量和残差分量的叠加:

$$x = L + S \quad (1)$$

其中,  $x$  表示 MR 图像;  $L$  表示灰度值缓慢变化的平滑分量,一般代表图像背景信息;  $S$  表示灰度值快速变化的残差分量,一般代表图像中前景信息。

为避免 TV 过平滑图像,仅对  $L$  进行 TV 处理,  $S$

进行小波稀疏处理。文中利用边缘检测算子 Sobel<sup>[18]</sup>对图像进行互补分解,令初始残差分量  $S^0$  为分解得到的边缘信息,初始平滑分量  $L^0$  为 0。Sobel 算子通过核与像素值做卷积和运算,选取合适的阈值提取边缘信息,阈值计算方法为  $T = \mu * 255$ , 其中  $\mu$  是阈值比。

#### 1.1.3 目标函数

综合互补分解和小波树结构稀疏的优势,提出基于小波树和互补分解的 CS-MRI 重建算法,构建目标函数如下:

$$(L + S) = \arg \min_{L, S} \left\{ \frac{1}{2} \|A(L + S) - b\|_2^2 + \alpha \|L\|_{TV} + \beta (\|\varphi S\|_1 + \sum_{g \in \zeta} \|(\varphi(L + S))_g\|_2) \right\} \quad (2)$$

其中,  $L$ ,  $S$  分别是平滑和残差分量;  $A$  是测量矩阵;  $b$  是测量值;  $\varphi$  是小波稀疏基;  $\zeta$  是小波树形分组的集合;  $g$  表示其中一组;  $\alpha$  和  $\beta$  是调优参数,用于平衡所占比重。式 2 中第一项最小二乘拟合项用于保证重建图像的准确度,第二项平滑分量的 TV 项用于抑制噪声,避免图像过平滑,第三项残差分量的  $\ell_1$  范数用于保证小波稀疏,第四项小波树结构稀疏项用于保

证图像的结构稀疏性。这四个正则项相互补充,增加图像先验信息,提高算法的鲁棒性。

## 1.2 DualWaTMRI 重构算法

针对式2中的 $L$ 和 $S$ 两个未知量,利用交替最小化方法构建 DualWaTMRI 重构算法进行求解,将目标函数分为 $L$ 子问题(此时 $S$ 为固定值)和 $S$ 子问题(此时 $L$ 为固定值),同时将这两个子问题交替迭代,最后重建图像 $x$ 即是求解得到的 $L$ 和 $S$ 值之和。

### 1.2.1 $L$ 子问题求解

求解 $L$ 子问题时,假设 $S$ 为固定值,则最小化求解时可省略常数项。 $L$ 子问题公式表示如下:

$$L = \arg \min_L \left\{ \frac{1}{2} \|AL - (b - AS)\|_2^2 + \alpha \|L\|_{TV} + \beta \sum_{g \in \zeta} \|(\varphi L)_g\|_2 \right\} \quad (3)$$

为简便求解小波树结构稀疏正则项,令 $zp = G\varphi L$ ,其中 $G$ 是 $\zeta$ 的二值矩阵<sup>[15]</sup>,式3改为:

$$L = \arg \min_L \left\{ \frac{1}{2} \|AL - (b - AS)\|_2^2 + \alpha \|L\|_{TV} + \frac{\lambda}{2} \|zp - G\varphi L\|_2^2 + \beta \sum_{i=1}^s \|zp_{g_i}\|_2 \right\} \quad (4)$$

其中, $\lambda$ 是调优参数; $\zeta$ 中共有 $s$ 组 $g$ , $g_i$ 表示第 $i$ 组 $g$ ,即第 $i$ 个具有父子依赖性的小波系数组, $i = 1, 2, \dots, s$ 。式4中亦包含 $zp$ 和 $L$ 两个未知量,采用交替最小化进一步细化:

(1)  $L$ 子问题中 $zp$ 未知量按 $g_i$ 分组求解:

$$zp_{g_i} = \arg \min_{zp_{g_i}} \left( \frac{\lambda}{2} \|zp_{g_i} - (G\varphi L)_{g_i}\|_2^2 + \beta \|zp_{g_i}\|_2 \right) \quad (5)$$

上式可采用分组软阈值法求解,令 $rp_i = (G\varphi L)_{g_i}$ :

$$zp_{g_i} = \max \left( \|rp_i\|_2 - \frac{\beta}{\lambda}, 0 \right) \frac{rp_i}{\|rp_i\|_2}, \quad i = 1, 2, \dots, s \quad (6)$$

由上式求解 $zp_{g_i}$ 值,将其按位置线性组合生成 $zp$ 。

(2)  $L$ 子问题中 $L$ 未知量求解公式如下:

$$L = \arg \min_L \left\{ \frac{1}{2} \|AL - (b - AS)\|_2^2 + \alpha \|L\|_{TV} + \frac{\lambda}{2} \|zp - G\varphi L\|_2^2 \right\} \quad (7)$$

其中, $zp$ 值由式6解得。式7可采用 FISTA<sup>[5]</sup>算法求解得到 $L$ 值。

### 1.2.2 $S$ 子问题求解

与 $L$ 子问题类似,求解未知量 $S$ 时假设 $L$ 为固定值,求解公式如下:

$$S = \arg \min_S \left\{ \frac{1}{2} \|AS - (b - AL)\|_2^2 + \beta (\|\varphi S\|_1 + \sum_{g \in \zeta} \|(\varphi S)_g\|_2) \right\} \quad (8)$$

同样的,令 $zr = G\varphi S$ ,上式更新为:

$$S = \arg \min_S \left\{ \frac{1}{2} \|AS - (b - AL)\|_2^2 + \beta \|\varphi S\|_1 + \frac{\lambda}{2} \|zr - G\varphi S\|_2^2 + \beta \sum_{i=1}^s \|zr_{g_i}\| \right\} \quad (9)$$

(1)未知量 $zr$ 可通过分组软阈值法得到,令 $rr_i = (G\varphi S)_{g_i}$ ,求解公式为:

$$zr_{g_i} = \max \left( \|rr_i\|_2 - \frac{\beta}{\lambda}, 0 \right) \frac{rr_i}{\|rr_i\|_2}, \quad i = 1, 2, \dots, s \quad (10)$$

(2)未知量 $S$ 求解公式如下:

$$S = \arg \min_S \left\{ \frac{1}{2} \|AS - (b - AL)\|_2^2 + \beta \|\varphi S\|_1 + \frac{\lambda}{2} \|zr - G\varphi S\|_2^2 \right\} \quad (11)$$

上式亦可采用 FISTA 方法求解。

### 1.2.3 重建算法总结

针对目标函数,利用交替最小化将函数分为两个子问题求解,结合上述重建步骤构建算法 DualWaTMRI,该算法重建步骤总结如下:

输入:最大迭代次数 $N$ , $k$ 空间测量值 $b$ ,阈值比 $\mu$ 。

步骤1:初始化。

步骤1.1:对 $b$ 进行傅里叶逆变换预处理,生成初始图像 $x^0$ ;

步骤1.2:对 $x^0$ 取合适的阈值 $\mu$ 互补分解得到初始残差分量 $S^0$ ;

步骤1.3:令初始平滑分量 $L^0 = 0$ , $n$ 为迭代次数,初始化 $n = 1, \rho = 1/L_f$ 。

步骤2:交替最小化求解。

步骤2.1:求解 $L$ 子问题:给定 $S^{n-1}$ ,结合 $L^{n-1}$ 求解式5得到 $zp$ 值,将 $zp$ 值代入式7求解 $L^n$ ;

步骤2.2:求解 $S$ 子问题:给定 $L^n$ ,结合 $S^{n-1}$ 求解式10得到 $zr$ 值,将 $zr$ 值代入式11求解 $S^n$ ;

步骤2.3:令 $n = n + 1$ ,判断 $n$ 是否等于 $N$ ,若不等于,回到步骤2.1,否则跳到步骤2.4;

步骤2.4:重建图像是平滑分量和残差分量的叠加: $x = L + S$ (此时 $L = L^n, S = S^n$ )。

## 2 实验结果与分析

对 Chest, Heart, Brain 和 Shoulder 等四幅标准 MRI 图像进行实验。将 DualWaTMRI 与 CG<sup>[4]</sup>、TVCMRI<sup>[6]</sup>、FCSA<sup>[8]</sup>和 WaTMRI<sup>[15]</sup>算法进行比较。根据经验设 $\alpha = 0.02, \beta = 3.5e - 2, \lambda = \beta/2, L_f = 1$ 。同时选小波为稀

疏基,伪高斯<sup>[6]</sup>为采样模板,测量矩阵为采样模板下的部分傅里叶矩阵。结果如表 1 所示。

表 1 四幅 MR 图像进行重建时的 PSNR 结果 dB

标准图像	CG	TVMRI	FCSA	WaTMRI	DualWaTMRI
Heart	8.827 1	14.354 9	17.9505	18.554 5	20.2540
Chest	10.439 8	13.808 2	15.539 9	16.316 7	16.953 4
Shoulder	10.017 9	15.676 5	20.410 5	21.779 4	22.388 3
Brain	8.706 8	13.699 5	15.938 4	16.950 7	18.649 0

2.1 实验参数:阈值比  $\mu$  的选取

对 DualWaTMRI 算法进行仿真,阈值比  $\mu$  取值从 0 到 1,结果如图 2 所示。

从图 2 可看出,在  $\mu$  取值为 0.05 ~ 0.20 时,SNR 值急剧上升,在  $\mu$  大于 0.20 时,SNR 值稍有减少,最后趋于平缓。可以得出,在 DualWaTMRI 算法互补分解模型中  $\mu$  取值 0.16。

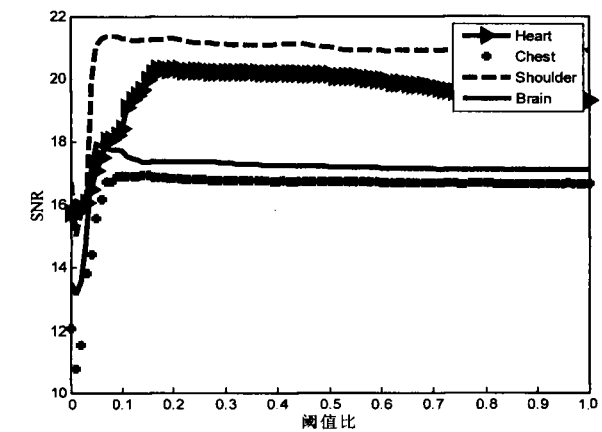


图 2 仿真结果对比

2.2 重构性能的比较

将 MR 图像分别通过 CG、TVMRI、FCSA、WaTMRI 和 DualWaTMRI 等算法进行仿真,结果分别如图 3、4 和表 1 所示。

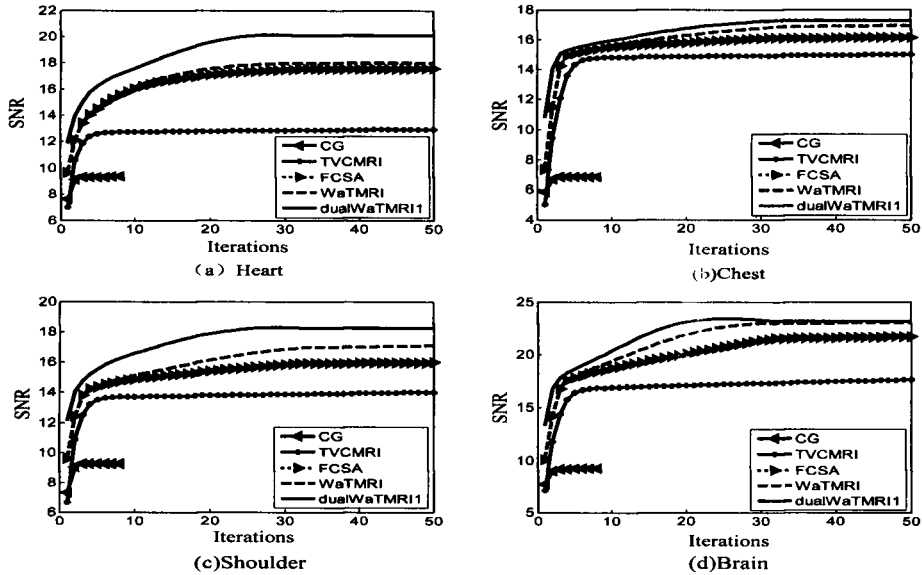


图 3 四幅 MR 图像的 SNR 比较

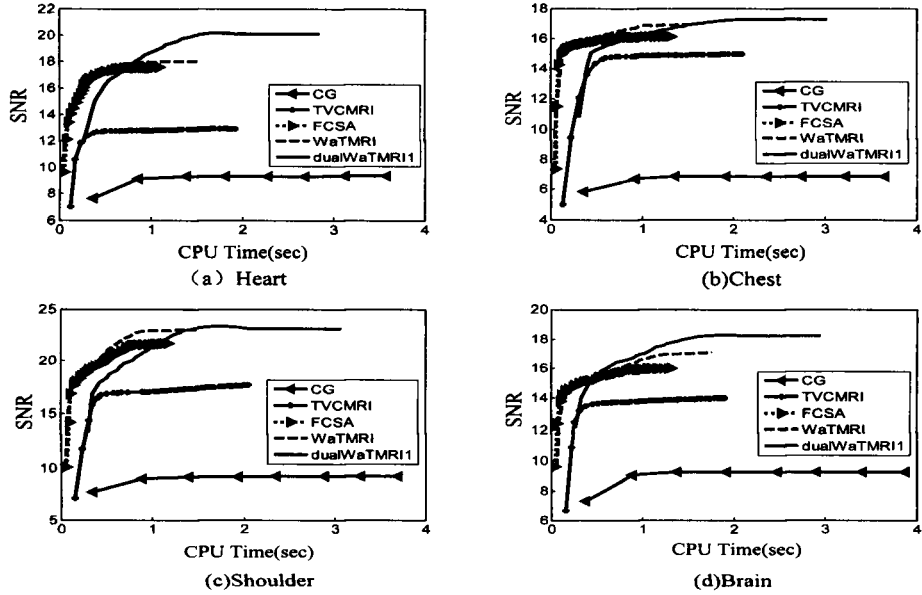


图 4 四幅 MR 图像的  $t$  比较

图3和图4给出了四幅MR图像通过不同算法得到的仿真结果折线图(SNR和 $t$ )。表1给出了SNR具体值。从图3和表1中可以看出,四幅MR图像通过DualWaTMRI算法得到的信噪比最高,比WaTMRI算法分别高出约1.69 dB、0.63 dB、0.60 dB和1.70 dB,更优于其他算法。但图4中DualWaTMRI算法上升趋势最慢,表明重建时间长,这是由于目标函数中有两个未知量,需要交替求解,因此文中算法通过牺牲少量计算时间,达到增加信噪比的目的。

综上,DualWaTMRI算法与同类CS-MRI算法相比,虽然由于先验信息丰富导致图像的重建时间有所增加,但重建图像的质量有一定改善。

### 3 结束语

为改善TV造成的图像细节模糊问题,引入互补分解模型,与小波树结构稀疏相结合,提出一种基于小波树和互补分解的CS-MRI重建算法。利用互补分解模型将MR图像分为平滑和残差两个分量,仅将平滑分量用于TV,残差分量用于 $\ell_1$ 范数,利用两个分量各自的特性,很好地保留了图像的细节信息,同时利用树结构稀疏特性,丰富图像的先验信息,使得在同等数目的扫描数据下,能得到更好的重建图像,或者只需更少的扫描数据,就能获得同等质量的重建图像。实验结果表明,与现有的基于整幅图像全变分、基于小波树的算法相比,该算法以部分运算时间为代价很好地改善了MR图像的重建质量。

#### 参考文献:

- [1] 蒋 沅,苗生伟,罗华柱,等.  $L_p$  范数压缩感知图像重建优化算法[J]. 中国图象图形学报,2017,22(4):435-442.
- [2] 王郗雨,杨晓梅,胡学姝. 基于奇异值分解的压缩感知核磁共振图像重构算法[J]. 计算机应用研究,2013,30(4):1247-1249.
- [3] 赵 扬,王敬时,王 伟,等. 基于压缩感知的磁共振血管快速成像的研究进展[J]. 医疗卫生装备,2016,37(3):104-109.
- [4] LUSTIG M,DONOH O D,PAULY J M. Sparse MRI:the application of compressed sensing for rapid MR imaging[J]. Magnetic Resonance in Medicine,2007,58(6):1182-1195.
- [5] BECK A,TEBOULLE M. A fast iterative shrinkage-thresholding algorithm for linear inverse problems[J]. SIAM Journal on Imaging Sciences,2009,2(1):183-202.
- [6] MA Shiqian,YIN Wotao,ZHANG Yin,et al. An efficient algorithm for compressed MR imaging using total variation and wavelets[C]//IEEE conference on computer vision and pattern recognition. Anchorage,AK,USA:IEEE,2008:1-8.
- [7] YANG Junfeng,ZHANG Yin,YIN Wotao. A fast alternating direction method for TVL1-L2 signal reconstruction from partial Fourier data[J]. IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing,2010,4(2):288-297.
- [8] HUANG Junzhou,ZHANG Shaoting,METAXAS D. Efficient MR image reconstruction for compressed MR imaging[J]. Medical Image Analysis,2010,15(5):670-679.
- [9] 袁 静. 基于压缩感知的核磁共振成像重构算法[J]. 计算机工程,2015,41(10):270-274.
- [10] 陈思吉,杨晓梅,吕雪霜. 基于稀疏和低秩先验分离的快速动态MRI重建[J]. 计算机应用研究,2016,33(10):3196-3200.
- [11] HEGDE C,INDYK P,SCHMIDT L. Approximation algorithms for model-based compressive sensing[J]. IEEE Transactions on Information Theory,2015,61(9):5129-5147.
- [12] 孙 洪,张智林,余 磊. 从稀疏到结构化稀疏:贝叶斯方法[J]. 信号处理,2012,28(6):759-773.
- [13] DENG Wei,YIN Wotao,ZHANG Yin. Group sparse optimization by alternating direction method[C]//SPIE optical engineering+ applications. [s. l. ]:International Society for Optics and Photonics,2013.
- [14] CHEN Chen,HUANG Junzhou. Exploiting the wavelet structure in compressed sensing MRI[J]. Magnetic Resonance Imaging,2014,32(10):1377-1389.
- [15] PARK S,PARK J. Compressed sensing MRI exploiting complementary dual decomposition[J]. Medical Image Analysis,2014,18(3):472-486.
- [16] 李少东,裴文炯,杨 军,等. 贝叶斯模型下的OMP重构算法及应用[J]. 系统工程与电子技术,2015,37(2):246-252.
- [17] LI Zechao,TANG Jinhui. Unsupervised feature selection via nonnegative spectral analysis and redundancy control[J]. IEEE Transactions on Image Processing,2015,24(12):5343-5355.
- [18] 沈德海,张龙昌,鄂 旭. 基于Sobel算子的改进边缘检测算法[J]. 信息技术,2015,39(4):15-18.