

一种改进的粒子群算法的分数阶控制研究

兰 歆, 韦宏利, 陈超波

(西安工业大学 电子信息工程学院, 陕西 西安 710021)

摘 要: 分数阶 PID 控制器在工程应用中出现了控制参数多且难以整定等问题。针对这些问题, 提出一种改进的粒子群分数阶控制算法, 并在单级倒立摆控制系统中进行实验验证。该算法将混沌算法与惯性权重调整的粒子群算法相融合, 对粒子群进行混沌初始化, 并将陷入局部最优的粒子进行混沌搜索, 既优化了惯性权重非线性调整方法来提高算法的收敛精度, 又得到了全局最优解。实验结果表明, CAPSO 算法在分数阶控制器的参数整定方面优于主导极点法、粒子群优化 (PSO) 等算法。与 PSO 算法相比, 具有收敛速度快、超调量小、稳定性好、抗干扰性强等特点; 经 CAPSO 算法优化的分数阶控制器动态响应特性要优于整数阶 PID 控制器。

关键词: 分数阶; 混沌算法; 粒子群优化; 自适应控制; 惯性权重

中图分类号: TP273

文献标识码: A

文章编号: 1673-629X(2018)10-0145-05

doi: 10.3969/j.issn.1673-629X.2018.10.030

Research on Fractional Order Control of an Improved Particle Swarm Optimization Algorithm

LAN Xin, WEI Hong-li, CHEN Chao-bo

(School of Electronic and Information Engineering, Xi'an Technological University, Xi'an 710021, China)

Abstract: The fractional PID controller exists too many control parameters and difficult parameter tuning and other problems in engineering. Therefore, we propose a fractional order control algorithm called chaotic adaptive particle swarm optimization (CAPSO), which is verified by the single inverted pendulum control system. This algorithm combines the chaos algorithm with inertia weight adjustment of the particle swarm algorithm. After the chaotic initialization of particle swarm, it exerts chaotic search on the swarms falling into the local optimal particle, not only optimizing nonlinear inertia weight adjustment method to improve its convergence accuracy, but also getting the global optimum solution. The experiment shows that the CAPSO is better than the dominant pole method and PSO in the parameter tuning of the fractional order controller. Compared with PSO, it has many merits of the fast convergence speed, small overshoot, strong stability and anti-interference. The dynamic response of the system with fractional order controller optimized by CAPSO is better than that with integer order PID controller.

Key words: fractional order; chaos algorithm; particle swarm optimization; adaptive control; inertia weight

0 引言

随着自动控制的发展, 及其在工业、农业、交通运输和国防等各领域应用的不断提高, 高精度的控制也逐步提升。倒立摆是一个非线性、多变量、强耦合、不稳定的高阶系统, 具有形象、直观、结构简单、物理参数和形状易于改变、成本低廉等优势。在控制理论发展过程中, 将创新的控制算法应用到倒立摆系统的控制上, 可验证该控制理论的性能, 评判它在实际应用中的可行性, 并对各种方法的控制性能进行对比, 从而提出

控制效果更优的控制算法。倒立摆系统控制的方法有: PID 控制^[1]、状态反馈控制^[2]、模糊控制^[3]、拟人智能控制^[4]、滑模变结构控制^[5]等等。

分数阶微积分 (fractional-order calculus) 是传统整数阶微积分的广义形式, 两者同时产生。分数阶微积分, 指微分、积分的阶次是任意的也可以是分数的, 优于整数阶。分数阶微积分在科技、工程和工业等领域的应用不断增加。分数阶控制系统可以用时域、频域、复域进行表示, 也可通过稳定性、鲁棒性、可

收稿日期: 2017-11-14

修回日期: 2018-03-21

网络出版时间: 2018-05-28

基金项目: 陕西省国际科技合作计划项目 (2017KW-009); 陕西省教育科研计划项目 (16JF013)

作者简介: 兰 歆 (1992-), 女, 硕士研究生, 研究方向为分数阶伺服控制; 韦宏利, 副教授, 研究方向为智能控制; 陈超波, 教授, 研究方向为分数阶系统和故障诊断与容错控制等。

网络出版地址: <http://cnki.net/kcms/detail/61.1450.TP.20180525.1558.034.html>

观性、可控性等来分析。其中对分数阶具有很大影响的是 Igor Podlubny 教授提出的 $PI^{\lambda}D^{\mu}$ [6]。分数阶 PID 不仅是从整数阶扩充到分数阶,同时比传统的 PID 控制多了 2 个可调参数:积分阶次 λ 和微分阶次 μ ,这相当于增加了两个维度,更便于调控 [7-13]。

随着 $PI^{\lambda}D^{\mu}$ 的提出及广泛应用,对其参数寻优方法的研究受到了研究者的青睐。Vinagre [14] 提出了基于相角裕度和幅值裕度方法,还提出了极点阶数搜索法(即通过估计 K 来搜索一对较优的极点在时域上)。文献[15]采用对称优化方法改进了相角裕度和幅值裕度。文献[16-17]采用 3 种方法来研究 $PI^{\lambda}D^{\mu}$ 的参数整定。上述方法都有一个共同的特点,即控制器参数都通过大量的公式推导得出,计算量相当大且繁琐复杂。文献[18]在 $PI^{\lambda}D^{\mu}$ 设计中加入粒子群算法,简化了结构以及参数设置,同时拥有非常强大的全局优化水平且便于实现,但是未能改善 PSO 算法易陷入局部最优和收敛效率低等问题。

在上述研究基础上,文中提出一种 CAPSO 算法,结合自适应调节惯性权重的算法和混沌粒子群算法,以避免算法的局部收敛、提高算法的精确度。

1 倒立摆数学建模与分析

文中倒立摆系统描述中涉及的符号、物理意义及相关数值如表 1 所示。

表 1 直线一级倒立摆的参数指标

符号	意义	数值
M	小车质量/kg	1.096
m	摆杆质量/kg	0.109
f	小车摩擦力/N	0.1
l	摆杆轴心到杆质心的距离/m	0.25
I	摆杆惯量/($\text{kg} \cdot \text{m}^2$)	0.002 23
F	加在小车上的力/N	
x	小车位置/m	
F_s	摆杆的水平方向的干扰力/N	
F_h	摆杆的垂直方向的干扰力/N	
F_g	F_s 和 F_h 的合力/N	
g	重力加速度/($\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$)	9.8
θ	摆杆与垂直向方向的夹角/deg	

倒立摆受力分析如图 1 所示。

由图 1 可得:

$M\ddot{x} = F - f - N$ (1)

$F_h = F_g \cdot \cos\alpha$ (2)

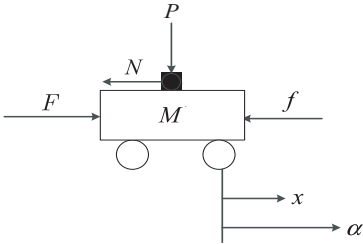
$F_s = F_g \cdot \sin\alpha$ (3)

对摆杆水平方向的受力进行分析可得:

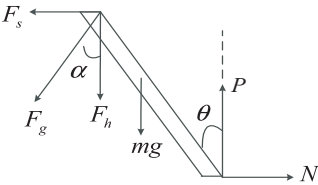
$N - F_s = m \frac{d^2}{dt^2}(x + l \cdot \sin\theta)$ (4)

对摆杆垂直方向的受力进行分析可得:

$-P + mg + F_A = m \frac{d^2}{dt^2}(l - l\cos\theta)$ (5)



(a) 系统中小车的受力分析



(b) 摆杆受力分析

图 1 倒立摆受力分析

基于力矩平衡方程得:

$F_g l \sin\alpha \cos\theta + F_g l \cos\alpha \sin\theta + Pl \sin\theta + N l \cos\theta + I \ddot{\theta} = 0$ (6)

化简得:

$2F_g l \sin\alpha \cos\theta + 2F_g l \cos\alpha \sin\theta + (I + ml^2 \cos 2\theta) \ddot{\theta} + mgl \sin\theta - ml^2 \dot{\theta}^2 \sin\theta + ml \ddot{x} \cos\theta = 0$

假设 $\theta \ll 1$, 则可以进行近似处理:

$\cos\theta = 1, \sin\theta = \theta, (\frac{d\theta}{dt})^2 = 0$ (7)

$\cos 2\theta = 1, \sin 2\theta = \theta$

$I = \frac{1}{3} ml^2$ (8)

方程化为:

$2F_g(-\sin\alpha - \theta \cos\alpha) + \frac{4}{3} ml \ddot{\theta} - mg\theta = m \ddot{x}$
令 $F_f = F_g(-\sin\alpha - \theta \cos\alpha)$, 则上式化为:
 $2F_f + \frac{4}{3} ml \ddot{\theta} - mg\theta = m \ddot{x}$ (9)

代入实际数据后,得到:

$\ddot{\theta} = 29.4\theta + 3\ddot{x} - 2 \frac{F_f}{m}$ (10)

忽略 F_f , 得到如下系统的微分方程:

$\ddot{\theta} = 29.4\theta + 3\ddot{x}$ (11)

以小车的位移 x 、小车的速度 \dot{x} 、摆杆的角度 θ 、摆杆的角速度 $\dot{\theta}$ 为输入 X , 以小车的位移 x 、摆杆的角

度 θ 为输出 Y 。即

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ x \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 29.4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} u \quad (12)$$

$$y = \begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad (13)$$

2 分数阶 PID 控制器

2.1 分数阶微积分基本定义

分数阶微积分算子为 ${}_aD_t^\alpha$ 。其中 a, t 为算子的上、下线(限), α 为微分或积分的阶次,若为复数,定义为:

$${}_aD_t^\alpha = \begin{cases} \frac{d^\alpha}{dt^\alpha}, R_e(\alpha) > 0 \\ 1, R_e(\alpha) = 0 \\ \int_a^t (d\tau)^{(-\alpha)}, R_e(\alpha) < 0 \end{cases} \quad (14)$$

Grünwald-Letnikov 分数阶微积分定义:对于任意实数 $m > 0$, 整数部分为 $[m]$ (即 $[m]$ 为小于 m 的最大整数), 则函数 $f(t)$ 的 α 阶微积分为:

$$\begin{aligned} {}_aD_t^\alpha f(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} h^{-\alpha} \sum_{j=0}^{[\frac{t-a}{h}]} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t-jh) = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\Gamma(\alpha) h^\alpha} \sum_{j=0}^{[\frac{t-a}{h}]} \frac{\Gamma(\alpha+j)}{\Gamma(j+1)} f(t-jh) \end{aligned} \quad (15)$$

其中

$$\binom{\alpha}{j} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-j+1)}{j!} = \frac{\alpha!}{j!(\alpha-j)!}$$

Riemann—Liouville 分数阶微积分定义:

$${}_aD_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^m \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{(\alpha-m)}} d\tau \quad (16)$$

其中, $m-1 < \alpha < m, m \in \mathbb{N}$ 。

Caputo 分数阶微积分定义:

$${}_aD_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^t \frac{f^m(\tau)}{(t-\tau)^{(\alpha-m+1)}} d\tau \quad (17)$$

其中, $m-1 < \alpha < m, m \in \mathbb{N}$ 。

2.2 分数阶控制器设计

PI ^{λ} D ^{μ} 控制器包括积分阶次 λ 和微分阶次 μ , 若

$\lambda = \mu = 0$, 实现 P 控制器, 若 $\lambda = 1, \mu = 0$, 实现 PI 控制器, 若 $\lambda = 0, \mu = 1$, 实现 PD 控制器, 若 $\lambda = \mu = 1$, 实现 PID 控制器。若 λ, μ 为任意实数或者复数, 得到分数阶控制器为:

$$G(s) = K_p + K_i s^{-\lambda} + K_d s^\mu \quad (18)$$

PI ^{λ} D ^{μ} 控制器设计过程中需要先进行数值实现。文中利用 Oustaloup^[19] 逼近算法进行离散化处理后进行数值实现。对于分数阶微积分算子的数值实现是 Oustaloup 滤波器^[15] 在频率域内, 对 D^α 进行近似处理。Oustaloup 滤波器的传递函数为:

$$H(s) = \left(\frac{\omega_u}{\omega_h}\right)^\alpha \prod_{K=-N}^N \frac{1+s/\omega_k}{1+s/\omega'_k} \quad (19)$$

其中, $K = \omega_h^\alpha$ 。

滤波器零极点和增益如下:

$$\omega'_k = \omega_b \omega_\mu^{[k+N+\frac{1}{2}(1+\alpha)]/(2N+1)} \quad (20)$$

$$\omega_k = \omega_b \omega_\mu^{[k+N+\frac{1}{2}(1-\alpha)]/(2N+1)} \quad (21)$$

其中, $\omega_\mu = \sqrt{\frac{\omega_u}{\omega_b}}$, ω_b 和 ω_h 为拟合频率的上下限;

N 为该滤波器的阶次。

3 基于改进的粒子群算法的分数阶控制器参数的寻优

3.1 粒子群算法

粒子群优化算法(PSO)^[20-23] 在求解优化问题时, 每个问题的解被看作一个个的微粒。假设在一个 D 维搜索空间中, 由 N 个粒子组成的种群中第 i 个粒子在 D 维搜索空间的位置 $X_i(k) = (X_{i1}(k), X_{i2}(k), \cdots, X_{id}(k))^T$ 。基于目标函数中的每个粒子位置表示为 $p_i = (p_{i1}, p_{i2}, \cdots, p_{id})^T$, 它所对应的适应度在第 i 个粒子的速度 $V_i(k) = (V_{i1}, V_{i2}, \cdots, V_{id})^T$, 其个体最优位置为种群的群体最优位置 $p_g = (p_{g1}, p_{g2}, \cdots, p_{gd})^T$, 且 $1 \leq d \leq D, 1 \leq i \leq N$ 。则更新粒子的速度和位移:

$$\begin{aligned} v_{id}(k+1) &= \omega(k+1)v_{id}(k) + a_1 r_1 [p_{id}(k) - x_{id}(k)] \\ &\quad + a_2 r_2 [p_{gd}(k) - x_{id}(k)] \end{aligned} \quad (22)$$

$$x_{id}(k+1) = x_{id}(k) + v_{id}(k+1) \quad (23)$$

其中, 假定粒子的编号是 $i = 0, 1, 2, \cdots$; a_1, a_2 为学习因子(通常取值为 2); r_1, r_2 为分布在 $[0, 1]$ 区间的随机数。

3.2 改进的粒子群算法

针对 PSO 算法的缺陷, 提出一种基于 Logistic 混沌搜索机制的粒子群算法, 以提高粒子群的多样性和全局搜索能力。在该算法中, 初始化混沌有助于增加粒子种群的多样性, 而且混沌搜索可避免粒子陷入局部最优。在文献[20-24]中提出的各种混沌搜索算法

都可以增强局部搜索能力。当粒子发生早熟时,由下式来更新位置变量:

$$y_{i+1}=4y_i(1-y_i)$$

(24)

$$x_i^{t+1}=x_i^t+2\delta(y_i-0.5)$$

(25)

其中, $y_i \in [0,1]$ 是混沌状态处于系统的第 i 个变量; δ 是决定变异的一个范围。

加入自适应调整策略,既可以对惯性权重进行自适应调整,又保证了局部搜索和全局搜索之间的相互协调。在相关文献中提出了惯性权重关于时间的线性递减自调整策略,但在实际搜索时 ω 是非线性的过程,所以不能反映实际的优化搜索能力。对此,文中提出对 ω 的动态自调整策略,不仅可以控制粒子速度,而且还能平衡算法的全局搜索和局部搜索性能。具体调整方法如下:

$$\omega=(\omega_{\max}-\omega_{\min})\left(\frac{\text{iter}_{\max}}{\text{iter}_{\min}}+\omega_{\min}\right)$$

(26)

其中, ω_{\max} 和 ω_{\min} 分别为惯性权重的最大值和最小值; iter_{\max} 和 iter_{\min} 分别为最大的迭代次数和最小的迭代次数。

当开始迭代时,迭代次数越小,惯性权重 ω 越大,粒子的运动速度、收敛速度都变快,从而易于全局搜索;反之,可将其作为局部搜索。

3.3 确定改进后算法的目标函数

适应度函数可作为 PSO 算法优化搜索的基本依据。文中采用的参数选择的目标函数是常规的 ITAE 性能指标。为了得到它的最小值,ITAE 优化法是由系统绝对值误差与时间的乘积的积分进行表示,即适应度函数如下:

$$f(x)=\int_0^{\infty}t|e(t)|dt$$

(27)

其中,假设每个粒子的位置都由一个 5 维向量表示,那么分数阶控制器的参数向量表示为 $x=(k_p,k_i,k_d,\lambda,\mu)$ 。根据改进的粒子群算法进行寻优而得到的全局最优解,也是控制器参数整定的最优解。

3.4 基于 CAPSO 算法的PI^λD^μ 的参数优化

利用 CAPSO 算法整定 PI^λD^μ 参数的步骤如下:

Step1:将参数进行初始化。即随机生成粒子的参数,如 $N,\text{iter}_{\max},\omega$ 。

Step2:采用混沌的方法初始化 x_i,v_i ,将 PI^λD^μ 参数设为变量 x_i ,在遍历范围内对 x_i,v_i 进行随机初始化。由式 27 计算 $f_i(x)$,并与 p_i 进行对比。若 $f_i(x)<p_i$,则对 p_i 进行更新,否则 p_i 不变;再对个体寻优结果和全局寻优结果进行比较,若 $p_i<p_g$,则对 p_g 进行更新,否则不变。

Step3:由式 26 调整 ω ,再由式 24 和式 25 更新 x_i,v_i 。 万方数据

Step4:由式 27 计算更新后的适应度值,新粒子的个体和所处全局的最优位置,可得 v_i 和 x_i 。

Step5:判断是否到达 iter_{\max} 。当 $\text{iter}\geq\text{iter}_{\max}$ 时,转至 Step7,否则转至 Step6。

Step6:判断算法是否陷入局部最优。当第 i 个粒子连续 N 次满足条件 $f(x_i)-f(p_i)<\eta$ 时(η 为设定的常数阈值),则认为算法陷入局部最优,用式 24 和式 25 进行混沌搜索;否则转至 Step4。

Step7:返回 $x=(k_p,k_i,k_d,\lambda,\mu)$,同时寻优完成。

3.5 Matlab 仿真与分析

利用 MATLAB 软件对 PI^λD^μ 的参数 $x=(k_p,k_i,k_d,\lambda,\mu)$ 进行寻优,基于 Oustaloup 近似算法完成逼近近似的过程。假设拟合频率范围为 $[10^{-3},10^3]$,阶次为 4, N 为 500, iter_{\max} 为 1 000,采样时间为 0.001 s, ω_{\min} 取 0.4, ω_{\max} 取 0.8。因为算法中的参数是随机产生的,所以仿真结果取 500 次的平均值。

由表 2、3 和图 2 所示,对 PI^λD^μ 控制器参数优化过程中的几种算法进行了对比,可见主导极点法会产生大的超调量、调节时间漫长等问题。然而,PSO 算法与它相比,超调量、调节时间等都有所下降,但不令人满意。文中提出的 CAPSO 算法,仿真结果显示上升时间短、超调量小,目标函数 ITAE 值也最小,适应度值为 1.912 1,优于上述两种优化算法。

表 2 不同算法整定最优参数

算法类型	k_p	k_i	k_d	λ	μ
主导极点	1.604	0.685	0.072	0.487	0.978
PSO	0.901	0.560	0.560	0.609	1.102
CAPSO	0.913	0.631	0.196	0.467	1.179

表 3 不同算法时域性能参数

算法类型	上升时间 t_r/s	调节时间 t_s/s	超调量 Mp/%
主导极点	2.391	8.201	24.61
PSO	1.802	8.016	1.957 5
CAPSO	1.521	6.892	1.910 5

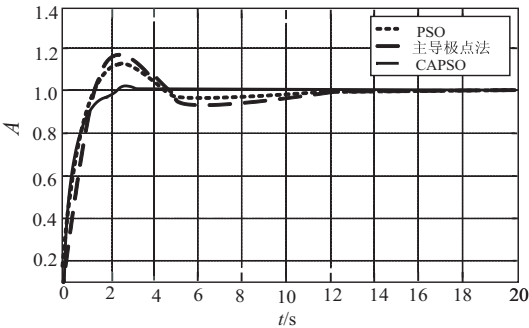


图 2 3 种算法下的 PI^λD^μ 阶跃响应
将 CAPSO 算法应用于整数阶 PID 控制器和

$PI^{\lambda}D^{\mu}$ 进行参数优化,阶跃响应曲线如图 3 所示。可见,CAPSO-FOPID 的控制效果要优于 CAPSO-PID,而且其调节时间更少。从仿真结果看出,超调量从 25.86% 降至 6.50%,减小了系统的稳态误差。

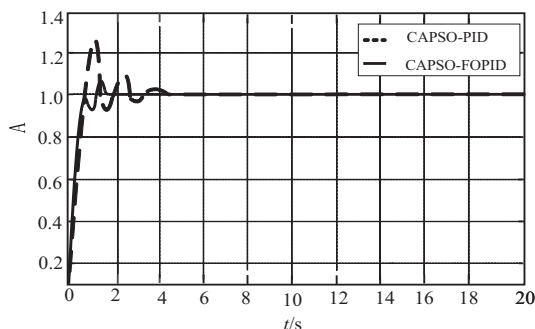


图 3 在阶跃信号下的两种控制器的响应

4 结束语

将一种改进的 PSO 算法用于传统的 PID 控制与分数阶 PID 控制中,并进行了对比仿真。结果表明,在控制性能上,分数阶控制器要优于传统 PID 控制器,而且 CAPSO-FOPID 控制器在收敛速度与精度上也得到大幅改善。该方法既达到了系统的性能要求,也满足了 $PI^{\lambda}D^{\mu}$ 控制器参数寻优,同时也为分数阶 PID 控制器在倒立摆系统中的控制方法提供了参考。

参考文献:

- [1] 杨世勇,徐莉苹,王培进.单级倒立摆的 PID 控制研究[J].控制工程,2007,14:23-25.
- [2] 杨平,徐春梅,王欢,等.直线型一级倒立摆状态反馈控制设计及实现[J].上海电力学院学报,2007,23(1):21-25.
- [3] 侯涛,范多旺,杨剑锋.基于 T-S 型的平面倒立摆双闭环模糊控制研究[J].控制工程,2012,19(5):753-756.
- [4] 司昌龙.拟人智能控制及控制律转化研究[D].北京:北京航空航天大学,2003.
- [5] 张志强.基于模糊滑模变结构的倒立摆控制方法研究[D].兰州:兰州理工大学,2008.
- [6] PODLUBNY I. Fractional-order system and $PI^{\lambda}D^{\mu}$ controller[J]. IEEE Transactions on Automating Controller, 1999, 44(1):208-214.
- [7] 曹军义,曹秉刚.分数阶控制器的数字实现及其特性[J].控制理论与应用,2006,23(5):791-794.
- [8] XUE Dingyu, ZHAO Chunna, CHEN Yangquan. Fractional order PID control of a DC-motor with elastic shaft: a case study[C]//American control conference. Minneapolis, MN, USA:IEEE, 2011.

- [9] BISWAS A, DAS S, ABAHAM A, et al. Design of fractional-order $PI^{\lambda}D^{\mu}$ controllers with an improved differential evolution[J]. Engineering Applications of Artificial Intelligence, 2009, 22(2):343-350.
- [10] 梁涛年,陈建军.分数阶参数不确定系统 PI^{λ} 的控制器[J].控制理论与应用,2011,28(3):400-406.
- [11] 严慧,于盛林,李远禄.分数阶 $PI^{\lambda}D^{\mu}$ 控制器参数设计方法—极点阶数搜索法[J].信息与控制,2007,36(4):445-450.
- [12] 李大字,刘展,靳其兵,等.分数阶控制器参数整定策略研究[J].系统仿真学报,2007,19(19):4402-4406.
- [13] 薛定宇,赵春娜.分数阶系统的分数阶 PID 控制器设计[J].控制理论与应用,2007,24(5):771-776.
- [14] VINAGRE B M. Modelado y control de sistemas dinámicos caracterizados por ecuaciones integrodiferenciales de orden fraccional[D]. Madrid: Universidad Nacional de Educación a Distancia, 2001.
- [15] MAIONE G, LINO P. New tuning rules for fractional PI^{λ} controllers[J]. Nonlinear Dynamics, 2007, 49(1-2):251-257.
- [16] 张邦楚,王少锋,韩子鹏,等.飞航导弹分数阶 PID 控制及其数字实现[J].宇航学报,2005,26(5):653-657.
- [17] 史金光,王中原,孙洪辉,等.制导炮弹分数阶控制器参数整定方法研究[J].战术导弹技术,2013,26(5):76-80.
- [18] CHATTERJEE A, SIARRY P. Nonlinear inertia weight variation for dynamic adaption in particle swarm optimization[J]. Computer and Operations Research, 2006, 33(3):859-871.
- [19] OUSTLOUP A, LEVRON F, MATHIEU B, et al. Frequency-band complex noninteger differentiator: characterization and synthesis[J]. IEEE Transactions on Circuit and Systems-I: Fundamental Theory and Applications, 2000, 47(1):25-39.
- [20] 蒋晓岫,任佳,顾敏明.多维度惯性权重衰减混沌化粒子群算法及应用[J].仪器仪表学报,2015,36(6):1333-1341.
- [21] 邹毅,朱晓萍,王秀平.一种基于混沌优化的混合粒子群算法[J].计算机技术与发展,2009,19(11):18-22.
- [22] 王京,于舒娟.模拟退火混沌粒子群算法的盲检测[J].计算机技术与发展,2011,21(1):35-37.
- [23] LIU Bo, WANG Ling, JIN Yihui, et al. Improved particle swarm optimization combined with chaos[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2005, 25(5):1261-1271.
- [24] WANG Jianzhou, ZHU Suling, ZHAO Weigang, et al. Optimal parameters estimation and input subset for grey model based on chaotic particle swarm optimization algorithm[J]. Expert Systems with Applications, 2011, 38(7):8151-8158.