

改进的自适应四阶偏微分方程的图像恢复算法

王军锋, 贺亚茹

(西安理工大学 理学院 应用数学系, 陕西 西安 710054)

摘要: 为了克服各项同性扩散和各项异性扩散模型使图像平滑过渡造成图像模糊、扩散不均匀出现“阶梯效应”等不足, 提出了一种新的自适应四阶偏微分方程图像恢复算法。首先采用梯度模值构造边缘检测函数, 区分出图像的边缘区、平坦区, 再构造边缘扩散函数, 根据图像的信息特征, 使得该算法在图像梯度方向及其法向自适应地选取扩散方式, 从而在平坦区域采用各项同性扩散更好地去除噪声, 在边缘区域采用各项异性扩散保留边缘信息。实验结果表明, 该算法在去噪和保留边缘的同时, 保留了细节信息, 提高了图像的峰值信噪比。

关键词: 四阶偏微分方程; 各项同性扩散; 各向异性扩散; 边缘检测函数; 扩散函数

中图分类号: TP301.6

文献标识码: A

文章编号: 1673-629X(2018)03-0118-04

doi: 10.3969/j.issn.1673-629X.2018.03.025

An Improved Image Restoration Algorithm Based on Adaptive Four-order Partial Differential Equation

WANG Jun-feng, HE Ya-ru

(Department of Application Mathematics, School of Science, Xi'an University of Technology,
Xi'an 710054, China)

Abstract: In order to overcome the shortcomings like ladder effect caused by image blur and uneven diffusion by image smoothing of the isotropic and anisotropic diffusion model, we propose a new image restoration algorithm of adaptive four-order partial differential equation. First, we use the gradient modulus to build the edge detection function to distinguish the edge of the image area and flat area, and then construct the edge diffusion function. According to the characteristics of image, it makes the algorithm to adaptively select the diffusion mode in gradient and its normal direction. Therefore in the flat area, the kind of isotropic diffusion is used to remove the noise, and in the edge region, the kind of anisotropic diffusion is used to preserve the edge information. The experiments show that the proposed algorithm can preserve the details while removing the noise and preserving the edges, and improve the peak signal to noise ratio of the image.

Key words: four-order partial differential equation; isotropic diffusion; anisotropic diffusion; edge detection function; diffusion function

0 引言

在数字图像的生成、传输、储存等过程中容易造成图像的模糊、缺损和噪声污染等现象, 因而对降质图像的恢复成为了当前的研究热点之一。最常见的图像恢复主要是去除噪声、修复划痕、文字污染和去除运动模糊。

目前, 二阶、四阶和分数阶的偏微分方程算法在去噪方面已经取得了很好的效果。1990 年, Perona 和 Malik 提出了二阶偏微分去噪算法^[1], Catto 提出了改进的正则化 P-M 模型以及各向同性和各向异性的去

噪算法^[2-4], 恢复后的图像在平滑的过程中模糊了边缘, 出现明显的阶梯效应。You 和 Kaveh 在 2000 年提出了四阶去噪算法^[5], 该算法有效抑制了“阶梯效应”的产生, 但同时产生了斑点。Liu Tianhua^[6] 和王璐^[7] 分别提出了二阶和四阶结合的偏微分方程算法。Bai Yunjiao 等^[8] 利用差分曲率算子^[9] 检测边缘, 使图像在边缘处尽可能慢的扩散或不扩散, 有效保留了边缘。Hajiaboli 提出了非线性的四阶扩散方程^[10], 在梯度方向采用各向异性扩散, 在梯度的垂直方向采用各向同性扩散。白云蛟等提出了自适应的四阶去噪模型^[11],

收稿日期: 2017-04-11

修回日期: 2017-08-23

网络出版时间: 2017-12-05

基金项目: 陕西省自然科学基金(2015JQ1022)

作者简介: 王军锋(1973-), 男, 博士, 副教授, 研究方向为小波及其应用; 贺亚茹(1993-), 女, 硕士研究生, 研究方向为偏微分方程与数字图像处理。

网络出版地址: <http://cnki.net/kcms/detail/61.1450.TP.20171205.0906.048.html>

提高了图像质量。

在介绍现有的四阶偏微分方程算法的各向同性和各向异性扩散的基础上,在自适应的四阶去噪模型中引入一种新的扩散函数,并通过实验对其进行验证。

1 四阶偏微分方程模型

为了避免阶梯效应,You 和 Kaven 提出了四阶的偏微分方程去噪模型(Y-K 模型)。其能量泛函为:

$$E(I) = \int_{\Omega} f(|\nabla^2 I|) d\Omega \tag{1}$$

通过求解欧拉-拉格朗日方程,得梯度下降流为:

$$\frac{\partial I}{\partial t} = -\nabla^2(c(|\nabla^2 I|)\nabla^2 I) \tag{2}$$

$$c(|\nabla^2 I|) = \frac{k^2}{k^2 + (|\nabla^2 I|)^2} \tag{3}$$

其中, $|\nabla^2 I|$ 为拉普拉斯算子的绝对值; $f(\cdot)$ 为增函数,且 $f'(s) = c(s) \cdot s$, $c(\cdot)$ 为扩散系数; k 为梯度模值的阈值参数。

由于拉普拉斯算子会过渡平滑图像,导致图像的边缘和细节信息的丢失,因此 Hajiaboli 提出用 $|\nabla I|$ 代替 $|\nabla^2 I|$ 检测图像特征信息。为了不产生斑点和阶梯效应,Hajiaboli 提出了非线性的四阶偏微分方程(Hajiaboli 模型):

$$\frac{\partial I}{\partial t} = -\nabla^2(c(|\nabla I|)^2 I_{\eta\eta} + c(|\nabla I|) I_{\xi\xi}) \tag{4}$$

$$c(|\nabla I|) = \frac{k^2}{k^2 + (|\nabla I|)^2} \tag{5}$$

其中, η 为梯度方向; ξ 为梯度方向的法向。
该模型在噪声较小时,梯度方向扩散速度大于法向,能更好地保留边缘。

2 文中算法

用于检测边缘的算子有很多,如梯度模值算子、双十字梯度算子^[12]、差分曲率算子^[13]、path simlary^[13]算子等,其中应用最广泛的是梯度模值算子。例如,P-M 模型中采用的边缘检测函数为:

$$c_1(|\nabla I|) = \frac{1}{1 + \left(\frac{|\nabla I|}{k}\right)^2} \tag{6}$$

Weichert 提出了一种边缘检测函数:

$$c_2(|\nabla I|) = \begin{cases} 1 & (|\nabla I|)^2 = 0 \\ 1 - \exp\left(\frac{-3.315}{\left(\frac{|\nabla I|}{k}\right)^8}\right) & (|\nabla I|)^2 > 0 \end{cases} \tag{7}$$

白云蛟等提出了一种自适应的边缘检测函数和扩散函数: 万方数据

$$\alpha(|\nabla I|) = \begin{cases} 1 & (|\nabla I|)^2 = 0 \\ 1 - \exp\left(\frac{-3.315}{\left(\frac{|\nabla I|}{h_0 \times n^{-1/3}}\right)^8}\right) & (|\nabla I|)^2 > 0 \end{cases} \tag{8}$$

其中, h_0 为常数; n 为迭代次数;梯度模阈值用 $h_0 \times n^{-1/3}$ 表示。随着迭代次数的增加,梯度模阈值将逐渐减少,与传统的取阈值方法相比,具有自适应和调节阈值的能力,更有利于检测和保护边缘。

$$c_3(|\nabla I|) = \begin{cases} 1 & (|\nabla I|)^2 = 0 \\ \left(\frac{1}{1 + \left(\frac{|\nabla I|}{k}\right)^2}\right)^{1-\alpha} & (|\nabla I|)^2 > 0 \end{cases} \tag{9}$$

图 1 中取 $k = 20$, 随着 $|\nabla I|$ 的变化, c_1, c_2, c_3 函数曲线整体呈下降趋势。通过对比可看出,当 $|\nabla I| \leq k$ 时, c_1 呈下降趋势, $c_2 = 1$, c_3 的值先取到 1,再逐渐下降;而当 $|\nabla I| > k$, c_2, c_3 下降很快,并逐渐趋近于 0。因此,选取合适的阈值,且在 $|\nabla I| \approx k$ 的一个小邻域内,扩散函数快速从 1 下降到 0,能更有效地去除噪声,保留边缘。

因此文中提出了一种新的边缘检测函数和扩散函数:

$$p = \begin{cases} 0 & |\nabla I| \leq k \\ 1 - \frac{1}{1 + (|\nabla I| - k)^2} & |\nabla I| > k \end{cases} \tag{10}$$

$$c_4(x) = \begin{cases} 1 & |\nabla I| \leq k \\ (x \cdot \ln(x + 1) + 1)^{-p} & |\nabla I| > k \end{cases} \tag{11}$$

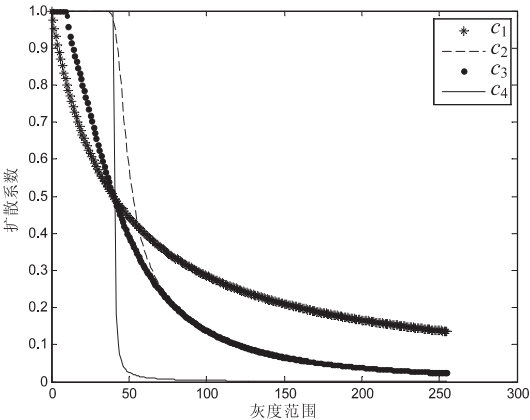


图 1 各种扩散函数变化曲线

从图 1 中可看出,随着 $|\nabla I|$ 不断增大,边缘检测函数 p 在 $|\nabla I| \leq k$ 时为 0, c_4 为 1,则图像在 η 和 ξ 方向扩散速度相同,有利于噪声的去除;在 $|\nabla I| > k$ 时, p 值域在 $(-1, 0)$, c_4 的值从 1 快速下降到 0,且图像

在 η 方向的扩散速度总大于 ξ 方向扩散速度,有利于保护边缘。总之,文中算法能根据图像特征,自适应选择各项同性扩散模型和各向异性扩散模型进行图像恢复,既有效地去除噪声,又能保护边缘和细节。

3 数值实现

采用显示格式对式(4)进行离散,假设迭代时间步长为 ∇t ,空间步长为 h ,且令 $h=1$, $M \times N$ 表示图像大小,则离散化时间和空间坐标如下:

$$\begin{aligned} T_n &= n \nabla t, n = 0, 1, 2, 3, \dots \\ x_i &= ih, i = 0, 1, \dots, M \\ y_j &= jh, j = 0, 1, \dots, N \end{aligned} \quad (12)$$

采用中心差分格式求解图像在 x, y 方向的一阶、二阶导数:

$$\begin{aligned} I_x^n &= (I_{i+1,j}^n - I_{i-1,j}^n) / 2, \\ I_y^n &= (I_{i,j+1}^n - I_{i,j-1}^n) / 2, \\ I_{xx}^n &= (I_{i+1,j}^n - 2I_{i,j}^n + I_{i-1,j}^n), \\ I_{yy}^n &= (I_{i,j+1}^n - 2I_{i,j}^n + I_{i,j-1}^n), \\ I_{xy}^n &= (I_{i-1,j-1}^n + I_{i+1,j+1}^n) / 4 - \\ &\quad (I_{i-1,j+1}^n + I_{i+1,j-1}^n) / 4 \end{aligned} \quad (13)$$

图像 η 和 ξ 方向的一阶导数为:

$$\begin{aligned} I_{\eta\eta} &= \frac{I_{xx}^2 + 2I_{xy}I_x + I_{yy}^2}{I_x^2 + I_y^2} \\ I_{\xi\xi} &= \frac{I_{xx}^2 - 2I_{xy}I_x + I_{yy}^2}{I_x^2 + I_y^2} \end{aligned} \quad (14)$$

对应的边界条件为:

$$\begin{aligned} I_{-1,j}^n &= I_{0,j}^n, I_{M+1,j}^n = I_{M,j}^n, j = 0, 1, 2, \dots, N \\ I_{i,-1}^n &= I_{i,0}^n, I_{i,N+1}^n = I_{i,N}^n, i = 0, 1, 2, \dots, M \end{aligned} \quad (15)$$

设 $g_{i,j}^n = c(|\nabla I_{i,j}^n|)^2 \cdot (I_{i,j}^n)_{\eta\eta} + c(|\nabla I_{i,j}^n|) \cdot (I_{i,j}^n)_{\xi\xi}$

则有

$$\nabla^2 g_{i,j}^n = g_{i+1,j}^n + g_{i-1,j}^n + g_{i,j+1}^n + g_{i,j-1}^n - 4g_{i,j}^n \quad (16)$$

对应的边界条件为:

$$\begin{aligned} g_{-1,j}^n &= g_{0,j}^n, g_{M+1,j}^n = g_{M,j}^n, j = 0, 1, 2, \dots, N \\ g_{i,-1}^n &= g_{i,0}^n, g_{i,N+1}^n = g_{i,N}^n, i = 0, 1, 2, \dots, M \end{aligned} \quad (17)$$

将式(4)变型为:

$$I_{i,j}^{n+1} = I_{i,j}^n - \Delta t \cdot \nabla^2 g_{i,j}^n \quad (18)$$

4 实验结果分析

为验证算法的有效性,将文中方法与四阶自适应模型(Hajiaboli+ c_1 模型、Hajiaboli+ c_2 模型、Hajiaboli+ c_3 模型)进行比较,采用均方差(MSE)和峰值信噪比(PSNR)^[14-16]评价算法性能。均方差(MSE)和峰值信噪比(PSNR)定义如下:

$$\text{MSE} = \frac{\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N (I(i,j) - I_0(i,j))^2}{M \times N} \quad (19)$$

$$\text{PSNR} = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{255 \times 255}{\text{MSE}} \right) \quad (20)$$

其中, $M \times N$ 为图像大小; $I(i,j)$ 和 $I_0(i,j)$ 分别代表原图像和去噪后图像在对应像素点的像素值。

在仿真实验1中,选取 256×256 的 Lena 图像并加 10 倍的随机噪声。文中模型参数为:迭代步长 $\nabla t = 0.03$,迭代次数 $i = 70$,为方便对比,梯度模阈值 $k = 5$,高斯滤波的方差为 3,窗口大小为 3×3 。从四种模型的图像恢复结果(图2)中可看出,随着迭代次数的增加,采用 c_1 算子会出现过渡平滑造成帽子边缘、头发等区域模糊,采用 c_2 、 c_3 算子去噪效果明显,但丢失了头发区域等部分细节,采用 c_4 算子去噪效果很好,保留了边缘,头发区域也比较清晰。

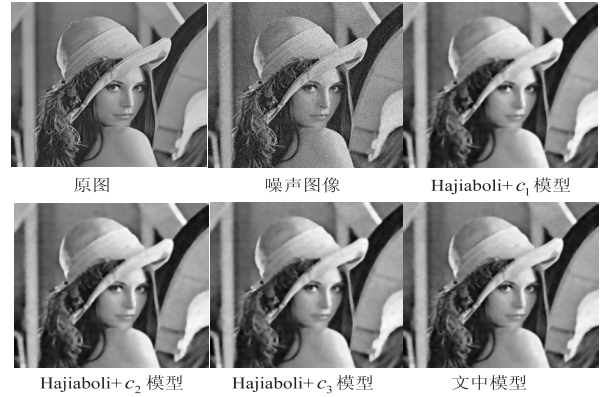


图2 实验1中各种模型的Lena图像恢复效果比较

仿真实验2中,选取 242×308 的 eight 图像并加 10 倍的随机噪声。文中模型参数为:梯度模阈值 $k = 20$ 。从四种模型的图像恢复结果(图3)中可看出,随着迭代次数的增加,采用 c_1 、 c_2 、 c_3 算子去噪效果良好,但会造成边缘模糊,采用 c_4 算子去噪效果很好,硬币上的图案也比较清晰。

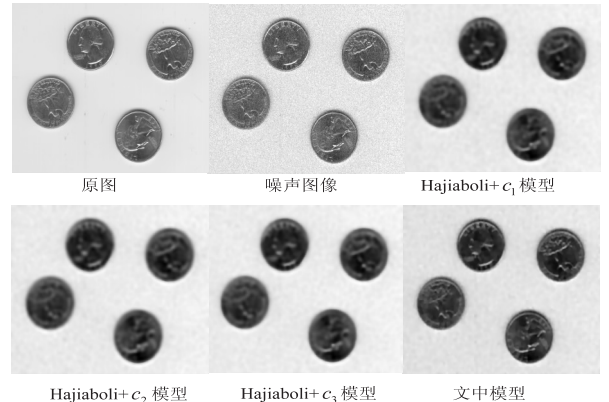


图3 实验2中各种模型的eight图像恢复效果比较

表1是各种算法的评价参数对比结果。从实验数据可知,文中模型有效克服了阶梯效应和斑点的出现,

且尽可能多地保留边缘和部分细节信息,提高了图像的质量。

表1 各模型的均方差和峰值信噪比

		Hajiaboli+ c_1 模型	Hajiaboli+ c_2 模型	Hajiaboli+ c_3 模型	文中模型
Lena	MSE	84.429 4	82.446 8	80.802 7	72.106 0
	PSNR	28.865 9	28.969 1	29.056 5	29.221 1
eight	MSE	100.965 5	109.269 6	100.779 6	64.606 5
	PSNR	28.089 1	28.038 3	28.306 0	29.028 0

5 结束语

针对已有的偏微分方程模型的不足,提出了一种基于自适应的四阶偏微分方程算法。从实验结果可以看出,该算法在去除噪声的同时,能保留边缘和细节,并能有效克服阶梯效应和斑点的产生,提高了图像的质量。

参考文献:

[1] PERONA P, MALIK J. Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1990, 12(7): 629-639.

[2] CATTE F, LIONS P L, MOREL J M, et al. Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1992, 29(1): 182-193.

[3] WEICKERT J. Anisotropic diffusion in image processing[D]. Germany: University of Kaiserslautern, 1996.

[4] 汪继文, 林胜华, 沈玉峰, 等. 一种基于各向异性扩散的图像处理办法[J]. 计算机技术与开展, 2008, 18(8): 98-100.

[5] YOU Y L, KAVEN M. Fourth-order partial differential equations for noise removal[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2000, 9(10): 1723-1730.

[6] LIU Tianhua, XIANG Zhaoyin. Image restoration combining the second-order and fourth-order PDEs[J]. Mathematical Problems in Engineering, 2013, 2013: 743891.

[7] 王璐. 基于四阶微分全变差的图像去噪模型[J]. 计算机技术与开展, 2016, 26(3): 85-88.

[8] BAI Yunjiao, ZHANG Quan, HONG Shangguan, et al. Patch similarity modulus and difference curvature based fourth-order partial differential equation for image denoising[J]. Mathematical Problems in Engineering, 2015, 2015: 636295.

[9] 郭永彩, 彭兰辉, 高潮. 基于局部坐标二次微分的自适应全变分去噪复原[J]. 光电工程, 2012, 39(8): 10-17.

[10] HAJIABOLI M R. An anisotropic fourth-order diffusion filter for image noise removal[J]. International Journal of Computer Vision, 2011, 92(2): 177-191.

[11] 白云蛟, 张权, 刘伟, 等. 基于自适应四阶偏微分方程的图像去噪算法[J]. 计算机工程与设计, 2017, 38(2): 437-441.

[12] 翟东海, 段维夏, 鱼江. 基于双十字TV模型的图像修复算法[J]. 电子科技大学学报, 2014, 43(3): 432-436.

[13] CHEN Q, MONTESIONS P, SUN Q S, et al. Adaptive total variation denoising based on difference curvature[J]. Image and Vision Computing, 2010, 28(3): 298-306.

[14] LIU A M, LIN W S, NARWARIA M. Image quality assessment based on gradient similarity[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2012, 21(4): 1500-1512.

[15] 佟雨兵, 张其善, 祁云平. 基于PSNR与SSIM联合的图像质量评价模型[J]. 中国图象图形学报, 2006, 11(12): 1758-1763.

[16] 郭龙, 郑剑. 基于梯度方向信息的医学图像质量评价方法研究[J]. 计算机科学, 2012, 39(12): 278-280.

(上接第117页)

ery from incomplete and inaccurate samples[J]. Applied and Computational Harmonic Analysis, 2008, 26: 301-321.

[11] DAI D, MILENKOVIC O. Subspace pursuit for compressive sensing[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2009, 55(5): 2230-2249.

[12] 李少东, 裴文炯, 杨军, 等. 贝叶斯模型下的OMP重构算法及应用[J]. 系统工程与电子技术, 2015, 37(2): 246-252.

[13] LIU D, WANG Z, WEN B, et al. Robust single image super-resolution via deep networks with sparse prior[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2016, 25(7): 3194-3207.

[14] TIMOFTE R, DE V, GOOL L V. Anchored neighborhood regression for example-based super-resolution[C]//IEEE

international conference on computer vision. Washington, DC, USA: IEEE Computer Society, 2013: 1920-1927.

[15] 李娟, 吴谨, 陈振学, 等. 基于自学习的稀疏正则化图像超分辨率方法[J]. 仪器仪表学报, 2015, 36(1): 194-200.

[16] 孙玉宝, 费选, 韦志辉, 等. 基于前向后向算子分裂的稀疏性正则化图像超分辨率算法[J]. 自动化学报, 2010, 36(9): 1232-1238.

[17] 沈辉, 袁晓彤, 刘青山. 基于预测稀疏编码的快速单幅图像超分辨率重建[J]. 计算机应用, 2015, 35(6): 1749-1752.

[18] 潘宗序, 禹晶, 肖创柏, 等. 基于自适应多字典学习的单幅图像超分辨率算法[J]. 电子学报, 2015, 43(2): 209-216.