

一种改进的 OMP 算法及其在图像重构上的应用

石曼曼 李 雷

(南京邮电大学 理学院 江苏 南京 210023)

摘要: 为了提高正交匹配追踪(orthogonal matching pursuit, OMP)算法的重构精度,缩短重构时间,以此改善算法的重构性能,提出一种改进的双阈值分段迭代匹配追踪(dual threshold stage-wise iteration matching pursuit, DTSIMP)算法。该算法首先利用 OMP 算法迭代若干次,当残差小于第一阈值时引入回溯思想,利用压缩采样匹配追踪(compressed sampling matching pursuit, CoSaMP)算法继续迭代,并且将 OMP 算法迭代所得的残差和原子作为 CoSaMP 算法的初始输入值,当残差小于第二阈值时停止迭代。双阈值中,第一阈值控制 OMP 算法迭代次数,得到 CoSaMP 算法的最优初始输入;第二阈值控制信号的重构精度,以此实现精确快速地重构出稀疏信号。实验结果表明,对于一维的随机高斯信号,该算法重构误差小,重构时间少,并且在不同稀疏度和观测值下,算法重构成功率均高于原算法;对于二维图像信号,该算法重构时间少,重构效果好。

关键词: 压缩感知; 正交匹配追踪; 压缩采样匹配追踪; 回溯; 图像重构

中图分类号: TP301.6

文献标识码: A

文章编号: 1673-629X(2018)02-0094-04

doi: 10.3969/j.issn.1673-629X.2018.02.021

An Improved Orthogonal Matching Pursuit Algorithm and Its Application in Image Reconstruction

SHI Man-man, LI Lei

(School of Science, Nanjing University of Posts and Telecommunications, Nanjing 210023, China)

Abstract: In order to improve the reconstruction accuracy and performance of orthogonal matching pursuit (OMP) and shorten its reconstruction time, we propose an improved dual threshold stage-wise iteration matching pursuit (DTSIMP). It first uses the OMP for iteration until residual error is less than the first threshold value, then the idea of backtrack is added into the algorithm, which we take the compressed sampling matching pursuit (CoSaMP) for iteration again. The residual and atoms obtained from the OMP iterated are used as the input of the second step. Iteration stops when residual error is also less than the second preset threshold value. The first threshold controls the number of iterations of the OMP to get the optimal initial input of the CoSaMP, and the second threshold determines reconstruction accuracy of signal, so as to reconstruct sparse signals quickly and accurately. The experiment shows that the proposed algorithm is of little reconstruction error and reconstruction time with better reconstruction success rate for one-dimensional Gauss random signal when compared with OMP and CoSaMP. For two-dimensional image signal, it has the advantages of fast reconstruction time and excellent reconstruction effects.

Key words: compressed sensing; orthogonal matching pursuit; compressive sampling matching pursuit; backtrack; image reconstruction

0 引言

传统的信号采样建立于奈奎斯特(Nyquist)定理上。其要求采样速度必须超过原始信号两倍频宽,才能恢复出原始信号。随着数字信号处理的迅猛发展,待处理的信号越来越多,导致传输的压力过大。因此,迫切需要一种全新的采样方式,去满足采集存储信息的要求。于是,压缩感知(compressed sensing, CS)^[1-2]理论应运而生。

CS与奈奎斯特取样不同的是,它利用了信号更多的信息,包含稀疏性和相关性,不再受带宽的限制,实现取样、压缩一体化,不仅节省了存储空间,而且降低了元件损耗的风险。目前,CS广泛应用于遥感成像^[3]、医疗成像^[4]、无线传感网络^[5]、雷达成像^[6]等众多领域。

重构是CS技术关键的一步,主要有三大类方法^[7],包括最小 l_1 范数的凸松弛算法、贪婪算法以及组

收稿日期: 2017-02-18

修回日期: 2017-06-21

网络出版时间: 2017-10-19

基金项目: 国家自然科学基金(61373137, 61501251); 南京邮电大学引进人才科研启动基金资助项目(NY214191)

作者简介: 石曼曼(1992-),女,硕士研究生,研究方向为信息处理理论与应用;李雷,博士,教授,研究方向为智能信号处理和非线性科学及其在通信中的应用。

网络出版地址: <http://kns.cnki.net/kcms/detail/61.1450.TP.20171019.1626.074.html>

合算法。凸松弛算法包含基追踪(basic pursuit, BP)算法^[8]、基于梯度投影的一类算法^[9]等等。贪婪算法基于最小 l_0 范数,包含正交匹配追踪(orthogonal matching pursuit, OMP)^[10]、正则化的正交匹配追踪(regularized orthogonal matching pursuit, ROMP)^[11]以及压缩采样匹配追踪(compressive sampling matching pursuit, CoSaMP)^[12]等算法。组合算法是通过分组测试实现快速重构。因每一类算法在重构耗时和重构结果上各有利弊,不少学者针对算法的各种缺点进行优化^[13-14]。

贪婪算法凭借重构速度快的优势,得到了广泛的应用。其中OMP算法采用自下而上的方式更新,在未得到最终解时通过预设某个起始解,但是重构时间较长,重构精确度不高。OMP作为经典的贪婪算法之一,目前有很多学者对其进行了改进^[15-17]。在此基础上,文中针对OMP算法重构时间慢、重构效果不好的缺点,加入双阈值,在OMP迭代至残差小于第一阈值后引入回溯思想,采用CoSaMP继续更新,直至残差小于第二阈值。将OMP的优点和回溯思想相结合,通过双阈值分阶段调控迭代,提出改进的双阈值分段迭代匹配追踪(DTSIMP)算法。

1 压缩感知理论

相比于奈奎斯特采样定理,CS利用观测矩阵直接得到可压缩或稀疏信号的特征信息。

假设 x 是一维离散随机信号,稀疏度为 K ,长度为 N ,即 $x \in R^{N \times 1}$ 。对于 x ,线性观测过程能用某个 $M \times N$ 维随机矩阵 Φ 表示($M \ll N$),通过投影能够观测到 $M \times 1$ 维列向量 y ,即

$$y = \Phi x \quad (1)$$

在这一过程中 Φ 是不变的,因此观测过程并非自适应过程。由式(1)可知,需要求解一个含 M 个等式的线性方程组。但由于 $M \ll N$,即方程个数远大于未知数个数,因此式(1)有无穷多解。若已知 x 的稀疏度为 $K \ll M$,也就是说 x 中含 $N-K$ 个零项,同时已知位置,由CS知,这个欠定问题能够得到解决。只要观测矩阵 Φ 符合约束等距(restricted isometry property, RIP)^[1]特征,即 Φ 满足下式:

$$(1 - \varepsilon) \|x\|_2^2 \leq \|x\|_2^2 \leq (1 + \varepsilon) \|x\|_2^2 \quad (2)$$

其中, $\varepsilon \in (0, 1)$,那么能够由 y 来获得 K 个稀疏观测。

将式(1)转化为 l_0 范数极小化问题,求解得到原始信号,即:

$$\min \|x\|_0 \text{ s.t. } y = \Phi x \quad (3)$$

在实际求解过程中,一般转化为次最优问题求解。

即:

$$\min \|x\|_0 \text{ s.t. } \|y - \Phi x\|_2 < \delta \quad (4)$$

用贪婪算法求解此类问题,重构精度会略有降低,但缩短了运行时间,和其他类算法相比,具有更广泛的应用。

2 双阈值分段迭代匹配追踪算法

2.1 匹配追踪类算法

贪婪追踪匹配算法,采用多次迭代的思想,利用不同的特定准则实现迭代,最终通过特定的迭代终止条件,以观测矩阵作为原子库,从中判断筛选出能够准确表达原始信号的原子。由这些匹配原子经计算得到最优稀疏解。这类算法的最大特点是重构速度快,重建时间短。

OMP算法需要已知信号的稀疏度。在每一步迭代时,均从观测矩阵中选取与当前残差内积最大的原子,将其加入到支撑集,然后求解最小二乘,更新残差,进入下一次迭代。不妨假设信号是 K 稀疏的,则更新次数为 K 次。因为OMP算法在迭代中仅挑选唯一的原子来扩充支撑集,虽然得到的原子大部分是准确的,但会增大重构时间。且原子一旦并入支撑集,无论该原子是否准确,都只能保留。文中针对此缺点引入双阈值,并将迭代分为两部分,引入回溯思想,从而实现精准快速重构。

2.2 双阈值分段迭代匹配追踪算法

OMP算法每步更新只筛选出唯一原子加入支撑集,且加入的原子不能剔除,导致精度降低、耗时增加。而且作为一种经典的贪婪算法,其重构精度也有很大的提升空间。因此文中考虑改变OMP算法迭代的过程。为了不增加算法复杂度,第一阶段利用OMP算法迭代若干次,迭代停止阈值为 α ,然后引入回溯思想,利用CoSaMP算法更新,并将OMP更新所得残差和原子集当作第二阶段的输入值,第二阶段迭代停止阈值为 δ ,且 $\delta < \alpha$,从而缩短重建耗时,实现准确重建。新算法步骤如下:

输入: 观测矩阵 Φ , 观测向量 y , 信号稀疏度 K , 阈值 δ ;

输出: 重构信号估计 \hat{x} 。

(1) 第一阶段初始化残差 $r_0^1 = y$, 索引集 $\Lambda_0^1 = \emptyset$, 原子集 $\Phi_{\Lambda_0^1} = \emptyset$, 迭代次数 $t = 1$;

(2) 索引 $\lambda_i^1: \lambda_i^1 = \arg \max_{j=1,2,\dots,N} |\langle r_{t-1}^1, \varphi_j \rangle|$;

(3) 更新索引集和原子集: 令 $\Lambda_t^1 = \Lambda_{t-1}^1 \cup \{\lambda_t^1\}$, $\Phi_{\Lambda_t^1} = \Phi_{\Lambda_{t-1}^1} \cup \{\varphi_{\lambda_t^1}\}$;

(4) 求最小二乘解,更新残差: $\hat{x}_t^1 = \arg \min_{x_t^1} \|y - \Phi_{\Lambda_t^1} x_t^1\|$, $r_t^1 = y - \Phi_{\Lambda_t^1} \hat{x}_t^1$;

(5) $t = t + 1$ 若 $r_t^1 \geq \alpha$ 返回(3) 否则进入(6);

(6) 第二阶段初始化, $r_0^2 = r_t^1$, $\Lambda_0^2 = \Lambda_t^1$, $\Phi_{\Lambda_0^2} = \Phi_{\Lambda_t^1}$, 迭代次数 $s = 1$ 对相关系数 $u = |\Phi^T r_{s-1}^2|$ 降序排列, 前 $2K$ 项对应 Φ 的列序号 j 构成集合 J_0 ;

(7) 更新索引和原子集: 令 $\Lambda_s^2 = \Lambda_{s-1}^2 \cup J_0$, $\Phi_s^2 = \Phi_{\Lambda_{s-1}^2} \cup \{\varphi_j\} \quad j \in J_0$;

(8) 求最小二乘解: $\hat{x}_s^2 = \arg \min_{x_s^2} \|y - \Phi_s^2 x_s^2\|$;

(9) 从 \hat{x}_s^2 中取绝对值最大的前 K 项, 记为 \hat{x}_{sK}^2 , 对应原子集中的 K 列记为 Φ_{sK} , 对应索引记为 Λ_{sK}^2 , 令 $\Lambda_s^2 = \Lambda_{sK}^2$;

(10) 更新残差: $r_s^2 = y - \Phi_{sK} \hat{x}_{sK}^2$;

(11) 令 $s = s + 1$ 若残差 $r_s^2 \geq \delta$ 返回(7) 否则输出 \hat{x} 。

改进算法在残差不小于第一阈值 α 的条件下用 OMP 算法求解, 之后引入回溯思想, 采用 CoSaMP 算法迭代, 用上一次更新得到的残差和原子集作为第二阶段初始值, 并且通过第二阈值来终止迭代。且 OMP 算法迭代选择出的原子大部分是精确的, 从而回溯过程开始时, 会因为初始输入的精确性, 使得信号得以快速重建, 因此新算法是可行的。

3 实验结果和性能分析

给出不同算法的重构性能对比, 以此分析算法的性能。实验对象为一维离散随机信号和二维图像。实验结果为各算法在相同实验条件下运行 200 次取平均所得。

3.1 重构性能分析

为了验证算法的有效性及其优越性, 在给定的采样率下, 给出一维高斯随机信号的 OMP 与文中算法的重构成功率和重构时间与稀疏度的关系, 并对仿真结果进行分析。

3.1.1 重构成功率分析

重构对象为一维高斯随机信号, 长度 $N = 256$, 测量矩阵 $\Phi: M \times N$ 为高斯随机矩阵, 分别用 OMP 算法和文中算法进行重构。第一阈值为 α , 第二阈值为 δ , 在大量实验基础上, 均衡重构时间和精度, 取 $\alpha = 6 \times 10^{-3} * \|y\|_2$, $\delta = 10^{-5} * \|y\|_2$ 。采样率取 0.5 时, 两种算法在改变稀疏度的情况下, 重构成功率如图 1 所示。

由图 1 可知, 随稀疏度的增加两种算法的重构成功率均降低, 但文中算法的实验结果优于 OMP 算法。和 OMP 算法相比, 新算法重构成功率大幅提高。稀疏度为 40 时, 用 OMP 恢复出 x 的成功率约为 60%, 但文中算法对 x 恢复的成功率仍接近 100%; 当稀疏度为

50 时, OMP 算法对应恢复信号成功率小于 20%, 无法保证重构成功, 但文中算法依旧有 90% 以上的重构成功率, 可见新算法具备成功重建信号的优势。

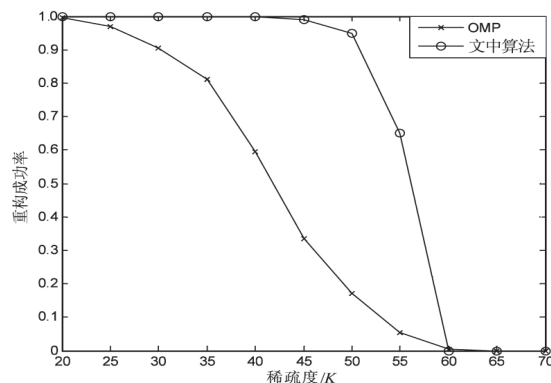


图 1 重构成功率和稀疏度关系对比

3.1.2 重构运行时间比较

采样率相同时, 给出文中算法和 OMP 算法重构所需时间与稀疏度的关系曲线, 如图 2 所示, 其中采样率取 0.5。

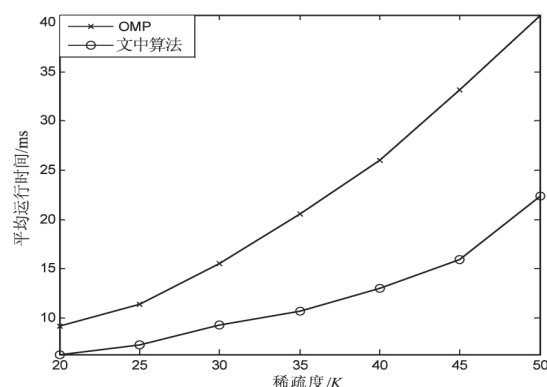


图 2 重构时间和稀疏度关系对比

由图 2 可知, 稀疏度增大时, OMP 和改进算法运行时间均有所增加, 但新算法增加缓慢且重构时间比 OMP 算法少。这是因为文中算法采用双阈值两阶段迭代。首先, OMP 算法迭代若干次之后, 通过第一阈值控制进入第二阶段迭代; 其次, 引入回溯思想, 使其快速正确地挑选原子, 并由第二阈值约束控制, 算法收敛时间变短。跟 OMP 算法比较, 改进算法不仅具有很强的重构成功率, 而且恢复速度快。

3.2 改进 OMP 算法在图像上的应用

将文中算法用于二维图像的重构, 实验对象为 256×256 的 Lena 标准灰度图像。首先用 DWT 基对图像稀疏表示, 之后用高斯随机矩阵线性观测, 得到观测值, 分别用三种算法重构, 采样率取 0.5, 实验结果见图 3。

由图 3 不难看出, 文中算法的重建结果更接近原始图像, 而 OMP 和 CoSaMP 重建的某些部分较为模糊, 因此文中算法在图像上的重构也是可行且效果较好。



图3 重构效果对比图

表1和表2分别在采样率取0.5、0.6和0.7时,对比了不同算法的重构时间和峰值信噪比(PSNR)。

表1 重构时间和采样率的关系

算法	0.5	0.6	0.7
CoSaMP	18.85	19.63	21.12
OMP	7.13	7.35	7.43
文中算法	4.64	5.01	5.23

表2 峰值信噪比和采样率的关系

算法	0.5	0.6	0.7
CoSaMP	28.42	31.68	33.09
OMP	28.80	30.96	31.85
文中算法	30.11	32.75	33.77

由表1可知,随采样率的增大,三种算法重构时间变长,但文中算法在采样率相同时,耗时均最短,较CoSaMP算法耗时大幅减少,也比OMP算法平均快2s,算法的速度快、耗时短。

由表2可知,随采样率的增加,PSNR增大,即图像恢复的更好。相同采样率时,文中算法的PSNR值略高于CoSaMP算法,且平均比OMP算法高出1dB,重建结果最好。结合表1表明,文中算法重构性能更好。

4 结束语

提出了一种改进的OMP算法,利用双阈值两阶段控制迭代。首先利用OMP算法迭代若干次,至残差小于第一阈值时引入回溯思想,采用CoSaMP继续更新,残差小于第二阈值时停止迭代,从而精确快速地重构出稀疏信号。实验结果表明,与OMP算法相比,

文中算法对一维的随机高斯信号和二维图像信号的重构成功率高,重构迅速且重构效果好。

参考文献:

- [1] KUTYNIOK G. Compressed sensing: theory and applications [M]. [s.l.]: Cambridge University Press, 2012.
- [2] 邵文泽, 韦志辉. 压缩感知基本理论: 回顾与展望[J]. 中国图象图形学报, 2012, 17(1): 1-12.
- [3] 李烈辰, 李道京. 基于压缩感知的连续场景稀疏阵列 SAR 三维成像[J]. 电子与信息学报, 2014, 36(9): 2166-2172.
- [4] LIU Y, ZHAN Z, CAI J, et al. Projected iterative soft-thresholding algorithm for tight frames in compressed sensing magnetic resonance imaging [J]. IEEE Transactions on Medical Imaging, 2016, 35(9): 2130-2140.
- [5] 黄海平, 陈九天, 王汝传, 等. 无线传感器网络中基于数据融合树的压缩感知算法[J]. 电子与信息学报, 2014, 36(10): 2364-2369.
- [6] 李少东, 杨军, 陈文峰, 等. 基于压缩感知理论的雷达成像技术与应用研究进展[J]. 电子与信息学报, 2016, 38(2): 495-508.
- [7] 刘芳, 武娇, 杨淑媛, 等. 结构化压缩感知研究进展[J]. 自动化学报, 2013, 39(12): 1980-1995.
- [8] 张小亚, 张慧, 王红霞. 基追踪问题的近点算法及其应用研究[J]. 计算机工程与科学, 2016, 38(1): 120-124.
- [9] 张本鑫, 朱志斌. 全变差图像恢复的自适应步长梯度投影算法[J]. 自动化学报, 2016, 42(9): 1347-1355.
- [10] 刘记红, 黎湘, 徐少坤, 等. 基于改进正交匹配追踪算法的压缩感知雷达成像方法[J]. 电子与信息学报, 2012, 34(6): 1344-1350.
- [11] NEEDELL D, VERSHYNIN R. Signal recovery from inaccurate and incomplete measurements via regularized orthogonal matching pursuit [J]. IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing, 2010, 4(2): 310-316.
- [12] 蒋留兵, 黄韬. 一种新的压缩采样匹配追踪算法[J]. 计算机应用研究, 2013, 30(2): 402-404.
- [13] 刘盼盼, 李雷, 王浩宇. 压缩感知中基于变尺度法的贪婪重构算法的研究[J]. 通信学报, 2014, 35(12): 98-105.
- [14] 陈善雄, 何中市, 熊海灵, 等. 一种基于压缩感知的无线传感信号重构算法[J]. 计算机学报, 2015, 38(3): 614-624.
- [15] 曾春艳. 匹配追踪的最佳原子选择策略和压缩感知盲稀疏重建算法改进[D]. 广州: 华南理工大学, 2013.
- [16] 石曼曼, 李雷. 基于分段可调节OMP算法的图像压缩感知算法[J]. 计算机技术与发展, 2016, 26(11): 14-18.
- [17] ZHANG D, ZHANG Y, HU X, et al. Fast OMP algorithm for 3D parameters super-resolution estimation in bistatic MIMO radar [J]. Electronics Letters, 2016, 52(13): 1164-1166.