求解最小费用流的一种新算法

纪亚劲,刘艳清,赵礼峰

(南京邮电大学 理学院,江苏 南京 210023)

摘　要:网络最小费用流问题是经典的双目标优化问题,其中利用的图论方法主要有负费用回路算法和最小费用路算法。最小费用路(Busacker-Gowan)算法每次增广流值之前都需要搜索一次最小费用路径,导致算法复杂度偏高,并且该算法是在剩余网络的基础上进行增广,使得该算法在计算预定流值最小费用流时有点冗余。针对这些不足,提出了一种求最小费用流的新算法。该算法首先利用改进的 Dijkstra 算法一次搜索出所有的源点至汇点费用路径,并且在余网络中增广流值。由于余网络比剩余网络构造简单,所以最终提高了算法的时间效率。仿真实验表明,在 ER 随机网络中提出算法和经典算法的计算结果相同,并且提出算法不管是在稀疏网络还是非稀疏网络中其运行时间比经典算法都要少,同时更适用于稀疏网络。

关键词:最小费用流;Dijkstra 算法;余网络;ER 随机网络

中图分类号:TP301.6　　**文献标识码:**A　　**文章编号:**1673-629X(2018)01-0108-04

doi:10.3969/j.issn.1673-629X.2018.01.023

A New Algorithm for Solving Minimum Cost Flow

JI Ya-jin,LIU Yan-qing,ZHAO Li-feng

(School of Science,Nanjing University of Posts and Telecommunications,Nanjing 210023,China)

Abstract: The network minimum cost flow is a classical two-objective optimization problem,in which the graph theory mainly has the negative cost loop algorithm and the least cost path algorithm. The minimum cost path (Busacker-Gowan) algorithm needs to search once before each increment of the flow value,resulting in high complexity and it is augmented on the basis of the residual network which makes some redundancy when calculating the minimum cost flow of the predetermined flow value. Aiming at these problems,a new algorithm is proposed to solve the minimum cost flow. First it searches out all the source-sink cost paths by improved Dijkstra algorithm,and augments the flow values in the remainder network which is simpler than residual network so that the time efficiency of the algorithm is improved. In the simulation,the proposed algorithm is identical with the classical algorithm on computing results in the ER stochastic network,and it has less runtime than the latter in both sparse and non-sparse networks,more suitable for sparse networks.

Key words:minimum cost flow;Dijkstra algorithm;remainder network;ER stochastic network

0　引　言

最小费用流问题是图论领域中的核心问题之一,也是网络优化中的重要问题。该问题主要是在容量费用网络中计算从源点至汇点的费用最小的可行流,并且也可以看成线性规划问题[1-2],在生产分配、交通运输、信息通讯、网络管理、电网等领域都得到了很好的应用[3-7]。因此,研究最小费用流算法具有重要的意义。

迄今为止,最小费用流问题的研究已经有 50 多年的历史,并且也形成了非常完善的理论体系。最小费用流的经典算法[1]可以分为两类:利用图论的理论方法,包括 Klein 在 1967 年提出的负费用回路算法,还有 Busack 和 Gowen 在 1961 年提出的最小费用路算法等;利用线性规划理论,先将最小费用流问题转化为线性规划模型,然后求解最小费用可行流,主要有原始对偶算法、状态算法等等。其中第一类算法由于计算简单而被广泛应用。除了这些经典算法,还有许多学者提出了改进的最小费用流算法[8-12]。

其中最小费用路算法是由初始可行流通过沿最小费用路增广得到另一个流值增加且费用最小的可行流,直到流值为 v_0 或是最大流且费用最小的可行流,即最小费用流。由于最小费用路算法在执行过程中需

收稿日期:2016-12-06　　**修回日期:**2017-04-12　　**网络出版时间:**2017-09-27

基金项目:国家自然科学基金青年基金项目(61304169)

作者简介:纪亚劲(1991-),男,硕士研究生,研究方向为图论及其在通信中的应用;赵礼峰,教授,硕士研究生导师,研究方向为图论及应用、矩阵论。

网络出版地址:http://kns.cnki.net/kcms/detail/61.1450.TP.20170927.0958.026.html

要多次寻找最小费用路径,导致算法时间复杂度偏高,并且在实际应用中,一般不一定需要求出最小费用最大流,只需求出预定流值的最小费用流即可。所以,文中针对最小费用路算法进行改进,利用改进的 Dijkstra 算法[13-14]寻找所有源点至汇点的路径并且在余网络中进行增广,以求出预定流值的最小费用流,提高算法效率。

1　基本概念

定义 1:设 $N=(V,A,c,w)$ 为带源点 v_s 和汇点 v_t 的容量费用网络,$v_0(v_0>0)$ 是某固定流值,那么 N 中最小费用流问题的线性规划模型为:

$$\text{MIN} \ \sum w_{ij}f_{ij}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum\limits_{v_j\in N^+(v_s)} f_{sj}-\sum\limits_{v_j\in N^-(v_s)} f_{js}=v_0\\ \sum\limits_{v_j\in N^+(v_t)} f_{tj}-\sum\limits_{v_j\in N^-(v_t)} f_{jt}=-v_0\\ \sum\limits_{v_j\in N^+(v_i)} f_{ij}-\sum\limits_{v_j\in N^-(v_i)} f_{ji}=0,v_i\in V\backslash\{v_s,v_t\}\\ 0\leqslant f_{ij}\leqslant c_{ij},(v_i,v_j)\in A\end{cases}$$

定义 2:对于给定的容量网络 $N=(V,A,c)$ 及 N 上的一个可行流 $f=\{f_{ij}\mid(v_i,v_j)\in A\}$,$\forall(v_i,v_j)\in A$,若 $0\leqslant f_{ij}<c_{ij}$,则令 $c_{ij}(f)=c_{ij}-f_{ij}$;若 $f_{ij}=c_{ij}$,则在网络中删去这条弧。这样构成的一个新网络 $N(f)=\{V,A,c_f\}$ 称为原容量网络 N 关于可行流 f 的余网络[15],如图 1 所示。

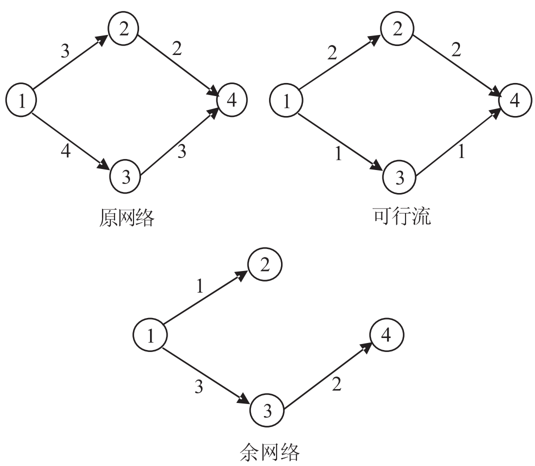

图 1　余网络生成示意

2　最小费用路算法

2.1　算法步骤

Step1:取初始可行流 f(例如零流);

Step2:若 $v(f)=v_0$,终止。否则转 Step3;

Step3:构造剩余网络 $D(f)$,找到一条最短费用路径 P,找不到则停止;

Step4:沿 P 增广流值 $\delta=\min\{c_f(P),v_0-v(f)\}$,得到新的可行流,转 Step2。

2.2　算法存在的劣势

(1)每次更新剩余网络后,该算法都要重新在剩余网络中寻找最小费用路作为增广链增广,假设每次增广至少增广流值为 1,那么该算法最多需要利用 v_0 次 ford 最短路算法来寻找最小费用路,所以该算法还是偏复杂。

(2)最小费用路算法是在剩余网络的基础上进行增广,那么该算法可以计算出网络的最小费用最大流,对于求网络最小费用流其适用性比较广,但对于只需要求预定流值的最小费用流来说,该算法可能显得冗余。

3　一种求最小费用流的新算法

3.1　算法思想

新的最小费用流算法的基本思想是利用改进的 Dijkstra 算法先求出从源点至汇点的所有费用路径,记录下每条路径的费用 w。将所有路径费用按从小到大排列。首先构造关于初始可行流 f(例如零流)的余网络 $N(f)$,在 $N(f)$ 中选择费用最小的路径进行增广,增广后更新可行流 f 及余网络 $N(f)$,删除网络中容量为 0 的弧和不存在的费用路径记录,继续选择当前费用最小的有向路径增广。重复以上步骤,直至增流至预定流值 v_0 或者不存在可增广路径为止。

3.2　算法步骤

Step1:根据容量费用网络 $N=(V,A,c,w)$ 构造费用的邻接矩阵 $\boldsymbol{D}'$。

Step2:删掉矩阵 $\boldsymbol{D}'$ 的第一行第一列得到 $\boldsymbol{D}$。

Step3:只保留矩阵 $\boldsymbol{D}'$ 的第一行且删掉第一列得到矩阵 $\boldsymbol{D}^1$。

Step4:$\boldsymbol{D}^k=\boldsymbol{D}^{k-1}\otimes\boldsymbol{D}$,构造秩为 k 的矩阵 $\boldsymbol{D}^k$,保留各节点之间的所有路径项,直至所得的节点数等于 n 时停止。计算 $P=\cup\boldsymbol{D}^i(i=1,2,\cdots,n)$,只保留从源点到汇点的所有有向路径 $S_1,S_2,\cdots,S_r$。

Step5:比较有向路径 $S_1,S_2,\cdots,S_r$ 的费用权值,把费用权值从小到大排列。

Step6:按权值从小到大的顺序依次对满足增流条件的有向路径增流,直到增流至预定流值 v_0 或者不存在可增广路径为止。

3.3　算法的可行性

新算法执行时,首先通过改进的 Dijkstra 算法找到从源点到汇点的所有路径,算法 Step4 中的终止条件是当算法执行到第 $n-1$ 步,得到的节点数为 n 时终止,防止算法陷入死循环。其次根据路径费用权值从小到大增广流值。每增广一次流值,调整流量后,将增广链上容量为 0 的弧从网络中删除。设网络 N 的预定

流值为 v_0,每次增广的流值最少为 1,因此最多经过 v_0 次增广,此时算法结束,得到最小费用流,该算法不会陷入死循环。

3.4　算法的复杂度

(1)时间复杂度。

设容量费用网络 N 的顶点数为 n ,有向弧数为 m,v_0 为预定流值,并且假设 N 中所有弧容量以及 v_0 均为整数。改进的 Dijkstra 算法的时间复杂度为 $O(n^2)$,所以 Step1-Step5 的算法时间复杂度为 $O(n^2)$,Step6 沿最小费用路对流进行增广的计算量为 $O(n)$ 。由此可知,定流值比例的最小费用路新算法的时间复杂度为 $O(n^2+n^2+n)=O(n^2)$ 。

(2)空间复杂度。

在新算法执行过程中,需要存储网络中所有弧的费用权值和容量权值,它们由两个 $n \times n$ 邻接矩阵分别存储,复杂性为 $O(n^2)$ 。同时算法 Step4 中还需要记录 r 条有向路径,每条路径的复杂度为 $O(n)$,Step6 中沿有向路径增流其复杂度为 $O(n)$,整个算法最多循环 v_0 次。因此新算法的空间复杂度为:$O(n^2+rn+v_0 n)=O(n \cdot \max\{v_0,n\})$ 。

4　算法验证

如图 2 所示,图 1 中每条弧上的第一个数字为容量,第二个数字为费用,求从源点 1 至汇点 6 的最小费用流。

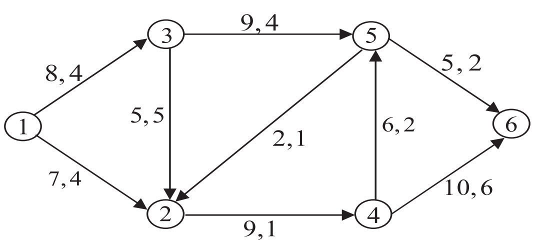

图 2　原网络

(1)利用改进的 Dijkstra 算法在原网络中找到 6 条从源点至汇点的费用路径,分别为:$S_1=1246$,$S_2=1356$,$S_3=13246$,$S_4=12456$,$S_5=135246$,$S_6=132456$。费用分别为:$w_1=11$,$w_2=10$,$w_3=16$,$w_4=9$,$w_5=16$,$w_6=14$,按从小到大排序:S_4, S_2, S_1, S_6,S_5。

(2)按照顺序依次进行增流,直到不存在从源点 1 至汇点 6 的可增广路径为止,最终算出的最小费用流为 $f=9$,$w=99$。

5　算法仿真分析

5.1　硬件环境

利用 MATLAB 软件进行仿真实验,编程环境为 MATLAB2012b,CPU 为 Intel(R) Core(TM)i7-4720HQ CPU @ 2.60 Hz,内存为 8 GB,64 位 Window7 系统。

5.2　实验设置

仿真分为两部分。第一部分针对上述例题,利用新算法与 Busacker-Gowan 算法通过实验验证结果的正确性以及比较两个算法的运行时间。第二部分是对于 ER 随机网络进行仿真分析,此部分实验分为两组:第一组是稀疏网络测试,第二组是非稀疏网络测试。

5.3　实例验证

对于上述实例中的网络,输入预定流值 $v_0=20$,若网络的实际最大流流值小于等于预定流值,那么最小费用流算法求出的是网络最大流及对应的最大流最小费用;若网络的实际最大流流值大于预定流值,那么求出的是预定流值下的最小费用。

重复 10 次实验求得结果的流值都为 9,对应的费用均为 99。具体的可行流矩阵 $\boldsymbol{f}$ 与费用矩阵 $\boldsymbol{w}$ 如下:

$$\boldsymbol{f}=\begin{bmatrix} 0 & 7 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{w}=\begin{bmatrix} 0 & 28 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 24 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

并且新算法与 Busacker-Gowan 算法的运行时间平均值分别为:6.2770e-4 s 和 7.0935e-4 s。通过以上实验分析得出新算法与 Busacker-Gowan 算法的结论一样,由于此例的节点数过少,所以两种算法运行时间关系不明显。接下来针对大型的 ER 随机网络作比较。

5.4　随机网络实验与分析

5.4.1　ER 随机网络

ER 随机网络模型[15]定义为:对于一个节点数为 n 的网络,其中任意两点以概率 p 连接,网络中边的数目是一个随机变量 X,X 的取值范围是从 0 到 $n(n-1)/2$ 的整数。生成的不同网络共有 $2^{n(n-1)/2}$ 个。

结合 ER 随机网络和文中对网络的要求,给出以下 ER 随机网络生成过程:

(1)创建一个 n 阶零矩阵 $\boldsymbol{C}$ 作为原网络的容量矩阵;

(2)创建一个 n 阶零矩阵 $\boldsymbol{W}$ 作为原网络的费用矩阵;

(3)由 ER 随机网络参数 p (概率)值,对于网络中的任意两点,给定一个随机数 $r(0<r<1)$,若 $r<p$,

则连接,否则断开;

(4)对步骤(3)中得到的所有边,分别赋予两个 0～50间的随机整数作为容量函数和费用函数。

在 ER 随机网络中,若参数 $p < 0.2$,则规定其网络为稀疏网络,若 $p \geq 0.2$,则规定为非稀疏网络[16]。以下分别在稀疏 ER 随机网络和非稀疏 ER 随机网络中进行仿真实验对比。

5.4.2　实验结果衡量指标

文中主要以最小费用值、可行流流值、运行时间作为主要性能指标。f:Busacker-Gowan 算法求得的可行流流值;f':新算法求得的可行流流值;w:Busacker-Gowan 算法求得的最小费用值;w':新算法求得的最小费用值;t:Busacker-Gowan 算法的运行时间;t':新算法的运行时间。

5.4.3　稀疏 ER 随机网络实验

选取 $p = 0.08$ 生成的稀疏容量费用网络为原始网络,分别使用 Busacker-Gowan 算法和新算法计算预定流值的最小费用流,网络节点数为 200 至 1 000。从表 1 中可以看出,两种算法求出最小费用流的费用和流值都相等。表 1 和图 3 中运行时间为十次实验运行时间取平均值,可以看出在稀疏 ER 随机网络中新算法比经典算法的效率更高,并且随着节点数的增加,效果更加明显。

5.4.4　非稀疏 ER 随机网络实验

选取 $p = 0.25$ 生成的非稀疏容量费用网络作为原始网络,同样比较两种算法,网络节点数依然从 200 至 1 000,取10次实验两种算法运行时间的平均值。两种算法计算得到的最小费用流的费用及流值如表 2 和图 4 所示。可以看出,文中算法的时间效率依然高于 Busacker-Gowan 算法,但是在非稀疏网络中优化的效率没有稀疏网络中明显,所以文中算法更适用于稀疏网络。

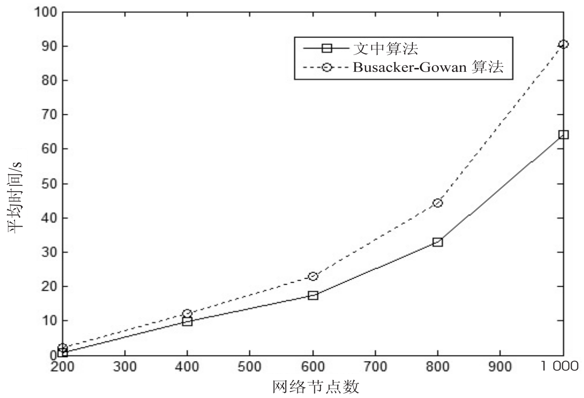

图 3　稀疏网络两种算法运行时间对比

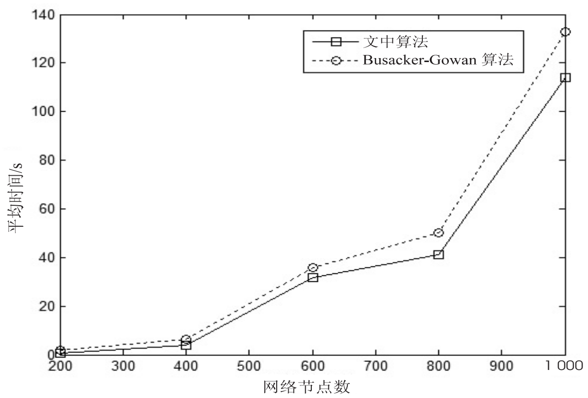

图 4　非稀疏网络两种算法运行时间对比

表 1　稀疏 ER 随机网络两种算法的运行结果($p = 0.08$)

网络规模	f	f'	w	w'	t/s	t'/s
200	91	91	854	854	2.255 6	2.145 2
400	164	164	1 269	1 269	12.653 2	9.368 9
600	236	236	2 874	2 874	21.998 5	16.143 8
800	283	283	3 619	3 619	44.861 4	31.058 2
1 000	452	452	5 182	5 182	90.025 7	63.952 6

表 2　非稀疏 ER 随机网络两种算法的运行结果($p = 0.25$)

网络规模	f	f'	w	w'	t/s	t'/s
200	113	113	1 430	1 430	3.067 1	2.785 3
400	263	263	2 491	2 491	9.452 1	7.192 2
600	407	407	3 866	3 866	37.319 7	31.862 0
800	524	524	5 283	5 283	47.185 2	42.021 9
1 000	831	831	7 854	7 854	123.251 4	112.996 4

6　结束语

网络流的应用是一项十分有意义的研究工作。文中对经典算法加以改进,提出了一种新算法,通过计算所有费用路径,经过排序依次对其增广流值

(下转第 115 页)

4 结束语

提出一种基于大数据知识服务平台的车辆路径调度算法。该算法利用大数据超性能计算工具对传统算法进行优化,增强了算法收集和处理车辆数据的能力,提高了算法的时间性能。模拟实验表明,改进后的两个算法能够有效处理车辆路径调度问题,同时解决了传统算法寻找最优解的问题,具有重要的参考价值。虽然该算法在数据模拟实验中得到了较好的时间性能指标,但在实际应用中仍受到了一些限制,未来的研究工作将进一步对该算法进行优化。

参考文献:

[1] 汤雅连.配送中心选址与车辆路径问题的优化[J].北京联合大学学报:自然科学版,2014,28(3):47-52.

[2] 张　强,荆　刚,陈建岭.车辆路线问题研究现状及发展方向[J].交通科技,2004(1):60-62.

[3] 殷　龙,衡红军.基于最邻近算法的机场特种车辆调度应用研究[J].计算机技术与发展,2016,26(7):151-155.

[4] 姜坤霖,李美安,张宏伟.面向旅行商问题的蚁群算法改进[J].计算机应用,2015,35:114-117.

[5] 祝崇隽,刘　民,吴　澄.供应链中车辆路径问题的研究进展及前景[J].计算机集成制造系统,2001,7(11):1-6.

[6] 赵传信,张雪东,季一木.改进的粒子群算法在 VRP 中的应用[J].计算机技术与发展,2008,18(6):240-242.

[7] CLAES R,HOLVOET T,WEYNS D. A decentralized approach for anticipatory vehicle routing using delegate multiagent systems[J]. IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems,2011,12(2):364-373.

[8] 刘云忠,宣慧玉.车辆路径问题的模型及算法研究综述[J].管理工程学报,2005,19(1):124-130.

[9] 钟雪灵,王雄志.开放式车辆路径问题的混合算法[J].计算机仿真,2011,28(8):207-210.

[10] 张建勇,李　军,郭耀煌.带模糊预约时间的动态 VRP 的插入启发式算法[J].西南交通大学学报,2008,43(1):107-113.

[11] 袁庆达,闫　昱,周再玲. Tabu Search 算法在优化配送路线问题中的应用[J].计算机工程,2001,27(11):86-89.

[12] SCHMITT E,JULA H. Vehicle route guidance systems:classification and comparison[C]//IEEE intelligent transportation systems conference. Toronto:IEEE,2006:242-247.

[13] 李　刚,刘景发.基于禁忌搜索的启发式算法求解带平衡约束的圆形装填问题[J].中国科学:信息科学,2011,41(9):1076-1088.

[14] SOLOMON M M. Algorithms for the vehicle routing and scheduling problems with time window constraints[J]. Operations Research,1987,35(2):254-265.

(上接第 111 页)

至预定流值,最终计算出最小费用流。该算法相对经典算法在时间上具有比较明显的优化,而且随着网络规模的增大,效果更显著。该算法在两种网络比较中更加适用于稀疏网络。在实际应用中,很多网络都是稀疏网络,因此文中算法能为这些领域提供较为有力的支持。

参考文献:

[1] 谢　政.网络算法与复杂性理论[M].长沙:国防科技大学出版社,2003.

[2] 王桂平,王　衍,任嘉辰.图论算法理论、实现及应用[M].北京:北京大学出版社,2011.

[3] 谢凡荣.运输网络中求最小费用最大流的一个算法[J].运筹与管理,2000,9(4):33-38.

[4] FAN J,LIAO I F,TAN S X D,et al. Localized on-chip power delivery network optimization via sequence of linear programming[C]//Proceedings of the 7th international symposium on quality electronic design. Piscataway:IEEE Computer Society,2006:272-277.

[5] RISETTI G G,RIZZINI D L,STACHNISS C,et al. Online constraint network optimization for efficient maximum likelihood map learning[C]//IEEE international conference on robotics and automation. [s. l.]:IEEE,2008:1880-1885.

[6] CARLONI C,NOBILE L. Maximum circumferential stress criterion applied to orthotropic materials[J]. Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures,2005,28(9):825-833.

[7] DALMAS D,LAKSIMI A. On the method of determination of strain energy release rate during fatigue delamination in composite materials[J]. Applied Composite Materials,1999,6(5):327-340.

[8] 程德文,吴育华.求最小费用最大流的改进标号法[J].系统管理学报,2009,18(2):237-240.

[9] 金友良,张同全.最小费用排序问题[J].云南民族大学学报:自然科学版,2007,16(3):222-224.

[10] 赵礼峰,宋常城,白　睿.基于最小费用最大流问题的“排序”算法[J].计算机技术与发展,2011,21(12):82-85.

[11] 赵礼峰,白　睿,宋常城.求解最小费用最大流的新方法[J].计算机技术与发展,2012,22(5):94-96.

[12] 夏林林,叶茂莹,杨凌云,等.求解最小费用流问题的蚁群算法[J].内江师范学院学报,2010,25(6):30-32.

[13] 徐凤生,李天志.所有最短路径的求解算法[J].计算机工程与科学,2006,28(12):83-84.

[14] 孙小军,焦建民.一种求解最少时间的最小费用路问题的算法[J].计算机工程与科学,2008,30(7):77-78.

[15] 谢　政,汤泽滢.最小费用最大双流[J].高校应用数学学报,1996(1):97-104.

[16] 汪小帆,李　翔,陈光荣.复杂网络理论及其应用[M].北京:清华大学出版社,2005.