

# 基于交替方向乘子的全变差图像复原

赖明倩, 蔡光程

(昆明理工大学 理学院, 云南 昆明 650500)

**摘要:**全变差(TV)图像复原正则化模型一般由正则项和保真项两部分构成。针对该模型容易形成使边缘平滑和产生阶梯效应的问题,在修改正则项后提出了一种新的图像复原模型。改模型利用交替方向乘子算法来优化其求解模型,即利用辅助变量把全变差复原问题转化为一个等价的无约束优化问题,基于交替方向乘子迭代将无约束优化问题分解为几个子问题,再根据子问题的特点,利用阈值法对问题进行优化求解。实验结果表明,所提出的新模型能有效保护图像边缘并抑制阶梯效应,明显地提高了图像的质量;与其他正则化图像复原模型相比,其具有较高的信噪比,较小的相对误差和较好的图像恢复效果。

**关键词:**全变差;图像复原;正则化;阶梯效应;交替迭代算法

**中图分类号:**TP391

**文献标识码:**A

**文章编号:**1673-629X(2017)04-0060-04

doi:10.3969/j.issn.1673-629X.2017.04.014

## Total Variation Image Restoration with Alternating Direction Method of Multipliers

LAI Ming-qian, CAI Guang-cheng

(Faculty of Science, Kunming University of Science and Technology, Kunming 650500, China)

**Abstract:**Total Variation (TV) image restoration regularization model generally consists of two parts: regularization term and fidelity term. In view of the problem that the model could easily make edges smooth and produce the stair effect, a new image restoration model with modified regularization term has been proposed, which can be optimized with alternating direction multiplier algorithm to achieve its solution model. The total variation restoration problem can be transformed into an equivalent unconstrained optimization problem by utilizing auxiliary variable and then the unconstrained optimization problem can be disassemble into such several sub-problems that each sub-problem can be optimized and solved with threshold value method according to the peculiarities of the sub-problem structure. Experimental results show that this new model proposed has significantly improved the image quality since it can protect image edges and restrain staircase effect, and that compared with other regularization image restoration models, it helps achieve higher signal to noise ratio, smaller relative error and better effect of image restoration.

**Key words:**total variation; image restoration; regularization; stair effect; alternative and iterative algorithm

### 1 概述

在生活中,图像是一种重要的信息来源,但在实际获取图像时会受到运动扰动、光学模糊和各种噪声的影响,导致图像降质出现退化现象,表现为图像模糊。图像被噪声污染,分辨率降低,甚至图像的某些部分缺失<sup>[1]</sup>。因此,去除图像模糊及消除图像中的噪声等有着非常重要的意义。

图像复原是指通过某些方法、手段和规则从退化了的图像恢复出原始图像。图像复原的主要目的是尽可能地恢复被退化图像的本来面目,为此需要知道图

像退化的机理和过程的先验知识,建立相应的退化模型,找出一种相应的反过程,从而恢复出原图像。

图像受噪声干扰的退化模型为:

$$g = Hf + n \quad (1)$$

其中, $f$ 为原始图像; $g$ 为观察图像; $n$ 为均值为0、方差为 $\sigma^2$ 的高斯白噪声; $H$ 为模糊算子。

图像复原是根据图像 $g$ 和算子 $H$ 来恢复原始图像 $f$ 。由于图像复原问题是不适定的,需要引入先验知识,将其转换成适定问题求解,而正则化方法是解决反问题的有效方法。

收稿日期:2016-06-01

修回日期:2016-10-18

网络出版时间:2017-03-07

基金项目:国家自然科学基金资助项目(11461037);昆明理工大学人才基金(2008-72)

作者简介:赖明倩(1992-),女,硕士生,研究方向为图像处理;蔡光程,博士,教授,通讯作者,研究方向为科学计算、图像处理。

网络出版地址: <http://kns.cnki.net/kcms/detail/61.1450.TP.20170307.0922.058.html>

图像复原的正则化模型为:

$$\min_f \lambda \varphi(f) + \|Hf - g\|_2^2 \quad (2)$$

其中,第一项  $\varphi(f)$  为正则项,第二项为数据匹配项,主要保证复原图像和观察图像的接近程度,  $\lambda$  为权衡数据匹配项和正则化项之间的正则化参数。

由 Tikhonov 和 Arsenin 提出的原始模型为<sup>[2]</sup>:

$$\min_f \int_{\Omega} \|\nabla f\|_1^2 dx dy + \frac{\lambda}{2} \|Hf - g\|_2^2 \quad (3)$$

利用 Tikhonov 正则化方法,可以得到这一原始问题的稳定逼近。但是,由于各向同性的平滑性,这种平滑惩罚模型不能很好地保留其边缘、稀疏图案和纹理。于是在 1992 年 Rudin 等提出了全变差 (Total Variation) 正则化模型<sup>[3]</sup>:

$$\min_f \int_{\Omega} \|\nabla f\|_1 dx dy + \frac{\lambda}{2} \|Hf - g\|_2^2 \quad (4)$$

其中,边界定义为  $\Omega = (0,1) \times (0,1)$ ,  $\nabla$  表示梯度算子。

此处全变差定义为:

$$\int_{\Omega} \|\nabla f\|_1 dx dy = \int_{\Omega} \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dx dy \quad (5)$$

该模型能较好地保持图像的边缘,因此被广泛应用到图像的复原和去噪中<sup>[4-8]</sup>。然而 TV 正则化方法对纹理和细节的保持效果不好,有较明显的阶梯效应。为了抑制阶梯效应及改善纹理保持效果,高阶偏微分方程和高阶正则化方法逐渐为很多研究者关注。文献[9]提出了基于四阶 PDE 的图像去噪方法,该方法能有效抑制阶梯效应,较好地保持纹理,但该模型比较复杂<sup>[10]</sup>。近些年对求解模型(4)提出了很多方法,包括定点迭代法<sup>[4]</sup>、原对偶牛顿算法<sup>[11]</sup>、多级优化方法<sup>[12]</sup>、分割方法<sup>[13]</sup>和 Nesterov's 方法<sup>[14]</sup>等。目前对全变差去模糊问题的主要求解思路是将该问题看作一个无约束问题来优化求解。如 Wang Yilun 等基于变量分离法和半二次惩罚函数法提出一种快速全变差反卷积算法<sup>[6]</sup>去模糊,实验结果验证了该算法是有效的且有较好的复原效果<sup>[15]</sup>。

采取全范数  $\|f\|_{BV} + \rho \|f\|_1$  作为正则化项,由于在重建过程中有保存边缘的能力,所以比 TV-norm 更优选。那么可用以下的变化模型改写原问题<sup>[16]</sup>:

$$\begin{cases} \min_f \int_{\Omega} \|\nabla f\|_1 + \alpha \|f\|_1 + \frac{\lambda}{2} \|Hf - g\|_2^2 \\ \text{over } f \in K \cap X \end{cases} \quad (6)$$

其中,  $\alpha \geq 0, \lambda \geq 0$ ,  $K$  是闭的,且是  $L^1(\Omega)$  的凸集,  $X = L^1(\Omega) \cap BV(\Omega)$ 。赋有范数  $\|\cdot\|_X = \|\cdot\|_{L^1} + \|\cdot\|_{BV}$  的空间  $X$  是巴拿赫空间。

为此,依据全变差正则化,提出了一种新的模型,利用交替方向乘子迭代算法求解该模型,并与 FTVd

算法进行对比实验。实验结果表明,该方法能更有效地表现图像的信息,尤其是对复原图像的信噪比有很明显的改善。

## 2 ADMM 方法的基本思想

考虑最小化问题:

$$\min \varphi(x) + \nu(z) \quad \text{s. t. } Ax + Bz = c \quad (7)$$

利用 Lagrange 方法将上述约束问题(7)转化为无约束问题(8):

$$L(x, z, y) = \varphi(x) + \nu(z) + y^T(Ax + Bz - c) + \frac{\gamma}{2} \|Ax + Bz - c\|_2^2 \quad (8)$$

标准的 ADMM (Alternating Direction Method of Multipliers) 算法如下:

$$\begin{cases} x^{(k+1)} = \operatorname{argmin}_x L(x, z^{(k)}, y^{(k)}) \\ z^{(k+1)} = \operatorname{argmin}_z L(x^{(k+1)}, z, y^{(k)}) \\ y^{(k+1)} = y^{(k)} + \gamma(Ax^{(k+1)} + Bz^{(k+1)} - c) \end{cases} \quad (9)$$

## 3 基于 ADMM 算法的图像复原模型

为了利用 ADMM 算法进行图像去模糊,可将原去模糊优化问题转化为一个无约束的优化问题。将式(6)写成如下的优化问题:

$$\min \|\nabla f\|_1 + \alpha \|f\|_1 + \frac{\lambda}{2} \|Hf - g\|_2^2 \quad (10)$$

引入辅助变量  $\omega$  和  $z$ , 将上式转化为 Lagrange 函数:

$$\begin{aligned} L(f, \omega, z, y, p) = & \|\omega\|_1 + y^T(\nabla f - \omega) + \\ & \frac{\beta}{2} \|\nabla f - \omega\|_2^2 + \alpha \|z\|_1 + \\ & p^T(f - z) + \frac{\mu}{2} \|f - z\|_2^2 + \\ & \frac{\lambda}{2} \|Hf - g\|_2^2 \end{aligned} \quad (11)$$

那么式(10)求解最小化问题可以转化为求式(11)的最小值。对式(11)采用 ADMM 算法求解,可得到变量  $f, \omega, z, y, p$  的迭代公式(文献[17]证明了该算法的收敛性):

$$\begin{cases} f^{(k+1)} = \operatorname{argmin}_f L(f, \omega^{(k)}, z^{(k)}, y^{(k)}, p^{(k)}) \\ \omega^{(k+1)} = \operatorname{argmin}_{\omega} L(f^{(k+1)}, \omega, z^{(k)}, y^{(k)}, p^{(k)}) \\ z^{(k+1)} = \operatorname{argmin}_z L(f^{(k+1)}, \omega^{(k+1)}, z, y^{(k)}, p^{(k)}) \\ y^{(k+1)} = y^{(k)} + \beta(\nabla f^{(k+1)} - \omega^{(k+1)}) \\ p^{(k+1)} = p^{(k)} + \mu(f^{(k+1)} - z^{(k+1)}) \end{cases} \quad (12)$$

(1) 在求解  $f^{(k+1)}$  时,可转化为:

$$(\beta \nabla^T \nabla + \lambda H^T H + \mu I) f^{(k+1)} = \beta \nabla^T \omega^{(k)} +$$

$$\lambda H^T g + \mu z^{(k)} - p^{(k)} - \nabla^T y^{(k)} \tag{13}$$

(2)在求解  $\omega^{(k+1)}$  时,可利用阈值法 (shrinkage), 有如下定义:

定义  $0 \cdot (0/0) = 0$  以及

$$S(y, \alpha)_{i,j} = (\arg \min_{\omega} \|\omega\|_1 + \frac{1}{2} \|\omega - y\|_2^2)_{i,j} = \max(\|y_{i,j}\|_2 - \alpha, 0) \frac{y_{i,j}}{\|y_{i,j}\|_2} \tag{14}$$

因此可得到  $\omega^{(k+1)}$  的求解公式:

$$\omega^{(k+1)} = S(\nabla f^{(k+1)} + \frac{1}{\beta} y^{(k)}, \frac{1}{\beta}) \tag{15}$$

(3)求解  $z^{(k+1)}$  可同样利用上述的收缩技术,故  $z^{(k+1)}$  的求解公式为:

$$z^{(k+1)} = S(f^{(k+1)} + \frac{1}{\mu} p^{(k)}, \frac{\alpha}{\mu}) \tag{16}$$

变量  $y^{(k+1)}, p^{(k+1)}$  在迭代过程中都是随着  $f^{(k+1)}, \omega^{(k+1)}$  和  $z^{(k+1)}$  更新的。

4 实验及结果分析

为了验证该算法恢复图像的有效性,选择两幅灰度图像(见图 1)。分别以在两种不同的高斯模糊(模糊核分别为  $9 \times 9, 21 \times 21$ )和在两种不同的运动模糊(模糊核分别为  $21 \times 21, 41 \times 41$ )情况下的图像恢复作为实验数据,对提出算法、FTVd 算法<sup>[5]</sup>和 TV 模型进行了对比。提出算法的终止条件为  $\|f^{k+1} - f^k\|_2 /$

$\|f^{k+1}\|_2 < 5 \times 10^{-4}$ 。实验采用的计算机硬件环境为 Intel Core CPU 2.20 GHz,内存 4 GB,软件环境为 Microsoft Windows 7, MATLAB R2014a。

信噪比 (ISNR) 可以用来衡量图像的质量,定义为:

$$ISNR = 10 \log_{10} \frac{\|g - f\|_2^2}{\|\hat{f} - f\|_2^2} \tag{17}$$

其中,  $g, f, \hat{f}$  分别表示退化的、原始的、恢复的图像。

ISNR 的值越大,表示复原图像越接近真实图像,效果也越好。

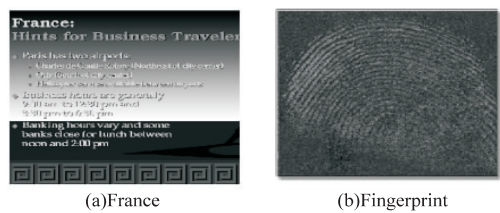
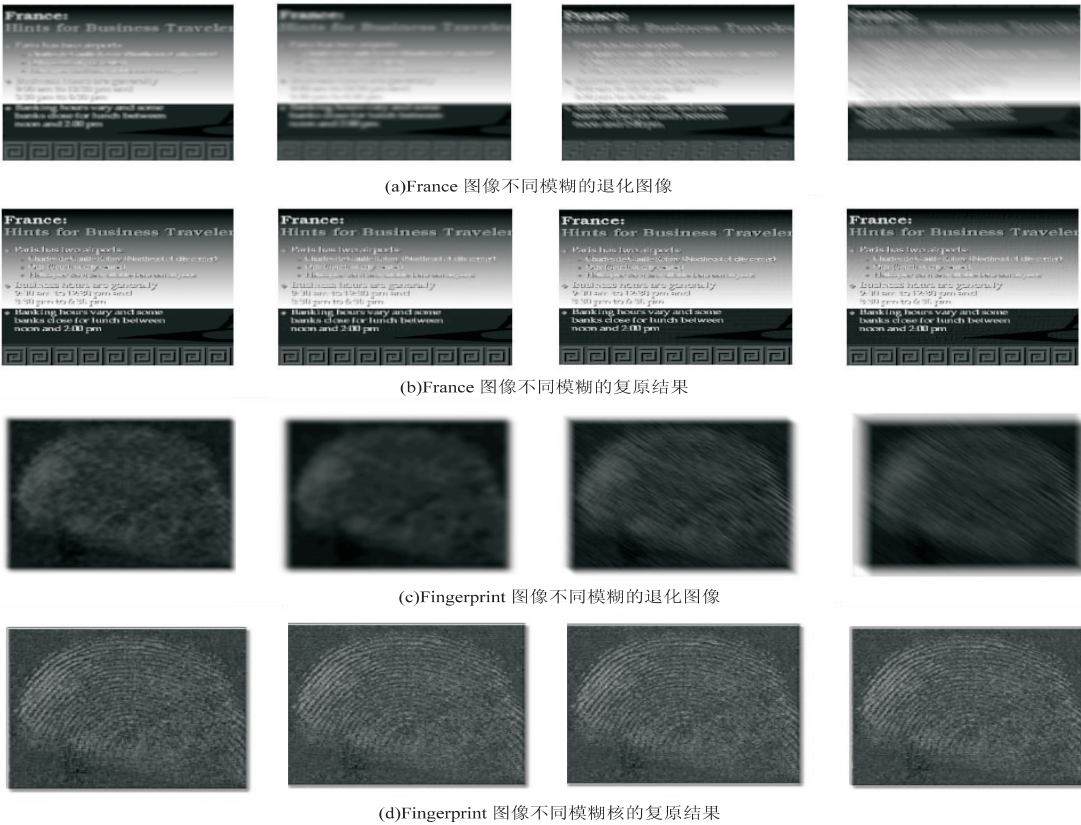


图 1 原始图像

图 2(a) 中从左到右分别是模糊核为  $9 \times 9, 21 \times 21$  的高斯模糊和模糊核为  $21 \times 21, 41 \times 41$  的运动模糊的 France 退化图像(所有退化图像还加了均值为 0、方差为  $10^{-6}$  的高斯白噪声),图 2(b)是与之对应的恢复效果图。图 2(c)和(d)是 Fingerprint 图像的退化图和恢复图。从视觉上可以看出,复原图像能很好地保护图像的边缘,在不同的模糊及不同的模糊核下都能得到较好的复原图像。



(d)Fingerprint 图像不同模糊核的复原结果



图3给出了France图像在高斯模糊核为 $21 \times 21$ 下提出算法、FTVd算法<sup>[5]</sup>和TV模型的复原图像。图4给出了Fingerprint图像在运动模糊核为 $41 \times 41$ 下提出算法、FTVd算法<sup>[5]</sup>和TV模型的复原图像。为了更加明显地反映各算法的优缺点,表1~4给出了France

图像和Fingerprint图像在不同模糊和不同模糊核下提出算法、FTVd算法<sup>[5]</sup>和TV模型复原图像的信噪比、算法计算时间和相对误差值( $RE = \frac{\|f^{k+1} - f^k\|_2}{\|f^{k+1}\|_2}$ )的比较。



图3 高斯模糊核为 $21 \times 21$ 的各方法复原结果

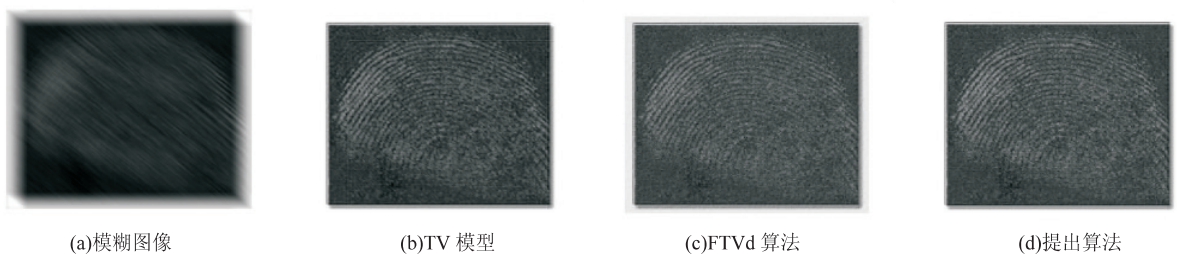


图4 运动模糊核为 $41 \times 41$ 的各种方法复原结果

由表1~4可以看出,在各种不同的情况下,所提出的算法复原图像的信噪比值总大于其他方法;其次所提出的算法的相对误差值也总小于其他方法,说明所采用的方法克服了其他方法的数值不稳定性,比其他方法恢复图像的效果更好;最后虽然FTVd算法<sup>[5]</sup>在信噪比和相对误差值上结果不好,但其算法的运行时间比其他方法都短,证明了该算法的高效性。

表1 算法比较(高斯模糊核为 $21 \times 21$ 的France图像)

性能指标	退化图像	TV 模型	FTVd 算法	提出算法
ISNR/dB	6.23	9.27	9.61	11.45
Time/s		5.87	2.67	6.14
RE		0.22	0.21	0.17

表2 算法比较(运动模糊核为 $41 \times 41$ 的France图像)

性能指标	退化图像	TV 模型	FTVd 算法	提出算法
ISNR/dB	5.42	15.55	18.95	21.39
Time/s		5.79	2.55	6.66
RE		0.10	0.07	0.05

表3 算法比较(高斯模糊核为 $21 \times 21$ 的Fingerprint图像)

性能指标	退化图像	TV 模型	FTVd 算法	提出算法
ISNR/dB	8.01	10.27	10.74	11.53
Time/s		2.71	1.13	2.21
RE	万方数据	0.18	0.17	0.16

表4 算法比较(运动模糊核为 $41 \times 41$ 的Fingerprint图像)

性能指标	退化图像	TV 模型	FTVd 算法	提出算法
ISNR/dB	5.62	13.71	15.55	18.48
Time/s		2.60	1.11	2.56
RE		0.12	0.10	0.07

5 结束语

针对全变差图像复原问题,对正则项修改后提出了一种新的模型。鉴于修改后正则项的不可微性,通过辅助变量将其转换成与之完全等价的无约束优化问题,利用交替方向乘子算法将该无约束优化问题分解成几个子问题,针对每个子问题的特点用不同方法求解。实验结果表明,提出算法是有效可行的,与其他算法相比,具有较高的信噪比和较小的相对误差,能有效保护图像的边缘,提高图片质量。

参考文献:

[1] 樊启斌,焦雨领. 变分正则化图像复原模型与算法综述[J]. 数学进展,2012,41(5):531-546.

[2] Tikhonov A N, Arsenin V Y. Solutions of Ill posed problems[M]. Washington,DC:Winston and Sons,1977.

[3] Rudin L I, Osher S, Fatemi E. Nonlinear total variation based noise removal algorithms[J]. Physica D-nonlinear Phenomena,1992,60(1-4):259-268.

的基础上,频繁  $k$ -项集  $C_k$  通过并行的 Map,Reduce 过程来得出下一轮的候选集  $C_{k+1}$ 。实验结果表明,与传统 Apriori 算法计算频繁项集执行时间相比,CApriori 执行速度快,明显提高了挖掘效率。

#### 参考文献:

- [1] Hipp J, Güntzer U, Nakhaeizadeh G. Algorithms for association rule mining – a general survey and comparison [J]. ACM SIGKDD Explorations Newsletter, 2000, 2(1): 58–64.
- [2] 罗丹, 李陶深. 一种基于压缩矩阵的 Apriori 算法改进研究[J]. 计算机科学, 2013, 40(12): 75–80.
- [3] Agrawal R, Shafer J C. Parallel mining of association rules [J]. IEEE Transactions on Knowledge & Data Engineering, 1996, 8(6): 962–969.
- [4] 刘鹏. 云计算[M]. 第2版. 北京: 北京工业大学出版社, 2011.
- [5] Li L, Zhang M. The strategy of mining association rule based on cloud computing [C]//International conference on business computing and global informatization. Shanghai: IEEE, 2011: 475–478.
- [6] 张圣. 一种基于云计算的关联规则 Apriori 算法[J]. 通信技术, 2011, 44(6): 141–143.
- [7] 朱安柱. 基于 Hadoop 的 Apriori 算法改进与移植的研究[D]. 武汉: 华中科技大学, 2012.
- [8] Agrawal R, Imielinski T, Swami A. Database mining: a performance perspective [J]. IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering, 1993, 5(6): 914–925.
- [9] 张震, 汪斌强, 陈庶樵, 等. 基于多维计数型布鲁姆过滤器的流检测机制[J]. 电子与信息学报, 2010, 32(7): 1608–1613.
- [10] 张建勋, 古志民, 郑超. 云计算研究进展综述[J]. 计算机应用研究, 2010, 27(2): 429–433.
- [11] 孙芬芬. 海量数据并行挖掘技术研究[D]. 北京: 北京交通大学, 2014.
- [12] 章志刚. 云计算环境下频繁项目集挖掘算法研究[D]. 南京: 南京师范大学, 2014.
- [13] 王鄂, 李铭. 云计算下的海量数据挖掘研究[J]. 现代计算机, 2009(11): 22–25.
- [14] 李玲娟, 张敏. 云计算环境下关联规则挖掘算法的研究[J]. 计算机技术与发展, 2011, 21(2): 43–46.
- [11] Chan T F, Golub G H, Mulet P. A nonlinear primal–dual method for total variation–based image restoration [J]. Siam Journal on Scientific Computing, 1996, 20(6): 1964–1977.
- [12] Chan T F, Chen K. An optimization–based multilevel algorithm for total variation image denoising [J]. Siam Journal on Multiscale Modeling & Simulation, 2006, 5(2): 615–645.
- [13] Yang J, Yin W, Zhang Y, et al. A fast algorithm for edge–preserving variational multichannel image restoration [J]. Siam Journal on Imaging Sciences, 2009, 2(2): 569–592.
- [14] Becker S, Bobin J, Candès E J. NESTA: a fast and accurate first–order method for sparse recovery [J]. Siam Journal on Imaging Sciences, 2009, 4(1): 1–39.
- [15] 王静, 吕科, 何宁, 等. 基于分裂 Bregman 方法的全变差图像去模糊[J]. 电子学报, 2012, 40(8): 1503–1508.
- [16] Xu Y, Huang T Z, Liu J, et al. An augmented Lagrangian algorithm for total bounded variation regularization based image deblurring [J]. Journal of the Franklin Institute, 2014, 351(6): 3053–3067.
- [17] Yang J, Zhang Y, Yin W. A fast TVL1–L2 minimization algorithm for signal reconstruction from partial Fourier data [R]. [s. l.]: [s. n.], 2008.

(上接第 63 页)

- [4] Vogel C R, Oman M E. Iterative methods for total variation denoising [J]. Siam Journal on Scientific Computing, 1996, 17(1): 227–238.
- [5] Chan T F, Nikolova M. Algorithms for finding global minimizers of image segmentation and denoising models [J]. Siam Journal on Applied Mathematics, 2006, 66(5): 1632–1648.
- [6] Wang Y, Yang J, Yin W, et al. A new alternating minimization algorithm for total variation image reconstruction [J]. Siam Journal on Imaging Sciences, 2008, 1(3): 248–272.
- [7] Chambolle A. An algorithm for total variation minimization and applications: special issue on mathematics and image analysis [J]. Journal of Mathematical Imaging & Vision, 2004, 20(1–2): 89–97.
- [8] Chambolle A, Lions P L. Image recovery via total variation minimization and related problems [J]. Numerische Mathematik, 1997, 76(2): 167–188.
- [9] You Y L, Kaveh M. Fourth–order partial differential equation for noise removal [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2000, 9(10): 1723–1730.
- [10] 刘鹏飞, 肖亮. 基于 Hessian 核范数正则化的快速图像复原算法[J]. 电子学报, 2015, 43(10): 2001–2008.