

# 小波变换的阈值图像去噪算法改进

张小燕, 吐尔洪江·阿布都克力木

(新疆师范大学 数学科学学院, 新疆 乌鲁木齐 830017)

**摘要:**通过分析研究发现 D. L. Donoho 提出的小波阈值去噪方法,以及文中提及的已构造出的小波阈值函数在图像去噪方面仍存在问题。为了进一步改善这些问题,综合典型的小波阈值函数的优点与一些改进方法,提出一种改进的新阈值函数。该阈值函数不仅在阈值处连续,而且含有参数,可通过调整参数来调节阈值化小波系数和原始小波系数之间的恒定偏差,同时其还具有可微性便于计算。为了突出表现构造的新阈值函数的优越性,通过仿真实验对文中提出的几种小波去噪方法的均方差(MSE)和峰值信噪比(PSNR)进行对比。实验结果表明,利用新构造的阈值函数去噪,去噪后的图像无论是视觉效果还是在均方差、峰值信噪比等的性能上都比传统的软、硬阈值和已有的阈值去噪效果好。

**关键词:**小波变换;阈值函数;图像去噪;均方差;峰值信噪比

中图分类号:TP301.6

文献标识码:A

文章编号:1673-629X(2017)03-0081-04

doi:10.3969/j.issn.1673-629X.2017.03.017

## Improvement of Threshold Image Denoising Algorithm with Wavelet Transform

ZHANG Xiao-yan, Turghunjan ABDUKIRIM TURKI

(School of Mathematical Sciences, Xinjiang Normal University, Urumqi 830017, China)

**Abstract:** There are many problems for wavelet threshold denoising method proposed by D. L. Donoho and constructed wavelet threshold function mentioned in this paper in image denoising through analysis and research. In order to improve these problems, a new improved threshold function has been presented which integrates the advantages of classical wavelet threshold function and other improved methods. This function is not only continuous at a specific threshold, but also involves parameters. Thus, constant deviation between threshold wavelet coefficients and original wavelet ones can be adjusted by regulating the parameters. Meanwhile, it is of differentiability convenient for calculations. In order to highlight the advantages of the threshold function constructed, Mean Square Errors (MES) and Peak Signal to Noise Ratios (PSNR) of several wavelet denoising methods are compared with proposed method in simulation experiment. Results of the experiment show that the images denoised with new threshold function are better than those with traditional soft and hard threshold functions and existent threshold functions, either in visual effect or performance parameters such as MES and/or PSNR.

**Key words:** wavelet transform; threshold function; image denoising; MSE; PSNR

## 0 引言

无论在科学研究或现实生活中,图像难免受噪声污染,噪声对图像处理有很大的影响,故要对图像进行后续分析,就必须对图像进行去噪。一些典型的图像去噪方法根据图像特点、图像频谱分布规律或噪声统计特性对图像进行去噪,如均值滤波、中值滤波、Wiener 线性滤波等<sup>[1]</sup>。这些滤波方法具有一定的局限性,仅在频域或仅在空间域具有局部分析的能力<sup>[2]</sup>。小波

变换是一种信号时间-尺度分析方法,具有多分辨率分析特点,其在时域和频域都具有较好的局部化特性。

1995 年, D. L. Donoho 首次提出小波阈值概念<sup>[3]</sup>,此方法在硬、软阈值函数<sup>[3-6]</sup>中得到了广泛应用,但该方法也存在一定不足。

文献[7-8]提出的两个阈值函数,虽对软、硬阈值函数进行了一定改进,但效果不是特别明显,重构后图像与原图逼近程度不是很高。

收稿日期:2016-04-22

修回日期:2016-08-03

网络出版时间:2017-02-17

基金项目:国家自然科学基金资助项目(11261061, 61362039, 10661010);新疆维吾尔自治区自然科学基金资助项目(200721104)

作者简介:张小燕(1991-),女,硕士研究生,研究方向为小波分析及其应用;吐尔洪江·阿布都克力木,博士,教授,通讯作者,研究方向为小波分析与模式识别。

网络出版地址: <http://www.cnki.net/kcms/detail/61.1450.TP.20170217.1628.026.html>

文中通过综合软、硬阈值函数和文献[7-8]中各阈值函数的优缺点,提出改进后的新的阈值函数。该阈值函数表达式简单,是已有阈值函数的推广,通过调整参数来调节阈值化小波系数和原始小波系数之间的恒定偏差,同时还具有可微性便于计算。

1 二维小波分解与重构

首先定义二维尺度函数:  $\varphi(x,y) = \varphi(x)\varphi(y)$ , 则二维小波函数为:  $\psi^1(x,y) = \varphi(x)\psi(y)$ ,  $\psi^2(x,y) = \psi(x)\varphi(y)$ ,  $\psi^3(x,y) = \psi(x)\psi(y)$ 。对  $f \in L^2(R)$ , 则任意图像  $f(x,y) \in L^2(\mathbb{R})$  在某一个  $V_j^2$  空间中(否则可用  $f(x,y)$  在  $V_j^2$  空间的投影来代替), 则有<sup>[9]</sup>:  $f(x,y) = f_{v_{j-1}} \otimes v_{j-1} + f_{v_{j-1}} \otimes w_{j-1} + f_{w_{j-1}} \otimes v_{j-1} + f_{w_{j-1}} \otimes w_{j-1}$ 。

$$f(x,y) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_{j-1}(m,n) \varphi_{j-1,m,n} + \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_{j-1}^1(m,n) \psi_{j-1,m,n}^1 + \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_{j-1}^2(m,n) \psi_{j-1,m,n}^2 + \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_{j-1}^3(m,n) \psi_{j-1,m,n}^3 \tag{1}$$

对应的二维小波分解为:

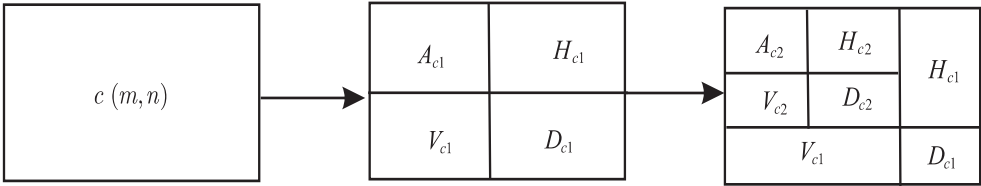


图 1 小波图像分解过程

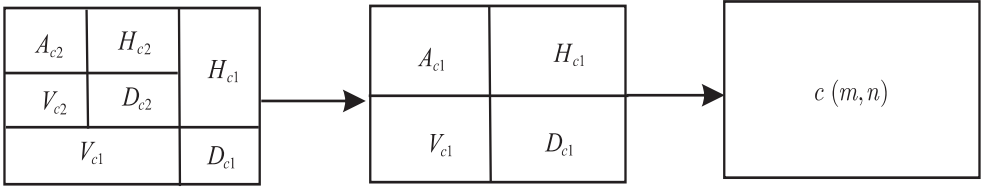


图 2 小波图像重构过程

2 小波阈值去噪

小波阈值去噪是图像去噪中具有代表性的一种方法。最早的阈值去噪方法是由 D. L. Donoho 提出的萎缩(Visu Shrink)法<sup>[4]</sup>,其方法实质是:将含噪信号通过小波变换得到相应的小波系数,而小波系数在小波域上对噪声起作用。针对信号设定一个阈值,当小波系数小于该阈值时,就认为该信号由噪声引起,不含有信息分量,故舍弃该信号;当小波系数大于该阈值时,认为该信号是由信号自身和噪声作用的结果,则将该信号直接保存下来(硬阈值方法)或按照某种固定量向零收缩(软阈值方法),用新的小波系数进行小波重构得到去噪后的数据系数。

$$\begin{aligned} c_j(m,n) &= \sum_{k,l \in \mathbb{Z}} c_{j+1}(k,l) h_{k-2m} h_{l-2n} \\ d_j^1(m,n) &= \sum_{k,l \in \mathbb{Z}} c_{j+1}(k,l) h_{k-2m} g_{l-2n} \\ d_j^2(m,n) &= \sum_{k,l \in \mathbb{Z}} c_{j+1}(k,l) g_{k-2m} h_{l-2n} \\ d_j^3(m,n) &= \sum_{k,l \in \mathbb{Z}} c_{j+1}(k,l) g_{k-2m} g_{l-2n} \end{aligned} \tag{2}$$

其中,  $\{h_k, g_k\}$  是对应于二维尺度函数和小波  $\{\varphi, \psi\}$  的滤波器并且有  $\sum h_k = \sqrt{2}$ 。

二维重构算法为:

$$\begin{aligned} c_{j+1}(m,n) &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_{k-2m} h_{l-2n} c_j(m,n) + \\ &\sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_{k-2m} g_{l-2n} d_j^1(m,n) + \\ &\sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_{k-2m} h_{l-2n} d_j^2(m,n) + \\ &\sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_{k-2m} g_{l-2n} d_j^3(m,n) \end{aligned} \tag{3}$$

对一幅二维图像进行二维小波变换,可将它分解到各层各个分辨率上的近似分量(如  $A_{cl}$ ),水平方向细节分量(如  $H_{cl}$ ),垂直方向细节分量(如  $V_{cl}$ ),对角线方向细节分量(如  $D_{cl}$ )。二层小波图像分解<sup>[10]</sup>和重构过程分别如图 1 和图 2 所示。

设一个大小为  $m \times n$  的数字图像  $F(i,j)$ ,在图像上加一个服从  $(0, \delta^2)$  的高斯白噪声  $\varepsilon(i,j)$ ,  $f(i,j)$  表示从  $F(i,j)$  中恢复的原始图像:

$$F(i,j) = f(i,j) + \varepsilon(i,j), \quad i = 0, 1, \dots, m-1, j = 0, 1, \dots, n-1 \tag{4}$$

小波阈值去噪一般分为三步<sup>[11]</sup>:

- (1) 对带噪信号进行小波变换,得到相应小波系数  $F_{j,k}$ ;
- (2) 对  $F_{j,k}$  进行阈值化处理,可以得出估计小波系数  $\tilde{F}_{j,k}$ ,使得  $\|\tilde{F}_{j,k} - f_{j,k}\|$  尽量小( $f_{j,k}$  为实际信号的小波系数);
- (3) 将得到的小波系数  $\tilde{F}_{j,k}$  进行重构,得到估计信号即去噪后的信号。

其中,小波阈值去噪方法的关键是阈值选取和阈值量化处理。选取正确、合理的阈值和量化方法,才能保证在滤除噪声小波系数的同时尽可能保留原图像小波系数,故阈值的选取和阈值量化处理直接关系去噪后的图像质量。

文中所提阈值函数有硬阈值函数、软阈值函数、软硬阈值折中阈值和已改进阈值函数。

硬阈值函数:

$$\tilde{d}_{j,k} = \begin{cases} d_{j,k}, & |d_{j,k}| \geq \lambda \\ 0, & |d_{j,k}| < \lambda \end{cases} \quad (5)$$

软阈值函数:

$$\tilde{d}_{j,k} = \begin{cases} \text{sgn}(d_{j,k}) (|d_{j,k}| - \lambda), & |d_{j,k}| \geq \lambda \\ 0, & |d_{j,k}| < \lambda \end{cases} \quad (6)$$

软硬阈值折中阈值函数<sup>[5]</sup>:

$$\tilde{d}_{j,k} = \begin{cases} \text{sgn}(d_{j,k}) (|d_{j,k}| - 0.5\lambda), & |d_{j,k}| \geq \lambda \\ 0, & |d_{j,k}| < 0 \end{cases} \quad (7)$$

已有的改进阈值函数<sup>[6]</sup>:

$$\tilde{d}_{j,k} = \begin{cases} d_{j,k} \left(1 - \left|\frac{\lambda}{d_{j,k}}\right|^m\right), & |d_{j,k}| \geq \lambda \\ 0, & |d_{j,k}| < 0 \end{cases} \quad (8)$$

其中,  $d_{j,k}$  为小波分解系数;  $\tilde{d}_{j,k}$  为估计出的小波系数;  $\text{sgn}(\cdot)$  为符号函数;  $\lambda$  为阈值,其选取方法有多种(常用 Donoho 和 Johnstone 提出的统一阈值<sup>[2]</sup>),取  $\lambda = \sigma \sqrt{2\ln N}$ ,  $\sigma$  为噪声标准差,  $N$  为信号长度,由于在现实中噪声的标准差无法获取,故在实验中取  $\sigma = \text{median}(|d_{i,j}|)/0.6745$ ;  $m$  为可调参数。

### 3 进一步改进的阈值函数

针对上述阈值可知,硬阈值函数估计的小波系数在  $\pm\lambda$  处不连续,但其与真实小波系数无偏差;软阈值函数在小波空间域连续,但其估计出的小波系数与真实的小波系数之间存在恒定偏差,该偏差将影响小波重构,导致小波重构精度降低<sup>[12]</sup>;改进阈值函数相比于传统阈值函数克服了它们的一些缺点,但仍存在一定的局限性,对图像噪声的处理存在一定的依赖性,图像能量的分布不够均匀,在图像去噪中要使图像去噪和边缘保留达到相应的平衡,若一味寻求图像去噪效果,势必在边缘存在一定模糊。理想小波阈值去噪方法<sup>[13-14]</sup>:小波进行去噪时既要使小波系数的偏差尽可能小,又要使小波系数在小波空间连续,还具有高阶导数。依据这种要求,构造了新的的小波阈值函数,在一定条件下可以克服这种不足,从而达到较好的去噪效果。

新的阈值函数为:

$$\tilde{d}_{j,k} = \text{万方数据}$$

$$\begin{cases} \text{sgn}(d_{j,k}) \left( |d_{j,k}| \cdot \left(1 - \left|\frac{a\lambda}{d_{j,k}}\right|^b\right) \right), & |d_{j,k}| \geq \lambda \\ 0, & |d_{j,k}| < 0 \end{cases} \quad (9)$$

其中,  $a$  和  $b$  为可调参数。

考察函数

$$f(x) = \text{sgn}(x) \left( |x| \cdot \left(1 - \left|\frac{a\lambda}{x}\right|^b\right) \right) \quad (10)$$

当  $x > 0$  时,有:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \cdot \left(1 - \left|\frac{a\lambda}{x}\right|^b\right)}{x} = 1 \quad (11)$$

当  $x < 0$  时,有:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-(-x) \cdot \left(1 - \left|\frac{a\lambda}{x}\right|^b\right)}{x} = 1 \quad (12)$$

同时

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow \infty} \text{sgn}(x) \left( |x| - \left|\frac{a\lambda}{x}\right|^b \right) - x = 0 \quad (13)$$

根据式(11)~(13)可知,函数  $f(x)$  逼近函数  $g(x) = x$ ,定义阈值函数估计值为  $\tilde{d}_{j,k}$ ,则  $d_{j,k}$  逼近值为  $\tilde{d}_{j,k}$ 。当  $\tilde{d}_{j,k}$  增大时,  $\tilde{d}_{j,k}$  与  $d_{j,k}$  之间的偏差会逐渐减小,通过该方法可以克服软阈值函数的固定偏差问题。

当  $a = 1$  时,有:

$$\lim_{|x| \rightarrow \lambda} \frac{f(x)}{x} = \lim_{|x| \rightarrow \lambda} \frac{|x| \cdot \left(1 - \left|\frac{a\lambda}{x}\right|^b\right)}{|x|} = 0 \quad (14)$$

根据改进的阈值函数可知,当  $a = 0$  或者  $b = \infty$  时,改进的阈值函数为硬阈值函数;当  $a = 1$  且  $b = 1$  时,改进的阈值函数为软阈值函数。由此可见,改进的新阈值函数介于软、硬阈值之间。由于新阈值函数具有光滑性,能更接近信号和噪声的小波系数的物理本质,从而在对图像进行去噪处理时,去噪效果比软、硬阈值要好。

除此之外,改进的阈值函数不但连续,且当  $|d_{j,k}| \geq \lambda$  时高阶可导,故更有利于对其进行相关的数学处理,建立相应的数学模型。

### 4 仿真实验与分析

为了突出新的阈值函数在图像去噪中所表现出的优越性和有效性,分别对传统的软、硬阈值函数,折中阈值及改进的和新的阈值函数进行数字图像的去噪对比实验。

采用的小波是 db5 与 db3,分解层为 3 层,其中参数 ( $b = 1, b = 2, b = 3$ )。实验采用的是标准 Lena 图,加入 Gaussian 噪声,测试结果见表 1 和表 2。

由图 3 可看出,利用文中算法去噪的图像具有较

好的视觉效果。通过表 1 和表 2 中的数据,也可以看出文中算法去噪效果具有明显优越性。

表 1 测试结果 (Lena(db5))

Lena( db5)	MSE	PSNR
加噪图像	618.359 6	20.218 4
硬阈值	119.192 4	27.368 3
软阈值	147.267 5	26.449 7
折中阈值	112.542 5	27.617 9
改进阈值( $b=1$ )	132.025 5	26.924 2
新阈值( $b=1$ )	107.801 4	27.804 6
改进阈值( $b=2$ )	106.971 7	27.838 1
新阈值( $b=2$ )	106.894 3	27.841 3
改进阈值( $b=3$ )	107.059 6	27.834 5
新阈值( $b=3$ )	107.042 2	27.835 3

表 2 测试结果 (Lena(db3))

Lena( db3)	MSE	PSNR
加噪图像	618.359 6	20.218 4
硬阈值	123.803 5	27.203 5
软阈值	152.353 5	26.302 3
折中阈值	120.037 7	27.337 6
改进阈值( $b=1$ )	139.276 0	26.692 0
新阈值( $b=1$ )	115.411 8	27.508 3
改进阈值( $b=2$ )	114.129 3	27.556 8
新阈值( $b=2$ )	114.068 2	27.559 2
改进阈值( $b=3$ )	113.924 8	27.564 6
新阈值( $b=3$ )	113.900 6	27.565 5

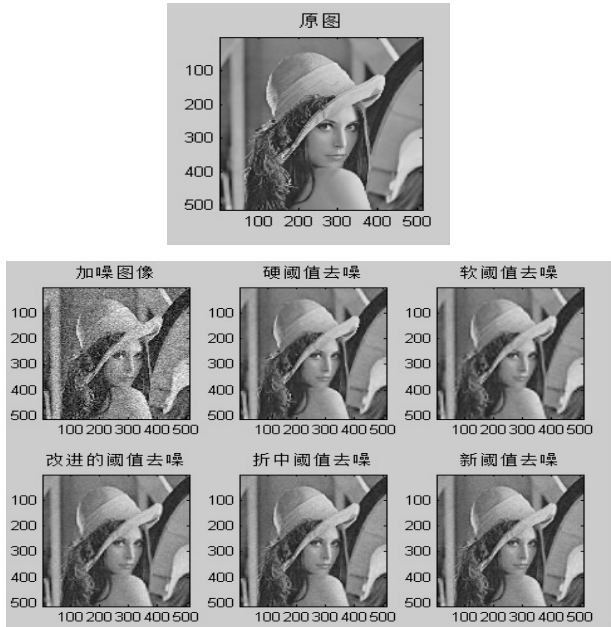


图 3 五种不同算法对 Lena 图像去噪结果比较

5 结束语

传统的软、硬阈值和文献[7-8]提出的两个阈值函数,无法有效地表达能量分布,需要在去噪和保留边缘信息中寻求平衡。文中提出的改进阈值函数克服了已有阈值函数图像去噪时有偏差,去噪后图像模糊或纹理不够清晰或边缘模糊的缺点,同时还具有能量自适应性。通过仿真实验表明,该方法对图像进行处理后得到较小的均方误差并且在一定程度上可得到较好的图像细节,其与传统的阈值函数以及改进阈值函数相比无论在视觉效果还是在去噪后图像的信噪比上都有明显提高。

参考文献:

[1] 高展宏,徐文波. 基于 MATLAB 的图像处理案例教程[M]. 北京:清华大学出版社,2011:107-154.

[2] 唐远炎,王 玲. 小波分析与文本文字识别[M]. 北京:科学出版社,2004.

[3] 吐尔洪江·阿布都克力木. 小波信号处理基础[M]. 北京:北京邮电大学出版社,2014.

[4] Donoho D L. De-noising by soft thresholding[J]. IEEE Transactions on Information Theory,1995,41(3):613-627.

[5] Donoho D L,Johnstone J M. Ideal spatial via wavelet shrinkage[J]. Biometrika,1994,81:425-455.

[6] Donoho D L,Johnstone I M. Adapting to unknown smoothness via wavelet shrinkage[J]. Journal of the American Statistical Association,1995,90(432):1200-1224.

[7] 周 静,陈允平,周 策,等. 小波系数软硬阈值折中方法在故障定位消噪中的应用[J]. 电力系统自动化,2005,29(1):65-68.

[8] 李庆武,陈小刚. 小波阈值去噪的一种改进方法[J]. 光学技术,2006,32(6):831-833.

[9] Nowak R D,Baraniuk R G. Wavelet-domain filter for photon imaging system[J]. IEEE Transactions on IP,1999,8(5):667-675.

[10] 杨 静,吴成茂,屈汉章. 基于多参数小波阈值函数的图像去噪[J]. 计算机工程与应用,2012,48(13):176-180.

[11] 成礼智,王红霞. 小波的理论与应用[M]. 北京:科学出版社,2004:45-70.

[12] 吴志寒. 基于小波变换在图像去噪中应用[J]. 华东交通大学学报,2007,24(1):85-88.

[13] 秦襄培,郑贤中. MATLAB 图像处理宝典[M]. 北京:电子工业出版社,2011:68-90.

[14] 叶重元,黄永东. 小波阈值去噪算法的新改进[J]. 计算机工程与应用,2011,47(12):141-145.