

# B 超医学图像去噪模型的快速算法研究

常璐璐, 张化朋

(南京邮电大学 理学院, 江苏 南京 210023)

**摘要:** 数字图像处理技术在人们的现实生活中具有广泛的应用。深入研究基于变分偏微分方程的 B 超医学图像的噪声去除问题, 既能丰富医学图像的处理方法, 促进人们对图像的深入理解, 又能为基于超声医学图像的诊断治疗提供帮助。针对 B 超医学图像中斑点噪声的去除问题, 根据 Jin 等对去除超声图像中的乘性噪声变分模型进行的研究, 结合该变分模型解的框式制约和 Split Bregman 算法, 提出了针对 B 超医学图像中斑点噪声变分模型的快速数值求解算法, 并且分析了所提算法的收敛性。对测试图像进行了数值仿真实验, 并将文中提出的新方法与现有的算法进行了比较。实验结果表明, 采用文中算法是可行有效的, 能够在去除 B 超医学图像中斑点噪声的同时极大地缩短运算的时间。

**关键词:** 图像处理; B 超医学图像; 斑点噪声; Split Bregman 算法

**中图分类号:** TN911.73

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1673-629X(2017)03-0057-04

**doi:** 10.3969/j.issn.1673-629X.2017.03.012

## Investigation on Fast Algorithm for B Ultrasonic Medical Image Denoising Model

CHANG Lu-lu, ZHANG Hua-peng

(School of Science, Nanjing University of Posts and Telecommunications,  
Nanjing 210023, China)

**Abstract:** Digital image processing technology has a wide range of applications in real life. B ultrasound medical image denoising problem is deeply studied based on variation and partial differential equation, which can not only make the method of medical image processing be rich, promotion of the deep understanding of the ultrasound image, but also be helpful for the diagnosis and treatment based on ultrasound image. For speckle noise removal problem of B ultrasound medical image, according to the study on the variational model of multiplicative noise in ultrasound images by Jin et al, combination of the frame type constraints of the model solution and the Split Bregman algorithm, a fast numerical algorithm is proposed for the variational model of removing the speckle noise in B ultrasound medical image, and its convergence is analyzed. The numerical simulation is carried out on the test image, and the new method is compared with the existing algorithm. The experimental results show that the algorithm proposed is feasible and effective, and the speckle noise in the B ultrasound medical image is removed and the computation time is greatly reduced.

**Key words:** image processing; B ultrasound medical image; speckle noise; Split Bregman algorithm

## 0 引言

超声 (UltraSound, US)、机断层扫描成像 (Computer Tomography, CT)、核磁共振成像 (Magnetic Resonance Imaging, MRI) 等医学图像在临床诊断和治疗中得到了非常成功的应用。然而, 由于超声成像设备的局限性以及受到各种外界因素的限制, 使得 B 超医学图像容易被干扰, 出现含有斑点噪声等问题。虽然有经验的医师凭借专业知识可以辨别图像中的病灶, 但是斑点噪声的存在影响了医师对病灶严重程度等细

节信息的判断。对 B 超医学图像去噪, 增加视觉效果, 既能辅助医生对病人进行精确诊断和治疗, 又能满足人们希望更加直观形象地了解病情严重程度的迫切需求, 为医患沟通搭建桥梁, 减轻病人焦虑。

Rudin 等以及 Lysaker 等分别提出了二阶 ROF 模型<sup>[1]</sup>以及四阶 LLT 模型<sup>[2]</sup>去除加性高斯噪声。不同于经典的加性高斯噪声, 斑点噪声可以用乘性噪声模型<sup>[3]</sup>进行描述。用变分法去除乘性噪声的思想最早由 Rudin, Lions 和 Osher 提出。然而斑点噪声图像中大

收稿日期: 2016-05-16

修回日期: 2016-09-08

网络出版时间: 2017-02-17

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11301281)

作者简介: 常璐璐 (1991-), 女, 硕士研究生, 研究方向为图像处理建模及快速优化算法; 张化朋, 副教授, 硕士生导师, 研究方向为模糊泛函分析。

网络出版地址: <http://www.cnki.net/kcms/detail/61.1450.TP.20170217.1634.084.html>

多数情况下并不服从高斯分布,此时 RLO 模型<sup>[4]</sup>并不适用,而且还需考虑 B 超中压缩变换对 B 超图像的影响。临床用的 B 超图像在经过压缩算法后,图像的灰度特征产生了很大变化,一种压缩后的 B 超图像模型<sup>[5-6]</sup>被广泛应用于 B 超图像的描述中。针对 B 超图像模型, Krissian 等<sup>[7]</sup>改进了保真约束项,随后 Jin 等<sup>[8]</sup>在其基础上,研究了去除 B 超图像斑点噪声的模型,并给出了该模型解在 BV 空间的存在唯一性等理论分析,但文中运用的梯度下降法求解速度缓慢且要求  $u > 0$  以保证该模型为凸模型。

在 Jin 等提出的 B 超医学图像去噪模型基础上,文中给出与之等价的带框式制约的凸变分去噪模型。然后依据解的上下界估计作为框式制约并结合 Split Bregman 算法,提出对应的快速算法 (Box Constrains Split Bregman, BCSB), 并给出该算法的收敛性结果。利用数值仿真实验验证了该算法的可行性及有效性。

## 1 模型介绍

Rudin 等提出针对乘性噪声的去噪模型为:

$$\min_u \left\{ \int_{\Omega} |Du| + \lambda_1 \int_{\Omega} \frac{f}{u} + \lambda_2 \int_{\Omega} \left( \frac{f}{u} - 1 \right)^2 \right\} \quad (1)$$

其中,  $\lambda_1, \lambda_2$  为权重系数,称它为 RLO 模型。

Krissian 等提出新的保真项模型来处理 B 超医学图像:

$$E_1(u) = \int_{\Omega} \frac{(u-f)^2}{u} \quad (2)$$

Jin 等结合 ROF 模型以及式(2)的保真项,提出如下模型:

$$\min_u \left\{ \int_{\Omega} |Du| + \lambda \int_{\Omega} \frac{(f-u)^2}{u} \right\} \quad (3)$$

其中,  $u \in \text{BV}(\Omega), u > 0; f(x) \in L^{\infty}(\Omega)$  是给定的;  $\lambda > 0$  为权重参数。

Jin 等给出了该模型解在 BV 空间的存在唯一性等理论分析,但文中运用的梯度下降法求解速度比较缓慢且有  $u > 0$  的硬性要求,有:

$$E(u) = \min_u \left\{ \int_{\Omega} |Du| + \lambda \int_{\Omega} \frac{(f-u)^2}{u} \right\} \quad (4)$$

Jin 等已经给出模型(4)的解的存在唯一性定理,如下:

定理 1:假设在模型(见式(4))中  $f(x) \in L^{\infty}(\Omega)$ , 并且  $\inf_{\Omega} f(x) > 0$ , 那么该变分问题存在唯一的解  $u \in \{u | u \in \text{BV}(\Omega), u > 0\}$ , 满足:

$$\inf_{\Omega} f(x) \leq u(x) \leq \sup_{\Omega} f(x) \quad (5)$$

其中,  $\alpha = \inf_{\Omega} f(x), \beta = \sup_{\Omega} f(x)$ 。

根据定理 1, 可以将式(4)写成如下的等价形式:

$$\min_{u \in \text{BV}(\Omega)} \int_{\Omega} |Du| + \lambda \int_{\Omega} \frac{(f-u)^2}{u} dx \quad (6)$$

满足:

$$\alpha \leq u(x) \leq \beta \quad (7)$$

由于当  $u > 0$  时,式(4)为凸模型。因此当式(6)满足式(7)的约束条件时也为凸模型。

接下来,结合 Split Bregman 算法,给出求解上述医学 B 超图像凸模型(式(6)、(7))的数值解法,称为 BCSB 算法,然后给出新算法的收敛性定理结果。

## 2 算法改进及其收敛性结果

SplitBregman 算法<sup>[9]</sup>是解决能量泛函极小化问题的一种快速算法,可以灵活处理各种噪声问题。其基本思想是,首先采用算子分裂方法,然后运用 Bregman 迭代解决分裂问题,将繁复的求解问题转变成解决数个容易的子问题。文中结合 Split Bregman 算法以及解的框式制约条件,给出新模型对应的 BCSB 算法:

$$\min_{\vec{d}, z, u} \int_{\Omega} |\vec{d}| dx + \lambda \int_{\Omega} \frac{(f-z)^2}{z} dx \quad (8)$$

$$\text{s. t. } \vec{d} = Du, z = u, \alpha \leq z \leq \beta$$

每次迭代中调用下面的问题解决方案:

$$\min_{\vec{d}, z, u} \int_{\Omega} |\vec{d}| dx + \lambda \int_{\Omega} \frac{(f-z)^2}{z} dx + \frac{\gamma_1}{2} \|\vec{d} - Du - \vec{b}_1\|_2^2 + \frac{\gamma_2}{2} \|z - u - b_2\|_2^2 \quad (9)$$

新增加的两项为二次惩罚项,  $\vec{b}_1$  和  $b_2$  为变量。固定  $z$  和  $u$  最小化  $\vec{d}$ , 然后固定  $\vec{d}$  和  $u$  最小化  $z$ , 以此类推。形成三个子问题。

(1)  $\vec{d}$  的子问题, 固定  $z$  和  $u$ , 如下:

$$\min_{\vec{d}} \int_{\Omega} |\vec{d}| dx + \frac{\gamma_1}{2} \|\vec{d} - Du - \vec{b}_1\|_2^2 \quad (10)$$

利用 Shrink 算子<sup>[10]</sup>, 得到:

$$\vec{d}^{k+1}(x) = \frac{Du^k(x) + \vec{b}_1^k(x)}{|Du^k(x) + \vec{b}_1^k(x)|} \cdot \max \left\{ |Du^k(x) + \vec{b}_1^k(x)| - \frac{1}{\gamma_1}, 0 \right\} \quad (11)$$

(2)  $z$  的子问题, 固定  $\vec{d}$  和  $u$ , 如下:

$$\min_z \int_{\Omega} \frac{(f-z)^2}{z} dx + \frac{\gamma_2}{2} \|z - u - b_2\|_2^2 \quad (12)$$

那么  $z$  满足:

$$z^3 + \left( \frac{\lambda}{\gamma_2} - u - b_2 \right) z^2 - \frac{\lambda}{\gamma_2} f^2 = 0 \quad (13)$$

求解该一元三次方程, 采用卡尔丹公式法得出:

$$z^{k+\frac{1}{3}}(x) = \left[ -\frac{q^k}{2} + \left( \left( \frac{q^k}{2} \right)^2 + \left( \frac{p^k}{3} \right)^3 \right)^{\frac{1}{3}} \right]^{\frac{1}{3}} + \left[ -\frac{q^k}{2} - \left( \left( \frac{q^k}{2} \right)^2 + \left( \frac{p^k}{3} \right)^3 \right)^{\frac{1}{3}} \right]^{\frac{1}{3}} - \frac{s^k}{3} \quad (14)$$

其中,  $p^k = -\frac{(s^k)^2}{3}$ ;  $q^k = \frac{2(s^k)^3}{27} - \frac{\lambda f^2}{\gamma_2}$ ;  $s^k = -b_2^k + \frac{\lambda}{\gamma_2} - u^k$ 。且  $z^{k+1}(x) = P_{[\alpha, \beta]}(z^{k+\frac{1}{2}})$ , 其中  $P_{[\alpha, \beta]}(z^{k+\frac{1}{2}}) = \max\{\min P_{[\alpha, \beta]}(z^{k+\frac{1}{2}}, \beta), \alpha\}$ 。

(3)  $u$  的子问题, 固定  $\vec{d}$  和  $z$ , 如下:

$$\min_u \frac{\gamma_1}{2} \|\vec{d} - Du - \vec{b}_1\|_2^2 + \frac{\gamma_2}{2} \|z - u - b_2\|_2^2 \quad (15)$$

那么  $u$  满足:

$$\frac{\gamma_2}{\gamma_1} u - \Delta u = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} (z - b_2) - \operatorname{div}(\vec{d} - \vec{b}_1) \quad (16)$$

采用快速 Fourier 变换求出  $u$ :

$$\hat{u}^{k+1} = \frac{\frac{\gamma_2}{\gamma_1} (z^{k+1} - b_2)^\wedge - (\operatorname{div}(\vec{d}^{k+1} - \vec{b}_1^k))^\wedge}{\frac{\gamma_2}{\gamma_1} - \hat{\Delta}} \quad (17)$$

其中, “ $\wedge$ ”表示 Fourier 变换。

BCSB 算法迭代终止条件为  $\frac{\|u^{k+1} - u^k\|}{\|u^k\|} < \operatorname{tol}$ ,

文中  $\operatorname{tol} = 10^{-3}$ 。

该算法求解模型的迭代步骤为:

步骤 1: 初始化  $u = z = b_2 = k = 0, \vec{d} = \vec{b}_1 = 0$ 。

步骤 2: 重复如下迭代过程:

$$(1) \vec{d}^{k+1}(x) = \frac{Du^k(x) + \vec{b}_1^k(x)}{|Du^k(x) + \vec{b}_1^k(x)|}$$

$$\max\left\{|Du^k(x) + \vec{b}_1^k(x)| - \frac{1}{\gamma_1}, 0\right\}。$$

$$(2) z^{k+1}(x) =$$

$$P_{[\alpha, \beta]} \left[ -\frac{q^{k+1}}{2} + \left( \left( \frac{q^{k+1}}{2} \right)^2 + \left( \frac{p^{k+1}}{3} \right)^3 \right)^{\frac{1}{3}} \right]^{\frac{1}{3}} + \left[ -\frac{q^{k+1}}{2} - \left( \left( \frac{q^{k+1}}{2} \right)^2 + \left( \frac{p^{k+1}}{3} \right)^3 \right)^{\frac{1}{3}} \right]^{\frac{1}{3}} - \frac{s^{k+1}}{3}。$$

其中,  $p^{k+1} = -\frac{(s^{k+1})^2}{3}, q^{k+1} = \frac{2(s^{k+1})^3}{27} - \frac{\lambda f^2}{\gamma_2}, s^{k+1} = -b_2^k + \frac{\lambda}{\gamma_2} - u^k,$

$$P_{[\alpha, \beta]}(t) = \max\{\min(t, \beta), \alpha\}。$$

$$(3) \hat{u}^{k+1} = \frac{\frac{\gamma_2}{\gamma_1} (z^{k+1} - b_2)^\wedge - (\operatorname{div}(\vec{d}^{k+1} - \vec{b}_1^k))^\wedge}{\frac{\gamma_2}{\gamma_1} - \hat{\Delta}}。$$

$$(4) \vec{b}_1^{k+1} = \vec{b}_1^k + Du - \vec{d}。$$

$$(5) b_2^{k+1} = b_2^k + u - z。$$

$$(6) k = k + 1。$$

步骤 3: 当满足迭代终止条件时, 迭代终止, 得出模型的解  $u$ 。

根据图 1 所示数据<sup>[11]</sup>给出的 Split Bregman 算法的收

敛性定理分析理论, 文中的新算法 BCSB 与带约束的 Split Bregman 算法<sup>[12]</sup>的收敛性证明方法类似, 不再重复赘述, 直接给出其收敛性结果。

定理 2: 当  $k \rightarrow \infty$  时,  $\|\vec{d}^k - D(u^k)\| \rightarrow 0, \|z^k - u^k\| \rightarrow 0, \|u^k - u^*\| \rightarrow 0$ , 式(10)~(17)的解  $u^k$  收敛于极小化问题式(8)的解  $u^*$ 。

### 3 数值实验及结果分析

为了对文中算法去除 B 超医学图像的效果进行检验, 引入了定量指标 PSNR 以及 MSE。定义分别为:

$$\text{PSNR} = 10 \lg \left( \frac{\max(u_0)^2}{\text{MSE}} \right) \quad (18)$$

$$\text{MSE} = \frac{\sum_{\Omega} (u - u_0)^2}{MN}$$

其中,  $u_0$  为原始图像;  $u$  为去噪后图像;  $M$  和  $N$  为图像尺寸。

PSNR 值越大, MSE 值越小, 表明去噪方法越有效。实验所用算法的迭代终止条件为  $\frac{\|u^{k+1} - u^k\|}{\|u^k\|} < \operatorname{tol}$ ,  $\operatorname{tol}$  是用来控制迭代停止的参数, 取  $\operatorname{tol} = 10^{-3}$ 。

对图 1 添加标准差为 4 的噪声, 使之成为噪声图像, 然后用文中算法进行去噪, 并且分别与梯度下降法、ADMM 算法<sup>[13-14]</sup>、Split Bregman 算法进行比较。仿真时选取的参数如下:  $\lambda = 2, \gamma_1 = 3, \gamma_2 = 8$ 。



图 1 四种算法去噪后的效果比较

从图 1 可以看出, 文中算法的去噪效果更好, 既能有效去除噪声, 又能尽可能多地保留原始清晰图像的纹理细节特征。

表 1 列出了分别用梯度下降法、ADMM 算法、Split Bregman 算法进行去噪后对应的 PSNR 值、MSE

值以及各自的计算速度。

表 1 四种算法的实验比较

算法	PSNR	MSE	迭代次数	运行时间/s
梯度下降法	24.652 7	0.003 4	587	9.89
ADMM 算法	25.433 8	0.002 9	46	2.01
Split Bregman 算法	25.246 2	0.003 0	38	1.79
文中算法	25.695 2	0.002 7	20	0.96

表 1 相当客观地说明了文中算法的优势,其 PSNR 值均高于其他三种算法,而 MSE 值均低于其他三种算法。文中算法添加的框式制约保证了其收敛性,故相对于其他三种算法迭代次数更少且运行时间更快。

接下来对用上述四种方法去除真实 B 超图像之中斑点噪声的效果进行比较,结果如图 2 所示。

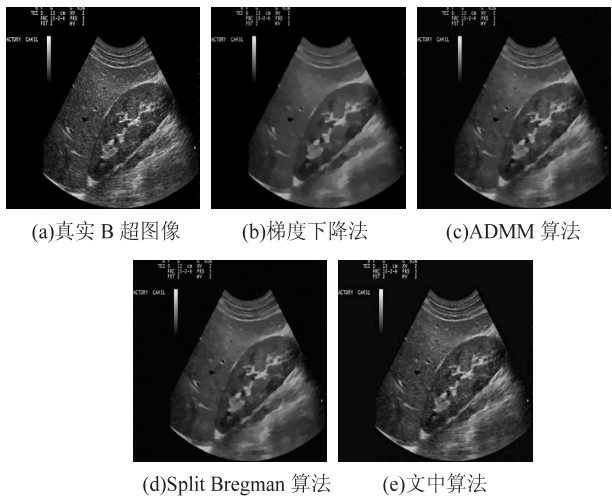


图 2 四种算法去除真实 B 超图像噪声效果比较

从图 2 可以看出,文中算法能有效去除真实 B 超图像中的斑点噪声。相对于其他三种算法,文中算法更能够在去除噪声的同时保持 B 超图像的纹理细节信息。

4 结束语

针对 B 超医学图像中乘性斑点噪声的去噪问题,在 Jin 等模型的基础上,结合该模型解的框式制约以及 Split Bregman 算法,提出了 B 超图像去噪变分模型的快速数值求解算法。对模拟图像以及真实的 B 超医学图像进行了数值实验。结果表明,文中算法是可行有效的。与其他现有算法相比,不仅能够有效地去除斑点噪声,而且图像去噪速率也更加快速。

参考文献:

[1] Rudin L, Osher S, Fatemi E. Nonlinear total variation based noise removal algorithms[J]. Physica D Nonlinear Phenomena, 1992, 60(1-4): 259-268.

[2] Lysaker M, Lundervold A, Tai X C. Noise removal using fourth-order partial differential equation with application to medical magnetic resonance images in space and time[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2003, 12(12): 1579-1590.

[3] Tur M, Chin K C, Goodman J W. When is speckle noise multiplicative? [J]. Applied Optics, 1982, 21(7): 1157-1159.

[4] Rudin L, Lions P L, Osher S. Multiplicative denoising and deblurring: theory and algorithms[M]//Geometric level sets in imaging, vision and graphics. Berlin: Springer, 2003: 103-119.

[5] Loupas T, Mcicken W N, Allan P L. An adaptive weighted median filter for speckle suppression in medical ultrasonic images[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems, 1989, 36(1): 129-135.

[6] Hao X H, Gao S K, Gao X R. A novel multiscale nonlinear thresholding method for ultrasonic speckle suppressing[J]. IEEE Transactions on Medical Imaging, 1999, 18(9): 787-794.

[7] Krissian K, Kikinis R, Westin C F, et al. Speckle constrained filtering of ultrasound images [C]//IEEE conference on computer vision and pattern recognition. [s. l.]: IEEE, 2005: 547-552.

[8] Jin Zhengmeng, Yang Xiaoping. A variational model to remove the multiplicative noise in ultrasound images[J]. Journal of Mathematical Imaging and Vision, 2011, 39(1): 62-74.

[9] Goldstein T, Osher S. The Split Bregman method for L1 regularized problems[J]. Siam Journal on Imaging Sciences, 2009, 2(2): 323-343.

[10] Goldstein T, Bresson X, Osher S. Geometric applications of the Split Bregman method: segmentation and surface reconstruction[J]. Journal of Scientific Computing, 2010, 45(1): 272-293.

[11] Osher S, Burger M, Goldfarb D, et al. An iterative regularization method for total variation-based image restoration[J]. Siam Journal on Multiscale Modeling & Simulation, 2005, 4(2): 460-489.

[12] Shi B, Pang Z F, Wu J. Alternating split bregman method for the bilaterally constrained image deblurring problem[J]. Applied Mathematics and Computation, 2015, 250: 402-414.

[13] Gabay D, Mercier B. A dual algorithm for the solution of nonlinear variational problems via finite element approximations[J]. Computers and Mathematics with Applications, 1976, 2(1): 17-40.

[14] Boyd S, Parikh N, Chu E, et al. Distributed optimization and statistical learning via the alternating direction method of multipliers[J]. Foundations and Trends in Machine Learning, 2010, 3(1): 1-122.