

# 压缩感知中基于快速不动点迭代算法的研究

刘 艳, 宋欢欢, 李 雷

(南京邮电大学 非结构化数据计算理论与应用研究中心, 江苏 南京 210046)

**摘 要:**针对传统迭代算法在解决大规模问题时速度较慢的问题,在介绍了压缩感知中重构的基本模型以及传统不动点迭代方法(FPC)的基础上,提出了一种新的重构算法-快速不动点迭代方法(FFPC)。传统的不动点迭代方法其实是基于算子分裂的方法。为了提高去重构性能,通过引入软阈值和正则化参数的双收缩,逐步迭代恢复原始图像信号,以加快算法的收敛速度,减小重构误差,从而改善图像的重构质量。仿真结果表明,在相同的实验环境下,与传统的不动点迭代算法以及其他算法相比,快速不动点迭代算法重构图像的峰值信噪比较高,相对误差较小,在低采样率下运行时间较少,性能最优。

**关键词:**压缩感知;图像重构;传统不动点迭代算法;快速不动点迭代算法;收敛速度;重构质量

中图分类号:TP301.6

文献标识码:A

文章编号:1673-629X(2017)03-0052-05

doi:10.3969/j.issn.1673-629X.2017.03.011

## Research on Iteration Algorithm Based on a Fast Fixed Point in Compressed Sensing

LIU Yan, SONG Huan-huan, LI Lei

(Unstructured Data Calculation Theory and Application Research Center, Nanjing University of Posts and Telecommunications, Nanjing 210046, China)

**Abstract:** Due to the low convergence rate of traditional iterative methods for solving large-scale problems, a fast fixed point continuation method is proposed after introducing the reconstructed models and the traditional fixed point continuation methods. This method, which brings in soft threshold shrinkage and regularization parameter shrinkage, restores image signals by gradual iteration in order to speed up the convergence rate and improve the quality of restored images. Simulation results show that compared with traditional fixed point continuation methods, it makes Peak Signal to Noise Ratio (PSNR) of the reconstructed image higher and the relative error smaller, and reduces running time when the sampling rate is low.

**Key words:** Compressed Sensing (CS); image reconstruction; fixed point continuation method; fast fixed point continuation method; convergence speed; quality of reconstructed

### 1 概 述

压缩感知<sup>[1]</sup>理论指出:对可压缩的信号可通过远低于 Nyquist 标准的方式对数据进行测量,仍能够精确地恢复出原始信号。压缩感知理论的基本原则和目标就是从较少的相对不完整的测量值  $\mathbf{b} = \mathbf{Ax}$  中恢复出  $K$  稀疏的信号  $\mathbf{x} \in R^n$ 。理论上,恢复信号  $\mathbf{x}$  最简单的方法,是求解下面的  $l_0$  范数最小化问题

$$\begin{cases} \min & \|\mathbf{x}\|_0 \\ \text{s. t.} & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \end{cases} \quad (1)$$

其中,  $\|\mathbf{x}\|_0$  表示  $\mathbf{x}$  中非零元素的个数。

但是  $l_0$  范数模型(1)是 NP 难题<sup>[2]</sup>,在实践上不可行。因此, Candes 等<sup>[3-5]</sup>、Donoho 等<sup>[6]</sup>指出,在一定条件下,问题的解  $\mathbf{x} \in R^n$  通过解式(2)获得:

$$\min_{\mathbf{x} \in R^n} \|\mathbf{x}\|_1 \quad \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad (2)$$

详细信息见文献[3,7-16]。

优化算法通过解问题(2)或者与其相近的  $l_1$  范数最小二乘问题来找到问题(1)的解。

收稿日期:2016-04-21

修回日期:2016-08-11

网络出版时间:2017-02-17

基金项目:国家自然科学基金资助项目(61070234,61071167,61373137,61501251);江苏省普通高校研究生科研创新计划资助项目(KYZZ15\_0236);南京邮电大学引进人才科研启动基金资助项目(214191)

作者简介:刘 艳(1991-),女,硕士,研究方向为非线性分析及其应用;李 雷,教授,研究方向为智能信号处理和非线性科学及其在通信中的应用。

网络出版地址: <http://www.cnki.net/kcms/detail/61.1450.TP.20170217.1628.028.html>

$$\min_{x \in R^n} \mu(x) = \mu \|x\|_1 + \frac{1}{2} \|Ax - b\|_2^2 \quad (3)$$

其中,  $\mu > 0$ 。  
不动点连续(FPC)方法主要解决  $l_1$  范数问题。

$$\min_{x \in R^n} \|x\|_1 + \frac{\mu}{2} \|Ax - b\|_M^2 = \Phi(x) \quad (4)$$

其能够解决大规模问题。  
基于不动点迭代方法,文中提出了一种收敛速度更快、算法性能更优的新算法-快速不动点迭代方法。实验结果表明,该算法表现出了最优的性能。

2 FPC 方法理论基础

根据凸优化理论<sup>[17]</sup>,最小化  $\Phi(x)$  即求使得  $0 = \partial\Phi(x) = T(x)$  的解  $x^*$ 。设  $f(x) = \frac{\mu}{2} \|Ax - b\|_M^2$  是凸函数,通常  $\Phi(x)$  可以分为两个凸函数的和,即  $\Phi(x) = \Phi_1(x) + \Phi_2(x)$ 。所以,  $T(x)$  可以分解为两个最大单调算子的和:  $T(x) = T_1(x) + T_2(x)$ 。对于参数  $\tau > 0$ ,  $T_2$  是一个单值函数并且  $I + \tau T_1$  可逆,那么:

$$\begin{aligned} 0 \in T(x) &\Leftrightarrow 0 \in (x + \tau T_1) - (I - \tau T_2) \Leftrightarrow \\ (I - \tau T_2)x &\in (I + \tau T_1)x \Leftrightarrow \\ x &= (I + \tau T_1)^{-1}(I - \tau T_2)x \end{aligned} \quad (5)$$

由式(5),通过使用向前向后分裂算法即可找到算子  $T$  的零点。

$$x^{k+1} = (I + \tau T_1)^{-1}(I - T_2)x^k \quad (6)$$

至此,得到了不动点迭代式(6)。对于凸优化问题(4),令  $T_2 = \nabla f(x)$ 。

定义信号  $x \in R^n$  的支撑集,即信号的非零元素的索引集为  $\text{sup } p(x) = \{i; x_i \neq 0\}$ , 并且令

$$g(x) = \nabla f(x) = \frac{\mu}{2} A^T M (Ax - b) \quad (7)$$

$|E|$  表示集合  $E$  的势;  $\lambda_i(M), i = 1, 2, \dots, n$ ,  $\lambda_{\max}(M)$  和  $\lambda_{\min}(M)$  分别表示矩阵的最大特征值和最小特征值。

对于  $t \in R$ , 用符号函数表示。那么,  $|t|$  的次微分即可用集值函数来表示:

$$\text{SGN}(t) = \partial |t| = \begin{cases} \{+1\}, & t > 0 \\ [-1, 1], & t = 0 \\ \{-1\}, & t < 0 \end{cases} \quad (8)$$

因此,对于向量  $x \in R^n$ , 定义  $\text{sgn}(x) \in R^n$  和  $\text{SGN}(x) \in R^n$ , 其中  $(\text{sgn}(x))_i = \text{sgn}(x_i)$ ,  $(\text{SGN}(x))_i = \text{SGN}(x_i)$ , 显然有:

$$\text{sgn}(x) = \text{sgn}(x') \Leftrightarrow \text{SGN}(x) = \text{SGN}(x'), \forall x, x' \quad (9)$$

接着,对于凸规划(4)的最优性和最优解集,假设

$X^*$  是  $\Phi(x)$  的最优解集。由凸分析<sup>[17]</sup>可知最优性条件为:

$$x^* \in X^* \Leftrightarrow 0 \in \text{SGN}(x^*) + g(x^*) \quad (10)$$

$$\text{或者,等价表示为:} \quad x^* \in X^* \Leftrightarrow g(x^*) \begin{cases} = -1, x_i^* > 0 \\ \in [-1, 1], x_i^* = 0 \\ = +1, x_i^* < 0 \end{cases} \quad (11)$$

由式(11)可知,若  $\|g(0)\|_\infty \leq 1$ , 则  $0$  是凸优化(4)的一个最优解,即

$$0 \in X^* \Leftrightarrow \mu \leq \frac{2}{\|A^T M b\|_\infty} \quad (12)$$

因此,可以很方便地检测凸优化(4)是否有零解。

命题 1:  $X^*$  是  $\Phi(x)$  的最优解集,对于  $\forall \tau > 0$ ,  $x^* \in X^*$ , 当且仅当

$$x^* = \text{sgn}(x^* - \tau g(x^*)) \odot \max\{|x^* - \tau g(x^*)| - \frac{\tau}{\mu}\} \quad (13)$$

方程(13)是由两个  $R^n \rightarrow R^n$  映射组成,定义如下:

$$h(\cdot) = I(\cdot) - \tau g(\cdot) \quad (14)$$

$$S_v(\cdot) = \text{sgn}(\cdot) \odot \max\{|\cdot| - v, 0\}, v > 0 \quad (15)$$

这里的  $h(\cdot), R^n \rightarrow R^n$  类似于梯度下降法,主要减小  $f(x)$ 。对于  $\forall y \in R^n, S_v(y), R \rightarrow R$  得到的是凸优化  $\min_{x \in R^n} v \|x\|_1 + \frac{1}{2} \|x - y\|^2$  的唯一解。对于凸优化问题(4),即可得到其不动点迭代式:

$$x^{k+1} = S_v \circ h(x^k), v = \frac{\tau}{\mu} \quad (16)$$

令向前向后分裂推导出的式(6)中的  $T_1(x) = \partial \|x\|_1, T_2(x) = g(x)$ , 即可直接得出式(6)与式(16)是等价的。

3 快速不动点迭代(FFPC)方法

3.1 FFPC 算法思想

FFPC 算法求解的是问题(4)的等价表示:

$$\min_{x \in R^n} \mu \|x\|_1 + \frac{1}{2} \|Ax - b\|_2^2 = \Phi(x) \quad (17)$$

其中,  $\mu$  是引入的正则化参数,用来平衡  $l_1, l_2$  范数所占的比重,利用优化算法可求得最优解  $x^*$ 。

$$x^* = \arg \min_{x \in R^n} \mu \|x\|_1 + \frac{1}{2} \|Ax - b\|_2^2 \quad (18)$$

对于不动点迭代式(16),为了提高其收敛速度,引入参数  $t$ , 利用前两次迭代结果对  $\{z^k\}$  进行更新:

$$z^k = x^k + \frac{t_k - 1}{t_{k+1}}(x^k - x^{k-1}) \quad (19)$$

其中,  $\{z^k\}$  是为了公式简明,不易混淆而引入的序列;  $x^k, x^{k-1}$  分别为第  $k$  和第  $k - 1$  次的迭代结果。

使用式(19)更新  $x$  类似于使用最快下降方法。

$$\Phi(x^{k+1}) = \Phi(x^k - t_k \nabla \Phi(x^k)) = \min_t \Phi(x^k - t_k \nabla \Phi(x^k)) \quad (20)$$

在满足式(20)的基础上,受文献[18]的启发,使用式(21)来寻找最优步长  $t_k$ 。

$$t_k = \frac{1 + \sqrt{4t_{k-1}^2 + 1}}{2} \quad (21)$$

因此式(16)可更新为:

$$x^{k+1} = S_v \circ h(z^k) = \text{sgn}(z^k - \tau g(z^k)) \odot \max\{|z^k - \tau g(z^k)| - \tau \mu, 0\} \quad (22)$$

由于阈值  $v = \tau \mu$  影响了不动点迭代式(21)的收敛速度,  $v$  越大,收敛速度越快。则只要使得  $\tau, \mu$  的取值尽量大,就可以加快不动点迭代式(22)的收敛速度。使用 BB(Barzilai 和 Borwein)步长更新参数  $\tau$ :

$$\tau^k = \frac{\|x^k - x^{k-1}\|^2}{(x^k - x^{k-1})^T (g^k - g^{k-1})} \quad (23)$$

对于正则化参数  $\mu$ ,其作用是平衡二次函数  $f(x)$  和  $l_1$  范数  $\|x\|_1$  的比重。为使式(17)侧重于保证项  $f(x)$  最小,通常选取  $\mu = \delta \cdot \max(A^T b)$  ( $\delta$  是大于 0 的常数)作为初始值。在迭代过程中,为了使  $x$  快速稀疏,对  $\mu$  作适当收缩,令  $\mu = \alpha \mu$  (其中  $\alpha$  是收缩因子,  $0 < \alpha < 1$ ),平衡二次函数  $f(x)$  和  $l_1$  范数  $\|x\|_1$  在迭代过程中的比重。

快速不动点迭代方法的迭代停止条件是由  $x$  的两次相邻迭代的相对误差决定的。

$$G_k(x^k, x^{k-1}) = \frac{\|x^k - x^{k-1}\|_2}{\max\{\|x^k\|_2, 1\}} < \text{xtol}, \\ \|g(x^k)\|_\infty - 1 < \text{gtol} \quad (24)$$

终止条件为  $\text{xtol}$  和  $\text{gtol}$ ,当满足上述终止条件时,停止迭代。

3.2 FFPC 方法的收敛性证明

命题 1:凸优化问题(4)的最优解集非空,即  $X^* \neq \emptyset$ ,且存在集合  $\Omega: \Omega = \{x: \|x - x^*\| \leq \rho\} \subset R^n$ 。对于某些  $x^* \in X^*, \rho > 0, \forall x \in \Omega$ ,使得  $f \in C^2(\Omega)$ ,  $H(x) = \nabla^2 f(x) \geq 0$  并且

$$\hat{\lambda}_{\max} = \max_{x \in \Omega} \lambda_{\max}(H(x)) < \infty \quad (25)$$

为了简化,在式(14)中引入常数  $\tau: x^{k+1} = S_v(x^k - \tau g(x^k)), v = \tau/\mu$ 。通常,选择  $\tau \in (0, 2/\hat{\lambda}_{\max})$ 。

引理 1:假设命题 1 成立并且  $\tau \in (0, 2/\hat{\lambda}_{\max})$ ,对于  $\forall x, x' \in \Omega, h(\cdot) = I(\cdot) - \tau g(\cdot)$  在邻域  $\Omega$  内是非扩张的,即

$$\|h(x) - h(x')\| \leq \|x - x'\| \quad (26)$$

此外,当  $g(x) = g(x')$  时,式(26)依然成立。

由引理 1 可知,算子  $h(\cdot)$  是非扩张的,根据 FPC 算法的  $q_1$  不动点收敛性质,可以判定文中 FFPC 的迭

代式(22)是全局收敛的。

引理 2:对于  $k > 1$ ,FFPC 算法产生的序列  $\{x^k, z^k\}$  满足:

$$\|x^{k+1} - x^k\| \leq \|x^k - x^{k-1}\|, \|z^{k+1} - z^k\| \leq \|z^k - z^{k-1}\|, x^* = z^* \quad (27)$$

证明:文献[19]中已证明了序列  $\{x^k\}$  的收敛性,即  $\|x^{k+1} - x^k\| \leq \|x^k - x^{k-1}\|$ 。这里只需证明序列  $\{z^k\}$  的收敛性即可。已知算子  $S_v(\cdot)$  是收缩的,所以:

$$\|S(z^{k+1}) - S(z^k)\| \leq \|z^k - z^{k-1}\| \quad (28)$$

又由式(22)可知  $z^{k+1} = S(z^{k+1})$ ,故

$$\|z^{k+1} - z^k\| = \|S(z^k) - S(z^{k-1})\| \leq \|z^k - z^{k-1}\| \quad (29)$$

$$\text{根据式(19)得 } z^* = x^* + \frac{t_k - 1}{t_{k+1}}(x^* - x^*) = x^*。$$

证毕。

3.3 算法描述

FFPC 算法步骤如下:

Step1:令信号在小波域的变换稀疏为  $x^0 = 0$ ,初始化迭代次数  $k = 1, t_1 = 1, z_1 = 0$ 。

Step2:利用式(16)计算  $x^k$ 。

Step3:计算  $t_{k+1}$ ,根据式(19)对  $t$  进行更新,利用式(17)计算  $z^k$ 。

Step4:按照式(22)计算迭代终止函数值  $G_k(x^k, x^{k-1})$ ,如果满足迭代终止条件,则令  $x^* = x^k$ ,否则执行 Step5。

Step5:扩张正则化参数  $\mu = \alpha \mu$ ,更新迭代次数  $k = k + 1$ ,更新  $\tau$ ,将  $z^k$  带入 Step2,重复上述过程。

迭代结束后,得到的迭代结果  $x^*$  即是对原始信号的估计值。

3.4 除偏

FFPC 算法重构的信号存在一些误差,采用除偏(Debiase)方法来去除误差比较大的元素,使得非零的系数个数不超过  $m$ 。FFPC 算法和 FPC 算法类似,当输入信号绝对稀疏时,使用除偏过程能够使得算法 FFPC 重构信号的精度更高。

Debiase 算法:

输入参数:FFPC 算法中的测量矩阵  $A$ ,测量信号  $b$  和原始信号  $x$ 。

令  $\text{tol} = 3\sigma, \text{tol} = 3\sigma, \sigma = \text{sqrt}(\text{mean}(\text{diag}(M)))$ ,  $S = \{i \geq |x_i| > \text{tol}\}$ 。

若  $1 \leq |S| \leq m$ ,那么

$$Z = \{1, 2, \dots, n\} \setminus S$$

$$x_z = 0$$

求解最优化问题  $x_s = \underset{x}{\text{argmin}} \|A_s x - b\|_2^2$ 。

否则,停止计算。

4 仿真实验和结果分析

为了说明提出算法的优越性,使用 Matlab 对提出的快速不动点迭代方法进行实验。为了比较客观地说明 FFPC 算法的有效性,将 FFPC 的实验数据与 IST 算法、FIST 算法、贪婪算法 CoSaMP、子空间追踪 SP 算法以及不动点连续方法的结果进行比较,分别从信号重构时间、相对误差和峰值信噪比三个方面进行比较。

图 1(a)为各个算法重构时间随采样率的变化曲线。从中可见,文中提出的 FFPC 算法,重构 Camera 图像的速度最快,充分体现了 FFPC 算法的速度及稳定性。此外,图 1(b)和图 1(c)则展示了这 5 种算法重构信号的质量,图 1(b)中不动点系列算法的相对误差都较小,FFPC 算法的准确性和 FPC 算法接近,而图 1(c)中 FFPC 算法重构出来的信号的信噪比比较高。

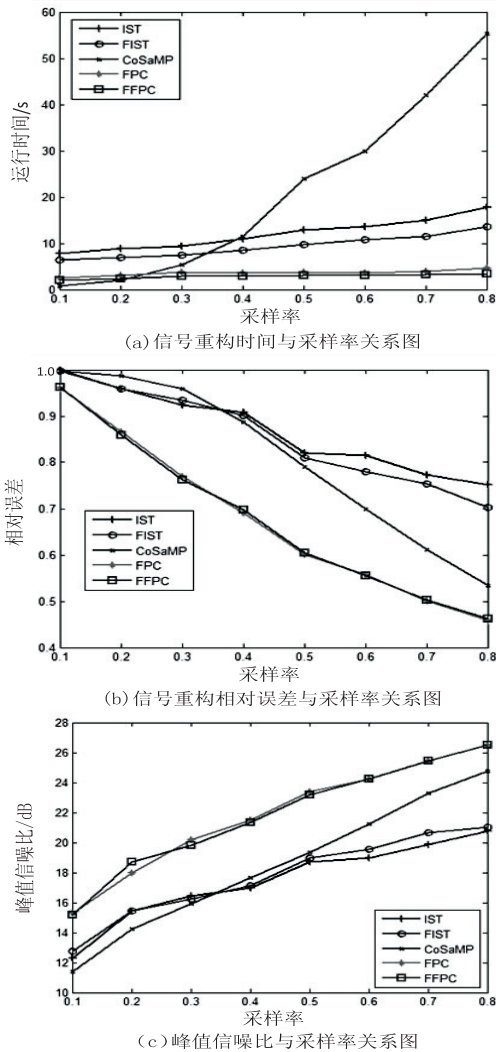


图 1 FFPC 算法性能随采样率变化图  
Camera 图像处理结果如表 1 所示。

如表 1 所示,在重构 Camera 图像所用的时间上,FFPC 算法的重构速度最快。例如,在采样率为 0.5 时,FFPC 算法比 FIST 和 FPC 算法分别快了 4 s 和 0.781 3 s,在重构误差方面,FFPC 算法的效果也很好,

在采样率为 0.25 和 0.75 时,重构误差均最小,其他情况下,误差值均与 FPC 算法接近;在图像重建质量方面,FFPC 重构信号的峰值信号比也比 IST、FIST 和 CoSaMP 高出很多,信号重建质量与 FPC 算法相近。

表 1 Camera 图像处理结果

采样率	方法	自然图像(256 * 256)		
		时间	相对误差	峰值信噪比
0.25	IST	8.981 3	0.944 0	16.075 1
	FIST	7.265 6	0.940 3	16.115 9
	CoSaMP	4.781 3	0.987 2	
	FPC	4.046 9	0.836 0	18.952 6
	FFPC	3.265 6	0.831 0	19.253 4
0.50	IST	12.953 1	0.820 4	18.698 4
	FIST	9.796 9	0.810 4	18.979 8
	CoSaMP	23.984 4	0.790 3	19.327 4
	FPC	3.750 0	0.601 0	23.380 8
	FFPC	3.062 5	0.605 0	23.202 5
0.75	IST	16.093 8	0.767 9	19.971 2
	FIST	12.656 3	0.727 0	20.960 8
	CoSaMP	44.968 8	0.571 4	23.855 6
	FPC	4.140 6	0.501 7	25.871 5
	FFPC	3.343 8	0.482 0	26.063 7

图 2 给出了使用 FFPC 算法在采样率为 0.25、0.5 和 0.75 时对自然图像的重构效果。



图 2 FFPC 算法对自然图像的重构效果

FFPC 算法在采样率为 0.25 时,重构出的图像中噪点较多。当采样率达到 0.5 时,重构出来的图像信号都比较清晰,噪点较少,视觉效果相对很好。

由于 FPC 和 FFPC 算法在求解大规模问题时,往往得到的稀疏解中非零系数的个数偏差较大,所以文中采用除偏的方式来处理 FPC 和 FFPC 算法得到的粗糙解,结果如表 2 所示。

与原来的重构结果相比,除偏后图像的峰值信噪比均有所提高。当采样率为 0.25 时,经过除偏操作后,FFPC 算法重构自然图像的峰值信噪比和原来相比提高了 1.843 6 dB。



表 2 图像除偏结果

采样率	方法	自然图像(256 * 256)	
		峰值信噪比	Debiase 峰值信噪比
0.25	FPC	18.952 6	19.281 1
	FFPC	19.253 4	21.097 0
0.5	FPC	23.380 8	23.917 1
	FFPC	23.202 5	24.023 0
0.75	FPC	25.871 5	27.868 3
	FFPC	26.063 7	28.105 7

图 3 给出了经过除偏操作后,自然图像 Camera 的重构效果。



图 3 自然图像的 Debiase 结果图

可以看出,除偏后,图像的清晰度和对比度明显提高,噪点也明显减少。

5 结束语

基于传统的不动点迭代方法,文中提出了一种新的快速不动点迭代方法。该算法通过引入软阈值和正则化参数的双收缩,提高了算法的收敛速度和信号重构质量。通过在不同压缩比下比较各算法的重构性能,同时还比较了在相同压缩比下各算法的图像重构效果。仿真结果表明,所提的快速不动点算法较传统的不动点迭代方法性能更优。

参考文献:

[1] Kashin B S, Temlyakov V N. A remark on compressed sensing [J]. Mathematical Notes, 2007, 82(5-6): 748-755.

[2] 焦李成. 自然计算、机器学习与图像理解前沿[M]. 西安: 西安电子科技大学出版社, 2008.

[3] Candes E, Romberg J. Quantitative robust uncertainty principles and optimally sparse decompositions[J]. Foundations of Compute Mathematics, 2006, 6(2): 227-254.

[4] Candes E, Romberg J, Tao T. Robust uncertainty principles;

exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52(2): 489-509.

[5] Candes E. Ridgelets: theory and applications[D]. Stanford: Stanford University, 1998.

[6] Donoho D L, Tsai Y. Extensions of compressed sensing[J]. Signal Processing, 2006, 86(3): 533-548.

[7] Tropp J A. Just relax: convex programming methods for identifying sparse signals in noise[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52(3): 1030-1051.

[8] Wakin M B, Laska J N, Duarte M F, et al. An architecture for compressive imaging[C]//IEEE international conference on image processing. [s. l.]: IEEE, 2006: 1273-1276.

[9] Wakin M B, Laska J N, Duarte M F, et al. Compressive imaging for video representation and coding[C]//Proceedings of the picture coding symposium. Beijing, China; [s. n.], 2006.

[10] Laska J N, Wakin M B, Duarte M F, et al. A new compressive imaging camera architecture using optical-domain compression[C]//Proceedings of SPIE. [s. l.]: [s. n.], 2010: 43-52.

[11] Lustig M, Donoho D, Pauly J M. Sparse MRI: the application of compressed sensing for rapid MR imaging[J]. Magnetic Resonance in Medicine, 2007, 58(6): 1182-1195.

[12] Tropp J A, Wakin M B, Duarte M F, et al. Random filters for compressive sampling and reconstruction[C]//IEEE international conference on acoustics, speech and signal processing. [s. l.]: IEEE, 2006: 14-19.

[13] Kirolos S, Laska J, Wakin M, et al. Analog-to-information conversion via random demodulation[C]//IEEE Dallas/CAS workshop on design, applications, integration and software. [s. l.]: IEEE, 2006: 71-74.

[14] Laska J, Kirolos S, Massoud Y, et al. Random sampling for analog-to-information conversion of wideband signals[C]//IEEE Dallas/CAS workshop on design, applications, integration and software. [s. l.]: IEEE, 2006: 119-122.

[15] Laska J N, Kirolos S, Duarte M F, et al. Theory and implementation of an analog-to-information converter using random demodulation[C]//IEEE international symposium on circuits and systems. [s. l.]: IEEE, 2007: 1959-1962.

[16] Yang J, Zhang Y, Yin W. A fast alternating direction method for TVL1-L2 signal reconstruction from partial Fourier data[J]. IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing, 2010, 4(2): 288-297.

[17] 刘晓曼, 丛佳, 朱永贵. 不动点方法及其在压缩感知核磁共振成像中的应用[J]. 中国传媒大学学报: 自然科学版, 2014, 21(1): 28-34.

[18] 段世芳, 马社祥. 图像压缩感知的双收缩快速迭代算法[J]. 计算机工程, 2012, 38(19): 226-228.

[19] Hale E T, Yin W, Zhang Y. A fixed-point continuation method for  $\ell_1$ -regularized minimization with applications to compressed sensing[R]. [s. l.]: [s. n.], 2007.