

基于分段可调节 OMP 算法的图像压缩感知算法

石曼曼, 李 雷

(南京邮电大学 理学院, 江苏 南京 210023)

摘 要: 压缩感知 (CS) 理论作用在稀疏信号或可压缩信号, 用很小的采样速率, 保证信号采样与压缩同时进行, 并可以精确恢复原始信号。文中侧重 CS 重构算法中经典的贪婪算法研究, 介绍了四种经典的贪婪算法: 正交匹配 (OMP) 算法、正则化正交匹配 (ROMP) 算法、压缩采样匹配追踪 (CoSaMP) 算法和分段正交匹配追踪 (StOMP) 算法。从重构精度和重构耗时两个方面, 结合横向和纵向详细的比较, 详尽地给出了不同算法的区别以及优缺点。在 StOMP 算法增加考虑稀疏度和观测矩阵行列关系的可调节因子, 提出了一种改进算法—分段可调节 OMP 重构 (StrOMP) 算法。通过仿真实验发现, 提出的改进算法既提高了图像重构精度, 又保证了其重构时间短的优越性。

关键词: 压缩感知; 贪婪算法; 图像重构; 分段可调节正交匹配追踪算法

中图分类号: TP301.6

文献标识码: A

文章编号: 1673-629X(2016)11-0014-05

doi: 10.3969/j.issn.1673-629X.2016.11.004

An Image Compressed Sensing Algorithm Based on Novel Stagewise Regulation OMP Algorithm

SHI Man-man, LI Lei

(College of Science, Nanjing University of Posts and Telecommunications, Nanjing 210023, China)

Abstract: Compressed Sensing (CS) theory uses small frequency, which is mainly for sparse or compressible signal. Sampling and compressing are also implemented successfully at the same time, and can accurately recover the original signal. It focuses on the classical greedy algorithm in this paper for compressed sensing reconstruction algorithm, including four classical matching pursuit algorithms like Orthogonal Matching Pursuit (OMP), the Regularized Orthogonal Matching Pursuit (ROMP), Compressive Sampling Matching Pursuit (CoSaMP) and Stagewise Orthogonal Matching Pursuit (StOMP). Considering the reconstruction accuracy and time as evaluation standards, the advantages and disadvantages of algorithms and difference of them are given by combining with horizontal and vertical comparison. The adjustment factor for StOMP at each iteration is put considering the sparsity and the observation matrix ranks, and an improved algorithm is proposed, which makes innovations for StrOMP algorithm, named Stagewise regulation Orthogonal Matching Pursuit (StrOMP). The simulation shows the proposed algorithm can raise the accuracy of image reconstruction, and guarantee the priority of the reconstruction time of the new algorithm.

Key words: compressed sensing; greedy algorithm; image reconstruction; stagewise regulation orthogonal matching pursuit reconstruction algorithm

1 概 述

通过传统奈奎斯特采样定理可知, 要精准恢复出原始信号, 其采样速率至少要大于信号两倍频宽。而压缩感知 (Compressed Sensing, CS)^[1-2] 有效地解决了传统奈奎斯特定理采样数据时的带宽限制, 减少了采样端硬件元件损耗, 因此在信息处理领域应用广泛。

CS 理论包括信号稀疏表示、观测矩阵设计和信号

重构三个关键问题。它指出, 在某一变换域上, 若信号是稀疏的或是可压缩的, 便可用一个与变换基不相关的观测矩阵将变换所得的高维信号投影至低维空间, 并保持重建所需的信息, 通过求解一个优化问题, 便能从少量投影中高概率重构出原始信号。

若在某组正交基 $\{\psi_i\}_{i=1}^N$ 下对 N 维实信号 $x \in R^{N \times 1}$ 进行展开, 即:

收稿日期: 2016-01-18

修回日期: 2016-05-11

网络出版时间: 2016-10-24

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (61501251); 南京邮电大学引进人才科研启动基金资助项目 (NY214191)

作者简介: 石曼曼 (1992-), 女, 硕士研究生, 研究方向为信息处理理论与应用; 李 雷, 博士, 教授, 研究方向为智能信号处理和非线性科学及其在通信中的应用。

网络出版地址: <http://www.cnki.net/kcms/detail/61.1450.TP.20161024.1113.032.html>

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^N \boldsymbol{\theta}_i \boldsymbol{\psi}_i \tag{1}$$

其中,稀疏系数 $\boldsymbol{\theta}_i = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\psi}_i \rangle = \boldsymbol{\psi}_i^T \boldsymbol{x}$ 。改写成如下矩阵形式,即:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{\theta} \tag{2}$$

其中, $\boldsymbol{\Psi} = [\boldsymbol{\Psi}_1, \boldsymbol{\Psi}_2, \dots, \boldsymbol{\Psi}_N] \in R^{N \times N}$ 为正交基字典矩阵,并且 $\boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{\Psi}^T = \boldsymbol{\Psi}^T \boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{I}$; 系数向量 $\boldsymbol{\theta} = [\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2, \dots, \boldsymbol{\theta}_N]^T$ 。

假设 $\boldsymbol{\theta}$ 里 $K \ll N$,也就是向量 $\boldsymbol{\theta}$ 是 K -稀疏的,使用一个随机测量阵 $\boldsymbol{\Phi}: M \times N (M \ll N)$,且这个矩阵与正交基字典 \boldsymbol{X} 不相干,于是对 \boldsymbol{x} 做如下投影:

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{x} \tag{3}$$

能够得到 M 个线性观测(或称线性投影) $\boldsymbol{y} \in R^M$,而这些线性投影拥有足够多的信息来恢复出信号 \boldsymbol{x} 。注意 $\boldsymbol{\Phi}$ 的每行跟 $\boldsymbol{\theta}$ 做乘法以后,就会获得 \boldsymbol{x} 的局部信息。

从观测 \boldsymbol{y} 还原出信号 \boldsymbol{x} ,就转化成是一个求线性方程组解的问题,但是由于观测 $\boldsymbol{y} \in R^M$ 是 M 维的,远小于 N ,没有唯一解。考虑把式(2)代入式(3),记 CS 信息算子 $\boldsymbol{A}^{CS} = \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\Psi}$,能够得到:

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{A}^{CS} \boldsymbol{\theta} \tag{4}$$

虽说从观测 \boldsymbol{y} 还原 $\boldsymbol{\theta}$ 仍是一个欠定问题,可是注意到 $\boldsymbol{\theta}$ 具有稀疏性,于是信号极有可能被恢复出来。能够验证的是:如果 \boldsymbol{A}^{CS} 里任意 $2K$ 列均符合独立这个条件,就至少有某个 $\boldsymbol{\theta}$ 符合 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}^{CS} \boldsymbol{\theta}$,且 $\boldsymbol{\theta}$ 是 K -稀疏。也就是解一个非线性优化问题来精准重构出原始信号 \boldsymbol{x} 。

2 基于 CS 的信息重建算法

2.1 正交匹配追踪(OMP)类算法

OMP 类算法作为贪婪算法的主流算法被广泛应用。本节对 OMP 算法^[3]、ROMP 算法^[4]、CoSaMP 算法^[5]和 StOMP 算法^[6]进行研究分析,并给出四种重建算法的重构效果。该类算法是通过贪心思想,使得每迭代一步得到一个局部最优解,逐步逼近原信号。这四种算法的共同点都是利用 MP 算法中的原子选择原则,选取原子更新支撑集,然后利用最小二乘法取得最优解^[7]。四种算法的区别是原子的选择方式不同。

对于 OMP 算法,其本质思想是:凭迭代更新找出投影矩阵 $\boldsymbol{\Phi}$ 的列,然后更新寻求的列和当前冗余向量最相关,之后把相干原子从 $\boldsymbol{\Phi}$ 里面剔除,更新 K 次。而 ROMP 算法依照相关性原则对原子做第一次选择,取出 K 个相应的索引值放进指标集合 J 中;依照正则性再次挑选,原则如下:

$$u_i \leq 2u_j, i, j \in J \tag{5}$$

不同的是 CoSaMP 算法加入了回溯。首先计算得

到观测阵中集合 I 和 \boldsymbol{x} 残差的相干程度,由此筛选 $2K$ 项原子从而更新 \boldsymbol{A} ,同时由重构 $\hat{\boldsymbol{x}}$ 长度剔除一些原子,最后选择用稀疏度 K 或阈值终止算法。对于 StOMP 算法,设置最大迭代次数,一般取 10 次,并设置阈值来控制原子的选取,那么筛选出来的原子匹配度均不低于这个阈值,低于该阈值的原子将会被抛弃。在该种迭代下,运行速度将大大提高。

2.2 OMP 类算法仿真实验与分析

CS 重构过程中,文中使用离散小波变换形成 DWT 基对图像做稀疏化变换,然后选取随机高斯矩阵^[8-9]对图像取得观测值,最后用贪婪算法对观测值做重建操作。实验对象为图像库中的 Lena 图像(512 * 512, jpg),稀疏度的估计取经验值 $K = M/(2 * \lg(N))$ 。用 PSNR(dB)值来判断算法重建效果的好坏,值愈大愈好;用重建耗时(s)值来判断恢复速度,值愈小愈好。

以下不同算法的仿真实验均采用相同的运行平台和衡量指标,采样率均为 0.2。每个算法做 5 次 MATLAB 仿真,以平均结果作为最终算法的 PSNR 与重建耗时值。仿真结果如图 1 所示。

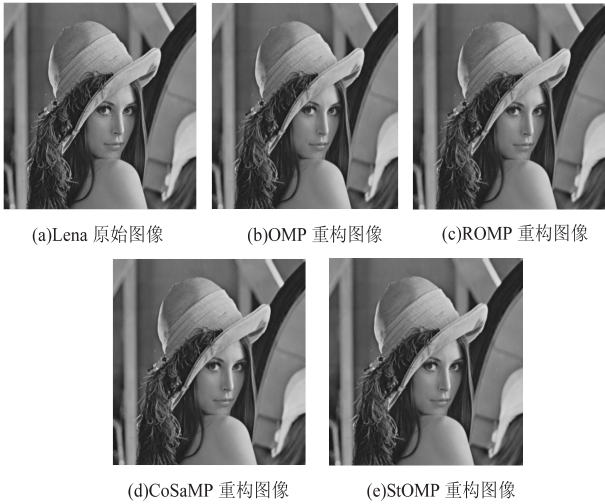


图 1 原始图像及四种算法重构效果图

从图 1 可以看到,四种算法均能完成实验仿真。给出图像在不同采样率下的 PSNR 值(dB)与重构消耗时间 t 值(s),见表 1 和表 2。

表 1 OMP 类算法 Lena 重建 PSNR 变化表

算法	采样率 (M/N)				
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
OMP	34.989 6	35.648 0	36.742 0	37.760 5	38.853 0
ROMP	35.798 5	36.837 4	37.875 7	38.680 7	39.376 7
CoSaMP	35.361 9	36.287 4	37.286 2	38.315 7	39.417 0
StOMP	33.294 1	31.678 2	30.746 5	30.199 2	30.080 8

从表 1 和表 2 中可以看到,贪婪算法在图像重构应用^[10-13]中,除 StOMP 算法外,其余算法均随采样率

表 2 OMP 类算法 Lena 重建耗时 t 变化表

算法	采样率 (M/N)				
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
OMP	1.962 3	3.894 3	6.018 8	7.490 8	8.160 8
ROMP	0.976 6	1.546 0	2.216 0	3.589 1	5.522 6
CoSaMP	11.979 3	18.646 8	26.461 9	26.373 8	37.419 7
StOMP	0.363 8	0.743 9	1.134 6	1.640 4	2.143 9

的增加,PSNR 值增加,耗时增大,这表明重构效果越来越好,但与之相对应的是消耗时间变长,但能够较好地恢复出原始图像;而 StOMP 算法下的重构是随采样率增大,PSNR 值变小,耗时增加,这与阈值的选择有关。

ROMP 算法好于 OMP 算法,在相同条件下重构效果好且重构时间短。ROMP 在采样率 M/N 等于 0.4、0.5 时,可以较为准确地重建出原来的图像。采样率相同时,CoSaMP 算法重建出的 PSNR 值要略高于 ROMP 和 OMP 算法,重建效果好,重建耗时远大于前两种算法。StOMP 算法加入了阈值,设定了迭代次数,在一定程度上简化了 OMP 算法,能明显看出重构耗时之少,但只有保证准确预测出 K ,才会精准恢复出原信号。阈值的选择问题对于重构效果非常关键,至于

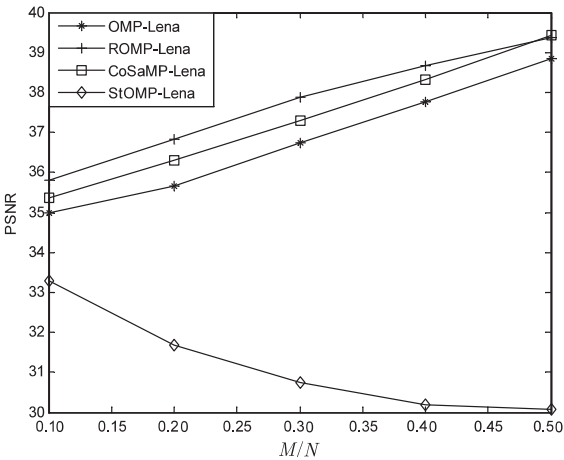


图 2 采样率不同时 Lena 重建 PSNR 变化图

由图 2 可知,随着采样率 M/N 的增加,除 StOMP 算法的 PSNR 呈缓慢下降趋势外,其他三种算法均随着采样率的增加而增加,这表明 ROMP、CoSaMP 同 OMP 算法相同,随着采样率 M/N 的增加,重建精度增大,重建效果优,而 StOMP 算法重建精度却缓慢下降并趋于平稳值。当采样率低于 0.5 时,ROMP 算法的重建结果要稍稍优于 CoSaMP,CoSaMP 重建结果要优于 OMP,OMP 又要好过 StOMP。即文中给出的四种算法中重建效果最差的当属 StOMP。分析信号重构时消耗的时间 t ,伴随采样率 M/N 的增大,重建耗时也会跟着增大,而 CoSaMP 耗时最多,接着为 OMP 和 ROMP 算法,耗时最少的是 StOMP 算法。这也说明一般情

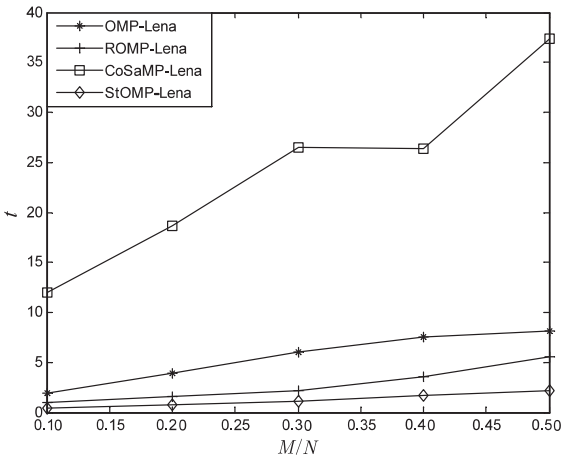
究竟该选多大的阈值,则要根据实际情况在具体的实践应用中进行选择,一般阈值取值范围为 $2 \leq \zeta \leq 3$ 。所以在 StOMP 算法上,阈值的选择也是一个须要探究的方向。

3 基于分段可调节 (StrOMP) 算法在图像上的运用

贪婪算法的运行速度是相当快的,不同的算法会产生不一样的重构效果,一般来说对于重建精度比较高的算法,重建耗时会相对增多;重建出的信息精度较低的算法,重建耗时会相对较少,这是由于重构精度和耗时存在不兼容性。基于此,文中对 StOMP 算法进行改进,寻找一个折中的算法,既能提高其重构精度,又能保证其重构时间少的优越性。

3.1 经典贪婪算法的比较

为体现新算法的优势,需先比较已有的贪婪算法的性能。由于压缩观测时 $M \ll N$,那么重建就是求 ULE 问题解的过程。而结合前述四种算法,给出算法间重建结果的对比,以及重建耗时的比较。图 2 展现了在采样率 M/N 等于 0.1、0.2、0.3、0.4 与 0.5 的情况下,Lena 重建的 PSNR 值和重构时间的变化图。



况下,图像重建质量和耗时是不兼容、互相限制的。当 PSNR 增大时,势必将带来重构耗时的增加;同样,缩短耗时就很可能牺牲部分重构质量。另外,随着采样率的增加,一般算法的重构精度会变大,重构效率也会有所提高,即重构耗时增加。因此在研究探索新算法时,需要很好地把握这两方面,找到二者的折中点。

3.2 改进的分段可调节 OMP (StrOMP) 算法

StOMP 算法具有很强的可塑性,虽然该算法重构图像质量较差,但具有重构时间极短的优势。在 StOMP 算法中,一个关键问题就是阈值的选择问题,它会直接关系到重构质量。

StrOMP 算法是改进的 StOMP 算法,设定迭代次数

不变,给 StOMP 算法中的阈值增加一个调节因子,用可调节阈值的办法挑选出原子,与 OMP 算法的差异在于,它在筛选原子的进程中设立了如下选择标准:

$$J_k = \{j | u_j > \eta t_k \sigma_k\} \tag{6}$$

一般取 $\sigma_k = \|r_{k-1}\|/\sqrt{M}, 2 \leq t_k \leq 3$ 。可以看到阈值的加入使得原子的选择增多, η 是考虑稀疏度和观测矩阵行列关系的调节因子,因此会优化迭代过程中原子选择及支撑集的更新^[14-15]。

3.3 StrOMP 算法步骤

输入:原始信号 $x \in R^N$, 观测矩阵 $\Phi \in R^{M \times N}$, 观测向量 $y \in R^M$, 阈值 ζ 和调节因子 η ;
输出:重构信号 $\hat{x} \in R^N$ 。
核心步骤如下:

- (1)设置各参数初值:重建信号 $\hat{x} = 0$, 残差向量初值 $r_0 = y$, 索引集合 $\Lambda_0 = \varphi$, 计更新次数 $s = 1$ 。
- (2)计算 $C_s = \Phi^T r_{s-1} = \langle \Phi, r_{s-1} \rangle$ 。
- (3)更新原子集合,加入阈值 $\zeta = \eta t_s \sigma_s$, 令原子集合 $J_s = \{j: |C_s(j)| > \eta t_s \sigma_s\}$ 。其中,参数 $\sigma_s = \|r_s\|_{l_2}/\sqrt{M}$, 阈值参数 $2 \leq t_s \leq 3$ 。

- (4)更新集合 $I_s = I_{s-1} \cup J_s$, 求出 I_s 上面的接近系数向量: $(x_s)_{I_s} = (\Phi_{I_s}^T \Phi_{I_s})^{-1} \Phi_{I_s}^T y$ 。
 - (5)更新残差值: $r_s = y - \Phi x_s$ 。
 - (6)迭代终止条件:假设符合终止要求,如 $s = 10$, 令 $\hat{x}_s = x_s$ 为算法的最终结果;假设未符合终止要求,令 $s = s + 1$, 返回步骤(2)。
- StrOMP 算法的复杂度没有增加,仅在原阈值上增加了调节因子 η 。由于采样率不同,导致稀疏度和观测矩阵列的数目发生改变,采样率增大,则 M 和 K 也增大,于是考虑其增大的关系,最终给定调节因子为 $\eta = M/4.2K$, 自适应地提高图像重构质量。

4 StrOMP 算法仿真结果与性能分析

利用文中提出的 StrOMP 算法对图像进行重构,重构效果图如图 3 所示,这里采样率分别取 $M/N = 0.5, 0.3, 0.1$ 。



图 3 StrOMP 算法恢复 Lena 效果图

通过图 3 可以发现改进的 StrOMP 算法在采样率不同时能够较为清晰地重构出原始图像,而且可以看到采样率越小,重构效果越好,这跟 StOMP 算法保持了一致性,说明算法是可以实现的。

为了更加直观地显示 StrOMP 算法在 M/N 取不同值时的重建效果以及为了更好地比较两种算法,文中给出 Lena 图像在不同采样率下的 PSNR 值(单位: dB)和 CS 重建部分消耗时间 t 值(单位: s),见表 3。

表 3 StrOMP 与 StOMP 算法对 Lena 重建 PSNR 和耗时 t 变化表

指标	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
StOMP(PSNR)	33.294 1	31.678 2	30.746 5	30.199 2	30.080 8
StrOMP(PSNR)	33.530 8	31.885 5	30.920 0	30.387 9	30.218 9
StOMP(t)	0.363 8	0.743 9	1.134 6	1.640 4	2.143 9
StrOMP(t)	0.518 8	0.977 0	2.090 8	2.229 0	2.723 9

从表 3 中可以看出,StrOMP 算法重构 PSNR 值在相同的采样率下总是略高于 StOMP 算法,这表明改进算法比原算法重构精度高,重建结果好,虽然改进算法重建时间比原算法略长,但仍然比较迅速。随着采样

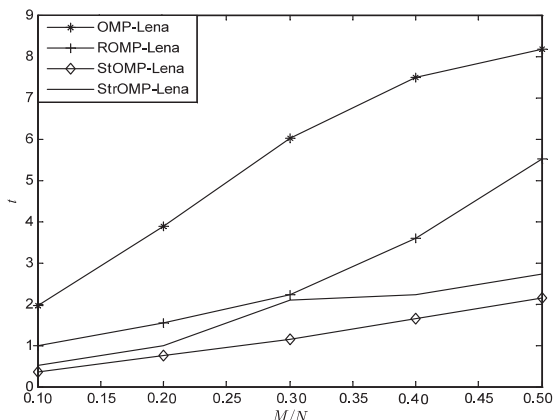
率的增大,新算法的 PSNR 值随之减少,而重构耗时却随之变长,这一点与原算法保持一致。主要原因是 StrOMP 算法没有增加算法的复杂度,仅在阈值的选择方面加入了一个调节因子,但从效果看,文中提出的 StrOMP 算法在重构精度上优于原来的分段正交匹配追踪算法。

改进算法的重构时间有所增加,但增加值很小,明显优于 CoSaMP 算法,但是为了比较改进算法在重构时间跟其他算法相比是否仍然具有优势,当采样率不相同给出 OMP、ROMP、StOMP 和 StrOMP 算法对 Lena 图像重建耗时的变化图及新算法 PSNR 对比图,见图 4。

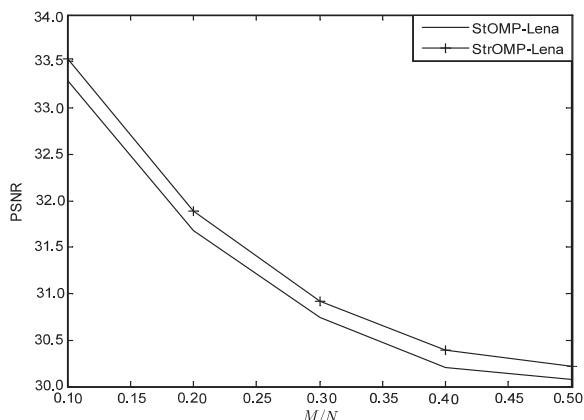
从图 4(a) 可以看出,改进后的算法 StrOMP 除个别点外,随着采样率的增加,重建耗时在随之增加,除采样率为 0.3 时增加有些快外,其他采样率下均明显优于 OMP 和 ROMP 算法,虽然比原算法重构时间略长,但都少于 1 s,仍然保留了 StOMP 算法重建快的优点。提出的 StrOMP 算法也能明显看出计算速度的优势,但由于其仅在阈值选择时加入了调节因子,使得算

法的精度略有提高,虽保持了算法的操作简单性,但在所有更新的步骤里挑选的也非最优表示,所以重建精

度跟其他算法比较起来不高,效果不是特别好,但是其重构消耗时间短仍是它的优点。



(a)



(b)

图 4 Lena 重构耗时 t 的变化图及新算法 PSNR 对比图

图 4(b) 为改进的 StrOMP 和原始 StOMP 在采样率 M/N 不相同 Lena 的 PSNR 值的变化情况。伴随采样率 M/N 的变大,两种算法的 PSNR 均随之降低,而且受采样率的影响较大。但是,在相同的采样率下可以明显看出,改进算法的 PSNR 值总是高于 StOMP,平均高出 0.2 ~ 0.3 dB,表明改进的 StrOMP 重建精度增大,改进通过仿真验证是成功的。需要指出,文中在对 Lena 重建时,在采样比等于 0.1 和 0.2 时,加入调节因子后的阈值分别为 3.328 4 和 3.074 5,均超出经验阈值在 $2 \leq \zeta \leq 3$ 这个范围,并且重建好于原阈值下的结果。

5 结束语

文中通过阐述 CS 理论知识,详细讨论了几种典型的 CS 重构算法,并将 CS 理论应用于图像中,对四种经典的贪婪算法从多角度分析重构效果,比较算法的优缺点。针对其中的 StOMP 算法,加入考虑稀疏度和观测矩阵行列关系的调节因子,使阈值变得更加精细,从而提出改进的分段可调节 OMP 算法。仿真结果表明,改进后的 StrOMP 算法从耗时和 PSNR 值上都优于 StOMP 算法。

参考文献:

- [1] Donoho D L. Compressed sensing[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52(4): 1289-1306.
- [2] Candès E J, Romberg J, Tao T. Robust uncertainty principles: exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52(2): 489-509.
- [3] Tropp J A, Gilbert A C. Signal recovery from random measurements via orthogonal matching pursuit[J]. IEEE Transactions

on Information Theory, 2007, 53(12): 4655-4666.

- [4] Needell D, Vershynin R. Signal recovery from incomplete and inaccurate measurements via ROMP[J]. IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing, 2010, 4(2): 310-316.
- [5] Needell D, Tropp J A. CoSaMP: iterative signal recovery from incomplete and inaccurate samples[J]. Applied & Computational Harmonic Analysis, 2008, 26(3): 301-321.
- [6] Donoho D L, Tsai Y, Drori I, et al. Sparse solution of underdetermined systems of linear equations by stagewise orthogonal matching pursuit[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2012, 58(2): 1094-1121.
- [7] 杨真真. 压缩感知重构技术及其在图像融合中的应用研究[D]. 南京: 南京邮电大学, 2014.
- [8] Candès E J, Wakin M B. An introduction to compressive sampling[J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2008, 25(2): 21-30.
- [9] 石光明, 刘丹华, 高大化, 等. 压缩感知理论及其研究进展[J]. 电子学报, 2009, 37(5): 1070-1081.
- [10] 高 睿, 赵瑞珍, 胡绍海. 基于压缩感知的变步长自适应匹配追踪重建算法[J]. 光学学报, 2010(6): 1639-1644.
- [11] 甘 伟, 许录平, 张 华, 等. 一种贪婪自适应压缩感知重构[J]. 西安电子科技大学学报, 2012, 39(3): 50-57.
- [12] Peyré G. Best basis compressed sensing[M]//Scale space and variational methods in computer vision. Berlin: Springer, 2007: 2613-2622.
- [13] Mun S, Fowler J E. Block compressed sensing of images using directional transforms[C]//IEEE international conference on image processing. [s.l.]: IEEE, 2009: 3021-3024.
- [14] Tramel E W, Fowler J E. Video compressed sensing with multihypothesis[C]//Proceedings of the 2011 data compression conference. [s.l.]: IEEE Computer Society, 2011: 193-202.
- [15] 李 博. 压缩感知理论的重构算法研究[D]. 长春: 吉林大学, 2013.