

外部输入与两单元 CNN 的完全稳定性

贺国旗¹, 韩泉叶¹, 陈绥阳²

(1. 陕西广播电视大学, 陕西 西安 710068; 2. 西安交通大学, 陕西 西安 710049)

摘要: 细胞神经网络(CNN)在图像处理、模式识别等领域有非常广泛的应用,应用的基础取决于对网络动力学特性的认识,尤其是网络在什么条件下有极限环,什么条件下是稳定的。研究了一类在没有外部输入条件下已经被证明是不稳定的两单元细胞神经网络(CNN)在加上外部输入后的特性。该网络在不加外部输入时的特点是:全局只在 0 区存在唯一齐点,并且存在一个围绕 0 区的极限环。证明:加上外部输入后,外部输入在一定的区域取值,网络仍保持这样的特点,即网络仍不是完全稳定的,存在一个围绕 0 区的极限环。这表明,不加外部输入时的情况只是加外部输入的一种特例。此外,还给出了这个外部输入值的取值区域。这个两单元细胞神经网络的结果有助于进一步研究较大规模细胞神经网络的非线性动力学特性,也有助于进一步拓展其在函数逼近、模式识别及图像处理等方面的应用。

关键词: 细胞神经网络;齐点;极限环;稳定性

中图分类号: TP391

文献标识码: A

文章编号: 1673-629X(2016)09-0167-04

doi:10.3969/j.issn.1673-629X.2016.09.037

Complete Stability of Two-cell Cellular Neural Networks with External Inputs

HE Guo-qi¹, HAN Quan-ye¹, CHEN Sui-yang²

(1. Shaanxi Radio & TV University, Xi'an 710068, China; 2. Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: Cellular neural networks have been widely used in image processing, pattern recognition and other fields. The base of the applications is the realization of the dynamics, especially when there will be a limit cycle and how the network is stable. In this paper, a case of two-cell cellular neural networks with external inputs is studied which has been proved it is not completely stable without external inputs. The feature of the network without external inputs is that there is only one fixed point in region 0 and there is a limit cycle around region 0. It will prove that with external inputs and their values in given domain, the network still has the feature that it is not completely stable and there is a limit cycle around region 0. This indicates the $CNN_{(2)}$ without external inputs is only a special sub-case of that with external inputs. The domain of the external inputs values is also given. The result has expanded the understandings about the dynamics of the $CNN_{(2)}$. The results on two-cell cellular neural networks will help to further study the nonlinear dynamics of large-scale cellular neural networks, and will also help to further expand its applications in function approximation, pattern recognition, image processing, and others.

Key words: CNN; fixed point; limit cycle; complete stability

0 引言

细胞神经网络(CNN)在图像处理、模式识别等领域有非常广泛的应用^[1-4]。CNN 的完全稳定性是其应用的基础^[5],所以,自从 CNN 理论被提出^[3]以来,人们就在不断地研究它的完全稳定性^[6-11],包括嵌入忆阻器的 CNN^[12-14]。目前,对于不加外部输入的两单元 CNN($CNN_{(2)}$)的完全稳定性,已经比较清楚了^[4]。对于不是完全稳定的 CNN,通过外加输入使其完全稳定是一种有效的方法。实际上,通过外加输入不仅可以

改变 CNN 的稳定性,而且可以改变饱和区中稳定节点的吸引域,甚至可以使饱和区中的稳定节点消失或出现,从而完全改变 CNN 的动态行为^[15]。文中就一类已经被证明不是完全稳定的 $CNN_{(2)}$ ^[4],研究其在外加输入条件下的稳定性的变化情况,给出一个仍使 $CNN_{(2)}$ 不完全稳定的取值区域。

1 状态方程与齐点

在带有外部输入情况下描述 $CNN_{(2)}$ 状态的微分

收稿日期:2015-12-16

修回日期:2016-04-08

网络出版时间:2016-08-23

基金项目:陕西省 2014 年重大科技创新项目(2014ZKC03-18);陕西省 2014 年度信息化重点建设项目(陕工信发[2014]199 号)

作者简介:贺国旗(1968-),男,副教授,研究方向为图形图像处理、网络技术;陈绥阳,教授,博导,研究方向为计算机软件、计算方法。

网络出版地址: <http://www.cnki.net/kcms/detail/61.1450.TP.20160823.1359.066.html>

方程如下^[3]:

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_1 + a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + u_1 \quad (1)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -x_2 + a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + u_2 \quad (2)$$

其中,输出变量 y_1, y_2 是分段线性:

$$y_i = \frac{1}{2}(|x_i + 1| - |x_i - 1|), i = 1, 2 \quad (3)$$

假定 $a_{11} - 1 > 0, a_{22} - 1 > 0$, 以保证网络能正常工作^[3]。在没有外在输入 ($u_1 = 0, u_2 = 0$), 且满足下列条件时, $CNN_{(2)}$ 已经被证明不是完全稳定的, 饱和区中没有齐点, 全局唯一一个齐点位于 0 区。

$$a_{12}a_{21} < 0 \quad (4)$$

$$|a_{12}| > a_{11} - 1 \quad |a_{21}| > a_{22} - 1 \quad (5)$$

这实际上有两种情况:

(1) $a_{12} > 0, a_{21} < 0$;

(2) $a_{12} < 0, a_{21} > 0$ 。

文中只考虑第 1 种情况, 因为第 2 种情况只需将两单元互换即可。现在考虑加上外部输入的情况, 仍然采用文献[4]对两单元 CNN 九个区域的划分。

1.1 0 区 ($|x_1| < 1, |x_2| < 1$)

由式(1)、(2)、(3)得 $CNN_{(2)}$ 状态的微分方程:

$$\frac{dx_1}{dt} = (a_{11} - 1)x_1 + a_{12}x_2 + u_1 \quad (6)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + (a_{22} - 1)x_2 + u_2 \quad (7)$$

如果满足条件:

$$\left| \frac{a_{12}u_2 - u_1(a_{22} - 1)}{(a_{11} - 1)(a_{22} - 1) - a_{21}a_{12}} \right| < 1 \quad (8)$$

$$\left| \frac{a_{21}u_1 - u_2(a_{11} - 1)}{(a_{11} - 1)(a_{22} - 1) - a_{12}a_{21}} \right| < 1 \quad (9)$$

则存在齐点:

$$x_{10} = \frac{a_{12}u_2 - u_1(a_{22} - 1)}{(a_{11} - 1)(a_{22} - 1) - a_{21}a_{12}} \quad (10)$$

$$x_{20} = \frac{a_{21}u_1 - u_2(a_{11} - 1)}{(a_{11} - 1)(a_{22} - 1) - a_{12}a_{21}} \quad (11)$$

1.2 1 区 ($x_1 > 0, |x_2| < 1$)

由式(1)、(2)、(3)得 $CNN_{(2)}$ 状态的微分方程:

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_1 + a_{12}x_2 + a_{11} + u_1 \quad (12)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -x_2 + a_{22}x_2 + a_{21} + u_2 \quad (13)$$

如果满足条件:

$$(a_{11} + u_1)(a_{22} - 1) - a_{12}(a_{21} + u_2) > a_{22} - 1 \quad (14)$$

$$\left| \frac{a_{21} + u_2}{a_{22}} \right| < 1 \quad (15)$$

则存在齐点:

$$x_{11} = \frac{(a_{11} + u_1)(a_{22} - 1) - a_{12}(a_{21} + u_2)}{a_{22} - 1} \quad (16)$$

$$x_{21} = -\frac{a_{21} + u_2}{a_{22} - 1} \quad (17)$$

1.3 2 区 ($|x_1| < 1, x_2 > 1$)

由式(1)、(2)、(3)得 $CNN_{(2)}$ 状态的微分方程:

$$\frac{dx_1}{dt} = (a_{11} - 1)x_1 + a_{12} + u_1 \quad (18)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 - x_2 + a_{22} + u_2 \quad (19)$$

如果满足条件:

$$\left| \frac{a_{12} + u_1}{a_{11} - 1} \right| < 1 \quad (20)$$

$$(a_{22} + u_2)(a_{11} - 1) - a_{21}(a_{12} + u_1) > a_{11} - 1 \quad (21)$$

则存在齐点:

$$x_{12} = -\frac{a_{12} + u_1}{a_{11} - 1} \quad (22)$$

$$x_{22} = \frac{(a_{22} + u_2)(a_{11} - 1) - a_{21}(a_{12} + u_1)}{a_{11} - 1} \quad (23)$$

1.4 3 区 ($x_1 < -1, |x_2| < 1$)

由式(1)、(2)、(3)得 $CNN_{(2)}$ 状态的微分方程:

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_1 + a_{12}x_2 - a_{11} + u_1 \quad (24)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = (a_{22} - 1)x_2 - a_{21} + u_2 \quad (25)$$

如果满足条件:

$$a_{12}(a_{21} - u_2) - (a_{11} - u_1)(a_{22} - 1) < -(a_{22} - 1) \quad (26)$$

$$\left| \frac{a_{21} - u_2}{a_{22} - 1} \right| < 1 \quad (27)$$

则存在齐点:

$$x_{13} = \frac{a_{12}(a_{21} - u_2) - (a_{11} - u_1)(a_{22} - 1)}{a_{22} - 1} \quad (28)$$

$$x_{23} = \frac{a_{21} - u_2}{a_{22} - 1} \quad (29)$$

1.5 4 区 ($|x_1| < 1, x_2 < -1$)

由式(1)、(2)、(3)得 $CNN_{(2)}$ 状态的微分方程:

$$\frac{dx_1}{dt} = (a_{11} - 1)x_1 - a_{12} + u_1 \quad (30)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 - x_2 - a_{22} + u_2 \quad (31)$$

如果满足条件:

$$\left| \frac{a_{12} - u_1}{a_{11} - 1} \right| < 1 \quad (32)$$

$$a_{21}(a_{12} - u_1) - (a_{22} - u_2)(a_{11} - 1) < -(a_{11} - 1) \quad (33)$$

则存在齐点:

$$x_{14} = \frac{a_{12} - u_1}{a_{11} - 1} \quad (34)$$

$$x_{24} = \frac{a_{21}(a_{12} - u_1) - (a_{22} - u_2)(a_{11} - 1)}{a_{11} - 1} \quad (35)$$

1.6 5 区 ($x_1 > 1, x_2 > 1$)

由式(1)、(2)、(3)得 $CNN_{(2)}$ 状态的微分方程:

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_1 + a_{11} + a_{12} + u_1 \quad (36)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -x_2 + a_{21} + a_{22} + u_2 \quad (37)$$

如果满足条件:

$$a_{11} + a_{12} + u_1 > 1 \quad (38)$$

$$a_{21} + a_{22} + u_2 > 1 \quad (39)$$

则存在齐点:

$$x_{15} = a_{11} + a_{12} + u_1 \quad (40)$$

$$x_{25} = a_{21} + a_{22} + u_2 \quad (41)$$

1.7 6 区 ($x_1 < -1, x_2 > 1$)

由式(1)、(2)、(3)得 $CNN_{(2)}$ 状态的微分方程:

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_1 - a_{11} + a_{12} + u_1 \quad (42)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -x_2 - a_{21} + a_{22} + u_2 \quad (43)$$

如果满足条件:

$$-a_{11} + a_{12} + u_1 < -1 \quad (44)$$

$$-a_{21} + a_{22} + u_2 > 1 \quad (45)$$

则存在齐点:

$$x_{16} = -a_{11} + a_{12} + u_1 \quad (46)$$

$$x_{26} = -a_{21} + a_{22} + u_2 \quad (47)$$

1.8 7 区 ($x_1 < -1, x_2 < -1$)

由式(1)、(2)、(3)得 $CNN_{(2)}$ 状态的微分方程:

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_1 - a_{11} - a_{12} + u_1 \quad (48)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -x_2 - a_{21} - a_{22} + u_2 \quad (49)$$

如果满足条件:

$$-a_{11} - a_{12} + u_1 < -1 \quad (50)$$

$$-a_{21} - a_{22} + u_2 < -1 \quad (51)$$

则存在齐点:

$$x_{17} = -a_{11} - a_{12} + u_1 \quad (52)$$

$$x_{27} = -a_{21} - a_{22} + u_2 \quad (53)$$

1.9 8 区 ($x_1 > 1, x_2 < -1$)

由式(1)、(2)、(3)得 $CNN_{(2)}$ 状态的微分方程:

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_1 + a_{11} - a_{12} + u_1 \quad (54)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -x_2 + a_{21} - a_{22} + u_2 \quad (55)$$

如果满足条件:

$$a_{11} - a_{12} + u_1 > 1 \quad (56)$$

$$a_{21} - a_{22} + u_2 < -1 \quad (57)$$

则存在齐点:

$$x_{18} = a_{11} - a_{12} + u_1 \quad (58)$$

$$x_{28} = a_{21} - a_{22} + u_2 \quad (59)$$

2 完全稳定性

定理 1: 由式(1)、(2)、(3)描述的满足条件(4)、(5)的 $CNN_{(2)}$, 若全局只在 0 区存在唯一的齐点, 则它不是完全稳定的。

证明: 由于齐点在 0 区内部, 有式(8)、(9)成立。

做坐标平移:

$$x_1 = v_1 + \frac{a_{12}u_2 - u_1(a_{22} - 1)}{(a_{11} - 1)(a_{22} - 1) - a_{21}a_{12}} \quad (60)$$

$$x_2 = v_2 + \frac{a_{21}u_1 - u_2(a_{11} - 1)}{(a_{11} - 1)(a_{22} - 1) - a_{12}a_{21}} \quad (61)$$

将式(60)和式(61)代入式(6)、(7)得:

$$\frac{dv_1}{dt} = (a_{11} - 1)v_1 + a_{12}v_2 \quad (62)$$

$$\frac{dv_2}{dt} = a_{21}v_1 + (a_{22} - 1)v_2 \quad (63)$$

这样, 使齐点的位置成为新坐标系 $v_1 o' v_2$ 的原点 (见图 1)。

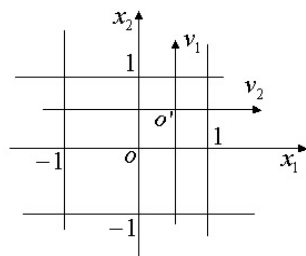


图 1 齐点在 0 区内部

o' 只能是不稳定的节点或不稳定的焦点^[16], 所以轨线只能离开 o' 趋向 0 区的边界。而在无穷远处, 描述各区域有如下的微分方程:

3 区:

$$\frac{dx_1}{dt} \approx -x_1 \quad (64)$$

4 区:

$$\frac{dx_2}{dt} \approx -x_2 \quad (65)$$

5、6、7、8 区:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} \approx -x_1 \\ \frac{dx_2}{dt} \approx -x_2 \end{cases} \quad (66)$$

所以轨线都是向内缩进的, 则由 Poincaré-Bendix-

son 定理知必存在环绕 0 区极限环,所以系统不是完全稳定的。

定理 2:当外部输入(u_1, u_2)同时满足条件(67)、(68)时(即在图 2 所示的矩形区域中取值),CNN₍₂₎ 只在 0 区存在唯一齐点,而在其他区域没有齐点。

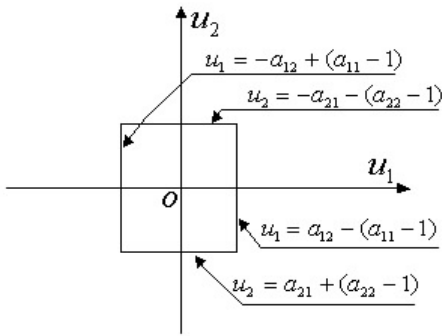


图 2 不稳定的区域

$$|u_1| < a_{12} - (a_{11} - 1) \quad (67)$$

$$|u_2| < -a_{21} - (a_{22} - 1) \quad (68)$$

证明:思路其实很简单,就是验证各区域齐点存在的条件是否满足。首先验证它满足 0 区齐点存在的条件(8)、(9)。

实际上:

$$\begin{aligned} & \frac{a_{12}u_2 - u_1(a_{22} - 1)}{(a_{11} - 1)(a_{22} - 1) - a_{21}a_{12}} < \\ & \frac{a_{12}(-a_{21} - (a_{22} - 1)) - ((a_{11} - 1) - a_{12})(a_{22} - 1)}{(a_{11} - 1)(a_{22} - 1) - a_{21}a_{12}} = \\ & \frac{-(a_{11} - 1)(a_{22} - 1) - a_{12}a_{21}}{(a_{11} - 1)(a_{22} - 1) - a_{21}a_{12}} < 1 \end{aligned} \quad (69)$$

$$\begin{aligned} & \frac{a_{12}u_2 - u_1(a_{22} - 1)}{(a_{11} - 1)(a_{22} - 1) - a_{21}a_{12}} > \\ & \frac{a_{12}(a_{21} + (a_{22} - 1)) - (a_{12} - (a_{11} - 1))(a_{22} - 1)}{(a_{11} - 1)(a_{22} - 1) - a_{21}a_{12}} = \\ & \frac{(a_{11} - 1)(a_{22} - 1) + a_{12}a_{21}}{(a_{11} - 1)(a_{22} - 1) - a_{21}a_{12}} > -1 \end{aligned} \quad (70)$$

由式(69)、(70)知条件(8)满足,同理可证条件(9)满足。证明 1 区存在齐点的条件式(15)不满足。

$$\frac{a_{21} + u_2}{a_{22} - 1} < \frac{a_{21} - a_{21} - (a_{22} - 1)}{a_{22} - 1} < -1 \quad (71)$$

由上式知式(15)不满足,所以 1 区没有齐点。同样可以一一验证 2、3、4、5、6、7、8 区中都没有齐点。

由定理 1 和定理 2 可知:当外部输入(u_1, u_2)在图 2 所示的矩形区域中时,由式(1)~(5)所描述的 CNN₍₂₎ 不是完全稳定的。

3 结束语

满足条件(4)、(5)的不加外部输入的 CNN₍₂₎ 是全

局只在 0 区存在唯一齐点,且不是完全稳定。其实,它只不过是满足条件(4)、(5)且带有外部输入(u_1, u_2)的 CNN₍₂₎ 在(0,0)点的特例,外部输入(u_1, u_2)在图 2 所示的矩形区域中,CNN₍₂₎ 全局只在 0 区存在唯一齐点,且不是完全稳定的。这个结果对于细胞神经网络应用的启示意义在于:如果要应用 CNN₍₂₎,应该尝试通过增加外部输入使其稳定,这需要进一步研究。

参考文献:

- [1] Chua L O, Yang L. Cellular neural networks; application[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems, 1988, 35(10): 1273-1290.
- [2] Arista-Jalife A, Gomez-Ramirez E. One-shot training of polynomial cellular neural networks and applications in image processing[C]//Proc of international joint conference on neural networks. [s. l.]: [s. n.], 2015: 1-8.
- [3] Chua L O, Yang L. Cellular neural networks; theory[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems, 1988, 35(10): 1257-1272.
- [4] Civalleri P P, Gilli M. On the dynamic behaviour of two-cell cellular neural networks[J]. International Journal of Circuit Theory and Applications, 1993, 21: 451-471.
- [5] 汤敏. 标准细胞神经网络完全稳定性分析及初步应用[J]. 计算机工程与应用, 2011, 47(2): 173-175.
- [6] 王宏霞, 虞厥邦. 细胞神经网络平衡态的稳定性分析[J]. 物理学报, 2001, 50(12): 2303-2306.
- [7] Takahashi N, Cha L O. On the complete stability of nonsymmetric cellular neural networks[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems, 1998, 45: 754-758.
- [8] Arik S, Tavsanoglu V. Equilibrium analysis of non-symmetric CNNs[J]. International Journal of Circuit Theory and Applications, 1996, 24: 269-274.
- [9] 张小红, 李德音. 时滞无关的 CNN 稳定性分析及保密通信应用[J]. 计算机工程, 2013, 39(1): 168-174.
- [10] 罗昉, 许弘雷. 一类中立型时滞神经网络的全局渐近稳定性[J]. 计算机工程与应用, 2012, 48(6): 30-32.
- [11] 李雪梅, 黄立宏. 具有外部输入和偏差的细胞神经网络的完全稳定性[J]. 应用数学学报, 2003, 26(3): 475-486.
- [12] 贺勤斌. 一类 CNN 细胞神经网络的稳定性[J]. 科学技术与工程, 2008, 8(14): 3765-3769.
- [13] 张发明. 非对称细胞神经网络稳定平衡点的存在性[J]. 电子测量与仪器学报, 2005, 19(3): 25-29.
- [14] 高士咏. 忆阻器/RTD 混合结构细胞神经网络及应用[D]. 重庆: 西南大学, 2012.
- [15] 曾志刚, 廖晓昕, 汪增福. 输入向量控制细胞神经网络全局指数稳定[J]. 控制理论与应用, 2006, 23(1): 86-88.
- [16] 马知恩, 周义仓. 常微分方程定性及稳定性方法[M]. 北京: 科学出版社, 2001: 99-104.