Hilbert 空间上多集合分裂可行问题的 KM 迭代算法

罗 俊[1],刘 健[2]
(1. 南京邮电大学 理学院,江苏 南京 210023;
2. 南京邮电大学 通信与信息工程学院,江苏 南京 210003)

摘 要:多集合分裂可行问题就是寻找与一族非空闭凸集距离最近的点,并使得该点在线性变换下的像与另一族非空闭凸集的距离最近。分裂可行问题是一类重要的最优化问题,产生于工程实践,在医学、信号处理和图像重建等领域中有着广泛的应用。文中基于 n 维线性空间上求解分裂可行问题的 KM 迭代算法,目的是要将算法在 Hilbert 空间中加以推广应用。通过在 Hilbert 空间中运用投影压缩定理,并且利用逼近函数将多集合分裂可行问题转化为最小值问题,方便了对算法的推导证明。利用上述方法可得,多集合分裂可行问题的 KM 迭代算法在 Hilbert 空间中也有较好的收敛性。因此,可以将多集合分裂可行问题的 KM 迭代算法在 Hilbert 空间中加以推广。

关键词:多集合分裂可行问题;优化问题;KM 迭代;Hilbert 空间
中图分类号:TP301.6 **文献标识码**:A **文章编号**:1673-629X(2016)01-0043-05
doi:10.3969/j.issn.1673-629X.2016.01.009

KM Iterative Algorithm for Multiple-sets Split Feasibility Problem in Hilbert Space

LUO Jun[1],LIU Jian[2]
(1. College of Science,Nanjing University of Posts & Telecommunications,Nanjing 210023,China;
2. College of Communication and Information Engineering,Nanjing University of Posts & Telecommunications,Nanjing 210003,China)

Abstract:The multiple-sets spilt feasibility problem requires finding a point closest to a family of closed convex sets in one space,so that its image under a linear transformation will be closest to another family of closed convex sets in the image space. The multiple-sets spilt feasibility problem is an important type of optimization problem,which is generated from engineering practice and already has been widely applied in medical science,signal processing,image reconstruction. Based on KM iterative methods for solving the multiple-sets spilt feasibility problem in Rn space,try to spread this algorithm in Hilbert Space. Using projection compression theorem and approximation function transformed the multiple-sets spilt feasibility problem into a minimum value problem,making the algorithm proving more easily. By deducing and proving,the multiple-sets spilt feasibility problem has good convergence in Hilbert Space. So the result shows that the KM iterative methods are spread in Hilbert Space perfectly.

Key words:multiple-sets split-feasibility problem;optimization problem;KM iteration;Hilbert Space

1 概 述

分裂可行问题(Split Feasibility Problem,SFP)是一类非常重要的约束优化问题,它最早出现在 Censor 和 Elfving(1994)的文献[1]中,定义如下:

设 $\boldsymbol{A}$ 是实矩阵且 $\boldsymbol{A} \in R^{m\times n}$,$C$,$Q$ 分别是 R^n,R^m 中的非空闭凸子集,分裂可行问题就是要寻找这样的元素 x(如果这样的元素 x 是存在的),使得 $x \in C$,$\boldsymbol{A}x \in Q$。

多集合分裂可行问题(Multiple-Sets Split Feasibility Problem,MSSFP)是 SFP 的推广,是很多问题的反问题的数学模型。MSSFP 是这样一个问题:

设 $C_i, i = 1,2,\cdots,t, Q_j, j = 1,2,\cdots,r$ 分别为 R^n 和

收稿日期:2015-04-22 **修回日期**:2015-07-23 **网络出版时间**:2016-01-04
基金项目:国家自然科学基金面上项目(61070234)
作者简介:罗 俊(1989-),男,硕士研究生,研究方向为数值方法与应用。
网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/61.1450.TP.20160104.1505.036.html

R^m 中的闭凸子集, $\boldsymbol{A}$ 是 $R^{m\times n}$ 的实矩阵,多集合分裂可行问题[2]就是要寻找一个向量 $\boldsymbol{x}^*$(如果这样的向量 $\boldsymbol{x}^*$ 是存在的): $\boldsymbol{x}^* \in C = \bigcap_{i=1}^{t} C_i$ 使得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^* \in Q = \bigcap_{j=1}^{r} Q_j$。其中, $t, r \geqslant 1$ 是正整数。

多集合分裂可行问题产生于工程实践,是一类重要的最优化问题,在医学[3]、信号处理[2]和图像重建[4]等领域中有着广泛的应用。MSSFP 是 SFP 的推广与泛化,Xu Hongkun 在文献[2]中最早提出了 MSSFP。已经有不少人对 MSSFP 的求解算法进行了研究,也取得了一定的进展。Censor 等在文献[3-4]中给出了一种求解 MSSFP 的投影算法:

定义逼近函数:

$$p(x) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\alpha_i \| P_{C_i}(x) - x \|^2 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{M}\beta_j \| P_{Q_j}(\boldsymbol{A}x) - \boldsymbol{A}x \|^2$$

$$x^{k+1} = P_{\Omega}\{x^k + s(\sum_{i=1}^{N}\alpha_i(P_{C_i}(x^k) - x^k) + \sum_{j=1}^{M}\beta_j \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(P_{Q_j}(\boldsymbol{A}x^k) - \boldsymbol{A}x^k))\}$$

其中, Ω 是闭凸子集且 $\Omega \in R^n$;$0 < s < 2/L$, $L = \sum_{i=1}^{N}\alpha_i + \rho(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\sum_{j=1}^{M}\beta_j$。另外 $\rho(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})$ 是 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 的谱半径,对任意的 $i,j,\alpha > 0,\beta > 0$。同时,Censor 等还证明了该算法的弱收敛性。

随着人们对分裂可行问题研究的深入,衍生了一系列反问题,定义如下:

设 C,Q 分别是 R^n,R^m 中的非空闭凸子集, $\boldsymbol{A}$ 是 $R^{m\times n}$ 中实矩阵, $\boldsymbol{A}^+$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 Moore - Penrose 广义逆。SFP 的反问题 ISFP 形如:寻找元素 y(如果这样的 y 存在):

$$y \in Q, \boldsymbol{A}^+ y \in C$$

根据 SFP 与 ISFP 的对偶性,可以通过研究 SFP 的求解算法进而研究 ISFP 的求解。杨庆之[5]给出了一种 ISFP 问题的求解算法,迭代格式如下:

$$y^{k+1} = P_Q(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^+ y^k - \eta(\boldsymbol{A}^+)^{\mathrm{T}}(I - P_C)\boldsymbol{A}^+ y^k)$$

在此基础上,王新艳和屈彪[6]给出了下列推广形式:

$$y^{k+1} = \lambda y^k + (1-\lambda)P_Q(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^+ y^k - \eta(\boldsymbol{A}^+)^{\mathrm{T}}(I - P_C)\boldsymbol{A}^+ y^k), \lambda \in [0,1]$$

推广之后的算法在迭代点的选取上具有更大的灵活性与更多的选择性。

后来,在前人的基础之上,Krasnoselski-Mann 提出了形如式(1)的迭代格式称为 KM 迭代[7]。

$$x^{k+1} = (1-\eta_k)x^k + \eta_k N(x^k),\ k = 0,1,\cdots \tag{1}$$

其中, N 是 R^n 中的非扩张算子; $\eta_k \in (0,1)$,特别地,当 N 是强制非扩张算子时[8], $\eta_k \in (0,2)$。

KM 迭代的目标是寻找算子 N 的不动点,许多领域的很多问题及反问题都可以归结为寻找某个算子 N 的不动点[9]。虽然 KM 迭代格式简单,但是它在求非扩张算子 N 的不动点时效果非常显著,并且为许多领域的算法提供了一个统一的框架。在文献[5]中,给出了 R^n 空间中的一些算法。为了扩展算法的适用范围,而不仅仅局限于 R^n 空间,现在希望将其中的某些算法在 Hilbert 空间中加以推广利用。

2　预备知识

Hilbert 空间中的多集合分裂可行问题与前面提到的 R^n 空间中的多集合分裂可行问题类似,即寻找一个向量 $\boldsymbol{x}^*$(如果这样的向量 $\boldsymbol{x}^*$ 是存在的): $\boldsymbol{x}^* \in C = \bigcap_{i=1}^{t} C_i$ 使得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^* \in Q = \bigcap_{j=1}^{r} Q_j$。其中, $C_i, i = 1,2,\cdots,t$, $Q_j, j = 1,2,\cdots,r$ 分别为 Hilbert 空间 X_1 和 X_2 中的闭凸子集。

定义 1[10]:假设 X 为带有内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 和范数 $\|\cdot\|$ 的 Hilbert 空间,对给定的 $\Omega \in X, v \in X$,如下问题:

$$\min\{\|u - v\| \mid u \in \Omega\}$$

的解称之为 v 在 Ω 上的投影,记作 $P_{\Omega}(v)$。可以写成:

$$P_{\Omega}(v) = \arg\min\{\|u - v\| \mid u \in \Omega\}$$

若 Ω 是闭凸集,则对 $\forall v \in X, P_{\Omega}(v)$ 是唯一存在的。

定义 2[10]:设 Ω 是非空闭凸集, X_1, X_2 为 Hilbert 空间; F 是 $\Omega \subset X_1$ 到 X_2 的映射。

(1)对于 $\forall u,v \in \Omega$,有 $\langle u - v, F(u) - F(v)\rangle \geqslant 0$,则称 $f(x)$ 是 Ω 上的单调映射;

(2)对于 $\forall u,v \in \Omega$,有 $\langle u - v, F(u) - F(v)\rangle > 0$,则称 $f(x)$ 是 Ω 上的强单调映射;

(3)对于 $\forall u,v \in \Omega$,有 $\langle u - v, F(u) - F(v)\rangle > \mu\|u - v\|^2$, μ 是一正常数,则称 $f(x)$ 是 Ω 上的一致强单调映射;

(4)如果存在常数 $\lambda > 0$,使得 $\|F(u) - F(v)\| \leqslant \lambda\|u - v\|, \forall u,v \in \Omega$,那么称 F 在 Ω 上是 Lipschitz 连续的,特别地, $\lambda = 1$ 时,称 F 为非扩张算子;

(5)如果存在常数 $\alpha > 0$,使得 $\langle F(u) - F(v), u - v\rangle \geqslant \alpha\|F(u) - F(v)\|^2, \forall u,v \in \Omega$,那么称 F 在 Ω 上是强制的,特别地, $\alpha = 1$ 时,称 F 为强制非扩张算子。

定义 3[10]:

(1)设 H 和 $\{H_k\}_{k=0}^{\infty}$ 是 Hilbert 空间中的算子,如果对 Hilbert 空间中的一切 x 有:

$$\lim_{x\to\infty}\|H_k(x) - H(x)\| = 0$$

则称 $\{H_k\}_{k=0}^{\infty}$ 收敛到 H。

(2)给定 $\forall\rho \geqslant 0$,Hilbert 空间中算子 H_1,H_2 的 ρ –距离定义为:

$$D_\rho(H_1,H_2)=\sup\{\|H_1(x)-H_2(x)\| \mid \|x\| \leqslant \rho\} \quad (2)$$

(3)设 C_1,C_2 是 Hilbert 空间中非空闭凸子集,C_1,C_2 之间的 ρ –距离定义为:

$$d_\rho(C_1,C_2)=\sup\{\|P_{C_1}(x)-P_{C_2}(x)\| \mid \|x\| \leqslant \rho\} \quad (3)$$

定义 4[10-11]:设 C,$\{C_k\}_{k=0}^{\infty}$ 分别是 Hilbert 空间中的子集和子集序列,称序列 $\{C_k\}_{k=0}^{\infty}$ Mosco –收敛到 C,记作 $C_k \xrightarrow{M} C$,如果

(1) 对一切 $x \in C$,存在序列$\{x^k\}_{k=0}^{\infty}$,其中 $x^k \in C_k(k=0,1,2,\cdots)$,使得$\lim\limits_{k\to\infty}x^k = x$;

(2) 对一切序列$\{x^{k_j}\}_{j=0}^{\infty}$,其中 $x^{k_j} \in C_{k_j}(j=0,1,2,\cdots)$,使得$\lim\limits_{j\to\infty}x^{k_j} = x$ 有 $x \in C$。

注:设 C 和 $C_k(k=0,1,2,\cdots)$ 是 Hilbert 中的非空凸闭子集,如果序列 $\{C_k\}_{k=0}^{\infty}$Mosco –收敛到 C,那么投影序列$\{P_{C_k}\}_{k=0}^{\infty}$ 收敛到 P_C。对于 MSSFP,设 C_i 和 $C_{i,k}(i=1,2,\cdots,t)$ 是 Hilbert 空间中的非空闭凸子集,那么 $C_{i,k} \xrightarrow{M} C_i$。

投影的性质有以下定理:

定理 1[12]:若 Ω 是 Hilbert 空间 X 中的非空闭凸集,则有:

$$\langle v-P_\Omega(v),u-P_\Omega(v)\rangle \leqslant 0,\forall v \in X,\forall u \in \Omega$$

证明:根据投影定义得到

$$\|v-P_\Omega(v)\|^2 \leqslant \|v-w\|^2,\forall w \in \Omega$$

因为 $\Omega \subset X$ 是非空闭凸集,则对于 $\forall u \in \Omega$,$0<\sigma<1$ 有:

$$\sigma u+(1-\sigma)P_\Omega(v)=P_\Omega(v)+\sigma(u-P_\Omega(v)) \in \Omega$$

又由于 $\|v-P_\Omega(v)\| \leqslant \|v-t\| \Leftrightarrow \|v-P_\Omega(v)\|^2 \leqslant \|v-t\|^2$,则有:

$$\begin{aligned}\|v-P_\Omega(v)\|^2 &\leqslant \|v-(P_\Omega(v)+\sigma(u-P_\Omega(v)))\|^2=\|v-P_\Omega(v)\|^2-\\&\quad 2\sigma(v-(P_\Omega(v))(u-P_\Omega(v))+\\&\quad \sigma^2\|u-P_\Omega(v)\|^2\end{aligned}$$

整理后得:

$$\langle v-P_\Omega(v),u-P_\Omega(v)\rangle \leqslant \frac{\sigma}{2}\|u-P_\Omega(v)\|^2$$

令 $\sigma \to 0_+$,得:

$$\langle v-P_\Omega(v),u-P_\Omega(v)\rangle \leqslant 0$$

证毕。

定理 2[11-12]:若 $\Omega \subset X$ 是非空闭凸集,$\forall v,u \in X$,$z \in \Omega$ 则有:

(1) $\langle P_\Omega(u)-u,z-P_\Omega(u)\rangle \geqslant 0$

(2) $\langle P_\Omega(u)-P_\Omega(v),u-v\rangle \geqslant 0$

(3) $\|P_\Omega(v)-P_\Omega(u)\| \leqslant \|v-u\|$

下面介绍收敛性分析中需要用到的 KM 定理。

定理 3[12-13]:设 $H,H_k(k=0,1,\cdots)$ 是 Hilbert 空间中的非扩张算子,且 $\lim\limits_{k\to\infty}H_k=H$,$\eta_k \in (0,1)$ 满足 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\eta_k(1-\eta_k)=+\infty$。若对任意给定的 $\rho>0$ 有 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\eta_k D_\rho(H_k,H)<+\infty$,则由下列迭代生成的序列 $\{x^k\}_{k=0}^{\infty}$:

$$x^{k+1}=(1-\eta_k)x^k+\eta_k H_k(x^k) \quad (4)$$

收敛到 H 的一个不动点(当 H 存在不动点时)。更进一步,如果 $H,H_k(k=0,1,\cdots)$ 是 Hilbert 空间中的强制非扩张算子,$\eta_k \in (0,2)$ 满足 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\eta_k(2-\eta_k)=+\infty$,结论仍然成立。

3　算法及其证明

对于多集合分裂可行问题,首先作下面的假设:

(H_1) MSSFP 的解集非空;

(H_2)非空闭凸集 $C_i=\{x \in X_1 \mid c_i(x) \leqslant 0\}$,其中 $c_i:X_1 \to R$ 是凸函数,非空闭凸集 $Q_j=\{y \in X_2 \mid q_j(y) \leqslant 0\}$,其中 $q_j:X_2 \to R$ 是凸函数,$C=\bigcap\limits_{i=1}^{t}C_i$,$Q=\bigcap\limits_{j=1}^{r}Q_j$,这里 X_1,X_2 是 Hilbert 空间;

(H_3)对 $\forall x \in X_1$,至少存在一个次梯度 $\xi \in \partial c_i(x)$,其中

$$\partial c_i(x)=\{\xi \in X_1 \mid c_i(z) \geqslant c_i(x)+\langle\xi,z-x\rangle,\forall z \in X_1\}$$

对 $\forall y \in X_2$,至少存在一个次梯度 $\eta \in \partial q_j(y)$,其中

$$\partial q_j(y)=\{\eta \in X_2 \mid q_j(u) \geqslant q_j(y)+\langle\eta,u-y\rangle,\forall u \in X_2\}$$

为了求解 MSSFP,定义逼近函数:

$$f(x)=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{r}\beta_j\|P_{Q_j}(\boldsymbol{A}x)-\boldsymbol{A}x\|^2$$

其中对任意的 $1 \leqslant j \leqslant r$,$\beta_j>0$,函数 $f(x)$ 的梯度 $\nabla f(x)=\sum\limits_{j=1}^{r}\beta_j\boldsymbol{A}^*(I-P_{Q_j})\boldsymbol{A}x$。

那么寻找 MSSFP 的一个解,就可以转化为求解如下最小值问题:

$$\min\{f(x) \mid x \in C\}$$

Censor 等提出了以下的迭代公式:

$$x^{k+1}=P_{\Omega}\{x^k+s(\sum_{i=1}^{t}\alpha_i(P_{C_i}(x^k)-x^k)+\sum_{j=1}^{r}\beta_j\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(P_{Q_j}(\boldsymbol{A}x^k)-\boldsymbol{A}x^k))\}$$

后来又有研究者对单集合分裂可行问题的 CQ 算法进行了改进,令上述迭代公式中 $s=\alpha_k=\beta\gamma^{m_k}$,其中 β,γ 是给定的常数,且满足 $\beta>0,\gamma\in(0,1)$,m_k 是使下列不等式:

$$f(x^{k+1})\leqslant f(x^k)-\sigma<\nabla f(x^k),x^k-x^{k+1}>$$

成立的最小非负整数,常数 $\sigma\in(0,1)$。

将算法将推广到多集合分裂可行问题,在已有算法的基础上,利用 KM 迭代得到一种自适应不精确算法 1。

算法 1:给定常数 $\gamma>0$, $l\in(0,1)$, $\mu\in(0,1)$, $\alpha_i>0,\sum_{i=1}^{t}\alpha_i=1,\eta_k\in(0,2),k=0,1,2,\cdots$,任取 x_0 设:

$$\bar{x}^k=\sum_{i=1}^{t}\alpha_iP_{C_{i,k}}(x^k-\lambda_k\nabla f_k(x^k)) \tag{5}$$

其中, $\lambda_k=\gamma l^{m_k}$,m_k 是使下式成立的最小非负整数。

$$\|\nabla f_k(x^k)-\nabla f_k(\bar{x}^k)\|_2\leqslant\mu\frac{\|x^k-\bar{x}^k\|_2}{\lambda_k} \tag{6}$$

令

$$\bar{x}^{k+1}=\sum_{i=1}^{t}\alpha_iP_{C_{i,k}}(x^k-\lambda_k\nabla f_k(\bar{x}^k)) \tag{7}$$

$$x^{k+1}=(1-\eta_k)x^k+\eta_k\bar{x}^{k+1} \tag{8}$$

定义算子:

$$H(x^k)=\sum_{i=1}^{t}\alpha_iP_{C_i}(x^k-\lambda_k\sum_{j=1}^{r}\beta_j\boldsymbol{A}^*(I-P_{Q_j})\boldsymbol{A}\bar{x}^k) \tag{9}$$

$$H_k(x^k)=\sum_{i=1}^{t}\alpha_iP_{C_{i,k}}(x^k-\lambda_k\sum_{j=1}^{r}\beta_j\boldsymbol{A}^*(I-P_{Q_{j,k}})\boldsymbol{A}\bar{x}^k) \tag{10}$$

注:算子 H 和 H_k 是非扩张算子,算子序列 $\{H_k\}_{k=0}^{\infty}$ 收敛到 H,H 的不动点就是原问题的解。

由于正交投影 $P_{C_{i,k}}$ 是强制非扩张算子,于是有:

$$\begin{aligned}\langle H_kx-H_ky,x-y\rangle&=\sum_{i=1}^{t}\alpha_i\langle P_{C_{i,k}}x-P_{C_{i,k}}y,x-y\rangle\geqslant\\&\sum_{i=1}^{t}\alpha_i\ \|P_{C_{i,k}}x-P_{C_{i,k}}y\|^2=\\&(\sum_{i=1}^{t}\alpha_i)(\sum_{i=1}^{t}\alpha_i\ \|P_{C_{i,k}}x-P_{C_{i,k}}y\|^2)\geqslant\\&(\sum_{i=1}^{t}\alpha_i^{1/2}\alpha_i^{1/2}\|P_{C_{i,k}}x-P_{C_{i,k}}y\|)^2\geqslant\\&\|H_kx-H_ky\|^2\end{aligned}$$

所以, H_k 是强制非扩张算子。同理, H 也是强制非扩张算子。

由式(8)知式(7)可以写成:

$$x^{k+1}=(1-\eta_k)x^k+\eta_kH_k(x^k) \tag{11}$$

定理 4:设 $\{x^k\}$ 是由算法 1 生成的序列,若 $(\mathrm{H}_1)-(\mathrm{H}_3)$ 成立,如果 H 存在不动点且对 $\forall\bar{\rho}>0,\eta_k\in[0,2],\sum_{k=0}^{\infty}\eta_k(2-\eta_k)=+\infty$ 满足:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\eta_k(\sum_{i=1}^{t}\alpha_id_{\bar{\rho}}(C_{i,k},C_i)+\lambda_k\|\boldsymbol{A}^*\|\sum_{j=1}^{r}\beta_jd_{\bar{\rho}}(Q_{j,k},Q_j))<\infty \tag{12}$$

则 $\{x^k\}$ 收敛到 H 的一个不动点。

证明:记

$$y^k=x^k-\lambda_k\sum_{j=1}^{r}\beta_j\boldsymbol{A}^*(I-P_{Q_{j,k}})\boldsymbol{A}\bar{x}^k \tag{13}$$

$$y=x^k-\lambda_k\sum_{j=1}^{r}\beta_j\boldsymbol{A}^*(I-P_{Q_j})\boldsymbol{A}\bar{x}^k \tag{14}$$

对 $\forall x\in H,\|x\|\leqslant\rho,\rho>0$ 有

$$\begin{aligned}\|H_k(x^k)-H(x^k)\|&=\|\sum_{i=1}^{t}\alpha_iP_{C_{i,k}}(y^k)-\sum_{i=1}^{t}\alpha_iP_{C_i}(y)\|\leqslant\sum_{i=1}^{t}\alpha_i\|P_{C_{i,k}}(y^k)-P_{C_i}(y)\|\leqslant\\&\sum_{i=1}^{t}\alpha_i\|P_{C_{i,k}}(y^k)-P_{C_{i,k}}(y)\|+\sum_{i=1}^{t}\alpha_i\|P_{C_{i,k}}(y)-P_{C_i}(y)\|\end{aligned} \tag{15}$$

由于正交投影是非扩张的,所以

$$\sum_{i=1}^{t}\alpha_i\|P_{C_{i,k}}(y^k)-P_{C_{i,k}}(y)\|\leqslant\sum_{i=1}^{t}\alpha_i\|y^k-y\|=\|y^k-y\| \tag{16}$$

将式(13)、(14)代入式(15)再结合式(16)得到:

$$\begin{aligned}\|H_k(x^k)-H(x^k)\|\leqslant&\\&\lambda_k\sum_{j=1}^{r}\beta_j\|\boldsymbol{A}^*(P_{Q_{j,k}}(\boldsymbol{A}\bar{x}^k)-P_{Q_j}(\boldsymbol{A}\bar{x}^k))\|+\\&\sum_{i=1}^{t}\alpha_i\|P_{C_{i,k}}(y)-P_{C_i}(y)\|\end{aligned} \tag{17}$$

根据对任意有界线性算子 B[14],有 $\|Bx\|\leqslant\|B\|\ \|x\|$,可以得到:

$$\begin{aligned}\|H_k(x^k)-H(x^k)\|\leqslant&\\&\lambda_k\sum_{j=1}^{r}\beta_j\|\boldsymbol{A}^*\|\ \|P_{Q_{j,k}}(\boldsymbol{A}\bar{x}^k)-P_{Q_j}(\boldsymbol{A}\bar{x}^k)\|+\\&\sum_{i=1}^{t}\alpha_i\|P_{C_{i,k}}(y)-P_{C_i}(y)\|=\\&\lambda_k\|\boldsymbol{A}^*\|\sum_{j=1}^{r}\beta_j\|P_{Q_{j,k}}(\boldsymbol{A}\bar{x}^k)-P_{Q_j}(\boldsymbol{A}\bar{x}^k)\|+\\&\sum_{i=1}^{t}\alpha_i\|P_{C_{i,k}}(y)-P_{C_i}(y)\|\end{aligned}$$

由式(2)和式(3)得到:

$$D_{\rho}(H_k,H)\leqslant\sum_{i=1}^{t}\alpha_id_{\bar{\rho}}(C_{i,k},C_i)+$$

$$\lambda_k \| A^* \| \sum_{j=1}^{r} \beta_j d_{\bar{\rho}}(Q_{j,k}, Q_j) \quad (18)$$

其中,$\bar{\rho} \geqslant \max\{\|\bar{x}^k\|, \|A\bar{x}^k\|, \|y\|\}$ 。

因此,由定理 3 和式(12)得到 $\{x^k\}$ 收敛到 H 的一个不动点,即 MSSFP 的解,证毕。

4　结束语

多集合分裂可行问题在现实中的许多领域有着广泛的应用。到目前为止,多集合分裂可行问题的许多算法的求解都是在 R^n 空间中完成的,而在 Hilbert 空间中的推广应用还有待完善。文中基于 R^n 空间中求解多集合分裂可行问题的 KM 迭代算法,给出了 Hilbert 空间中的一种自适应不精确算法,以及算法的收敛性证明。

参考文献:

[1] Censor Y, Elfving T. A multi–projection algorithm using Bregman projections in aproduct space[J]. Number Algorithms,1994,8:221–239.

[2] Xu Hong kun. A variable Krasnosel'ski–Mann algorithm and the multiple–set split feasibility problem[J]. Inverse Problems,2006,22:2021–2034.

[3] Censor Y. Row–action methods for huge and sparse systems and their applications[J]. SIAM Review,1981,23(4):444–466.

[4] Censor Y, Bortfeld T, Martin B, et al. Unified approach for inversion problems in intensity–modulated radiation therapy [J]. Physics in Medicine and Biology, 2006, 51: 2353–2365.

[5] 杨庆之,赵金玲. 分裂可行问题(SFP)的投影算法[J]. 计算数学,2006,28(2):121–132.

[6] 王新艳,屈　彪. 求解分裂可行问题逆问题的算法推广[J]. 泰山学院学报,2010(6):10–14.

[7] Zhao Jinling, Yang Qingzhi. A note on the Krasnoselski–Mann theorem and its generalizations[J]. Inverse Problems, 2007,23:1011–1016.

[8] Censor Y, Motova A, Segal A. Perturbed projections and subgradient projections for the multiple–sets split feasibility problem[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications,2007,327(2):1244–1256.

[9] Bauschke H H, Borwein J M. On projection algorithms for solving convex feasibility problems [J]. SIAM Review, 1996,38:367–426.

[10] Eicke B. Iteration methods for convexly constrained ill–posed problems in Hilbert space[J]. Numerical Functional Analysis and Optimization,1992,13(5–6):413–429.

[11] Wang C, Xiu N. Convergence of the gradient projection method for generalized convex minimization[J]. Computational Optimization and Applications, 2000, 16 (2): 111–120.

[12] Zarantonello E H. Projections on convex sets in Hilbert space and spectral theory [D]. Wisconsin: University of Wisconsin,1971.

[13] 何炳生. 论求解单调变分不等式的一些投影收缩算法[J]. 计算数学,1996(1):97–103.

[14] 徐成贤,陈志平,李乃成. 近代优化方法[M]. 北京: 科学出版社,2002:18–35.

(上接第 42 页)

[4] Rose P. Forensic speaker identification[M]. London: Taylor & Francis,2002.

[5] Tull R G, Rutledge J C, Larson C R. Cepstral analysis of "cold–speech" for speaker recognition: a second look[J]. Journal of Acoustical Society of America, 1996, 100 (4): 2760–2760.

[6] Reynolds D A, Rose R C. Robust text–independent speaker identification using Gaussian mixture speaker models [J]. IEEE Trans on Speech and Audio Processing,1995,3(1):72–83.

[7] Reynolds D A, Quatieri T F, Dunn R B. Speaker verification using adapted Gaussian mixture models [J]. Digital Signal Processing,2000,10(1):19–41.

[8] Reynolds D A. Speaker identification and verification using Gaussian mixture speaker models [J]. Speech Communication,1995,17(1–2):91–108.

[9] Akhoul M. Linear prediction of speakers from their voice [J]. Proc of IEEE,1976,64:460–475.

[10] 张军英. 说话人识别的现代方法与技术[M]. 西安:西北大学出版社,1994:14–16.

[11] 张玲华,郑宝玉. 随机信号处理[M]. 北京:清华大学出版社,2003.

[12] Zhu Weizhong, O'Shaughnessy D. Incorporating frequency masking filtering in a standard MFCC feature extraction algorithm[C]//Proc of 7th international conference on signal processing. [s. l.]:IEEE,2004:617–620.

[13] 王　青. 基于神经网络的汉语语音情感识别的研究[D]. 杭州:浙江大学,2008.

[14] Yu P, Seide F T B. A hybrid word/phoneme–based approach for improved vocabulary–independent search in spontaneous speech[C]//Proc of INTERSPEECH 2004. Jeju Island, Korea:[s. n.],2004:293–296.

[15] Chen B. Voice retrieval of Mandarin broadcast news speech [J]. International Journal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence,2006,20(1):91–109.

Hilbert 空间上多集合分裂可行问题的KM 迭代算法

作者： 罗俊， 刘健， LUO Jun， LIU Jian
作者单位： 罗俊,LUO Jun(南京邮电大学 理学院,江苏 南京,210023)， 刘健,LIU Jian(南京邮电大学 通信与信息工程学院,江苏 南京,210003)
刊名： 计算机技术与发展ISTIC
英文刊名：
年，卷(期)： 2016(1)