

多阈值神经网络系统中的随机共振研究

王友国,姜梦琦,翟其清

(南京邮电大学 通信与信息工程学院,江苏 南京 210003)

摘要:文中研究了求和平均网络中的互信息随噪声强度的变化关系。将神经网络模型中典型的求和网络改进为求和平均网络,采用中心极限定理,将输出信号近似为连续的高斯分布,得到输入、输出均为连续信号时的系统互信息,基于此互信息研究了在加性噪声和乘性噪声共同作用下多阈值神经网络系统中的阈上随机共振现象。研究表明,对每一个固定的系统阈值,改变加性噪声强度比改变乘性噪声强度更能诱导阈上随机共振。另外,系统阈值的增加使信号主要成分在阈下,更能诱导阈上随机共振,但会降低阈上随机共振的功效。乘性或加性噪声强度以及系统阈值水平是阈上随机共振现象产生的重要条件,噪声强度以及系统阈值的适当选取会使得阈上随机共振现象更加明显。

关键词:求和平均网络;中心极限定理;互信息;阈上随机共振

中图分类号:TP31

文献标识码:A

文章编号:1673-629X(2015)12-0032-05

doi:10.3969/j.issn.1673-629X.2015.12.008

Research on Stochastic Resonance in Multi-threshold Neural Network System

WANG You-guo, JIANG Meng-qi, ZHAI Qi-qing

(College of Communication and Information Engineering, Nanjing University of Posts and Telecommunications, Nanjing 210003, China)

Abstract: In this paper, the relationship between the mutual information and the noise intensity of the mutual information in the sum-and-average network is studied. The typical sum-network in neural networks is improved to sum-and-average network. By using the central limit theorem, output signal is approximated as continuous Gaussian distribution, and mutual information can be obtained when the input and output signals are all continuous. Based on this mutual information, a study is made on the Supra-threshold Stochastic Resonance (SSR) phenomenon under both additive and multiplicative noise in a multi-threshold neural networks system. The numerical calculation and the computer simulation found that for a fixed system threshold, by changing the additive noise intensity SSR occurs more easily than by changing the multiplicative noise intensity. In addition, the increase of the system threshold can increase the signal components that are under the threshold, and thus SSR takes place more easily, but cut down the efficiency of SSR at the same time. The multiplicative or additive noise intensity, and the system threshold level are important factors to stimulate SSR. A reasonable noise intensity and threshold value would lead to a more significant SSR.

Key words: sum-and-average network; central limit theorem; mutual information; supra-threshold stochastic resonance

0 引言

在以往的通讯领域中,噪声常被作为一种抑制信号传输能力、影响检测信噪比提高的干扰来看待。随着非线性科学的发展,人们发现以往对噪声的认识并不完全正确—至少在加之特定的条件时,它会对建立有效的系统起到积极的,甚至创造性的作用。在一些非线性系统中,噪声改善信号处理和信息传输的现象称为随机共振(Stochastic Resonance, SR)现象,该现象

最早是由 Benzi 等^[1]在 1981 年提出的,当时用于解释远古气象学中冰川期与暖气候期周期性交替出现的现象。目前,SR 的研究已经涉及许多领域^[2-14]。

经典的随机共振研究信号处于阈下时,噪声对信息传输起到了积极作用。而当信号幅值大于系统阈值时,Stocks 在研究 Collins 等^[8]提出的神经网络模型时同样出现了类似于经典的随机共振现象,将其称为阈上随机共振(Supra-threshold Stochastic Resonance,

收稿日期:2015-03-31

修回日期:2015-07-03

网络出版时间:2015-11-19

基金项目:国家自然科学基金资助项目(61179027)

作者简介:王友国(1968-),男,教授,研究方向为信号与信息处理;姜梦琦(1991-),女,硕士研究生,研究方向为信号与信息处理。

网络出版地址: <http://www.cnki.net/kcms/detail/61.1450.TP.20151119.1113.080.html>

SSR)^[15]。由于 SR 作用于弱信号, SSR 的提出可以作为经典随机共振理论在大幅值信号情况下的有益补充,并且可以用来解释神经元在噪声背景下传输信号等生物现象,因此基于随机共振背景下的神经网络研究^[15-16]一度成为热点。SSR 的研究成果更为丰富^[15-25]。

文献[22-27]中作者研究的神经网络模型的输出为各阈值单元输出的简单求和,得到一个离散信号,然而对于一真实的神经网络系统,其输出往往是连续信号而非离散信号。因此在文献[22-27]的基础上,文中对模型进行一定的改进,将模型中典型的求和网络改进为求和平均网络,通过中心极限定理,将输出信号近似为连续的高斯分布,得到输入、输出均为连续信号时的系统互信息量。文献[28-29]已经通过求和平均网络初步研究了阈上随机共振现象。文中将对文献[28-29]中所研究的求和平均网络模型做进一步分析,以互信息为测度继续研究加性噪声和乘性噪声共同作用下的阈上随机共振现象。

1 多阈值神经网络模型

加性和乘性噪声共同作用下的多阈值神经网络模型^[28-29]如图 1 所示。

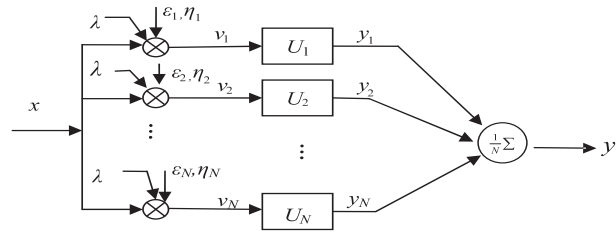


图 1 多阈值神经网络模型

上述系统中,输入信号 x 是一个均值为 0、方差为 σ^2 的高斯信号,其概率密度函数为:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \quad (1)$$

其中, λ 为输入确定性信号 x 在系统中的耦合强度; ε_i 是高斯乘性噪声; η_i 是高斯加性噪声。

令 ε_i , η_i 之间均是互相独立的并服从标准高斯分布,即

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_i, \varepsilon_j \rangle &= 0, \langle \eta_i, \eta_j \rangle = 0 \quad (i \neq j) \\ \langle \varepsilon_i, \eta_j \rangle &= 0 \quad (i, j = 1, 2, \dots, N) \end{aligned} \quad (2)$$

$U_i (i = 1, 2, \dots, N)$ 为阈值,取 $U_1 = U_2 = \dots = U_N = U$ 。 y_i 是第 i 个阈值节点的输出信号,可由 Heaviside 函数表示为:

$$y_i = \begin{cases} 1, & v_i \geq U_i \\ 0, & v_i < U_i \end{cases} \quad (3)$$

其中

$$v_i = \lambda x + M\varepsilon_i x + A\eta_i \quad (4)$$

式中, v_i 是经过系统耦合后在乘性和加性噪声共同作用下的一个输出; M 和 A 分别是乘性噪声强度和加性噪声强度。当 $M \rightarrow 0$ 时,系统变为只受加性噪声作用^[23-25]的情形;当 $A \rightarrow 0$ 时,系统变为只受乘性噪声作用^[26]的情形。

由式(2)知,不同的 $v_i (i = 1, 2, \dots, N)$ 也是相互独立的。对事先给定的 x , v_i 服从均值为 λx , 方差为 $M^2 x^2 + A^2$ 的高斯分布,其条件概率密度函数为:

$$p_{v|x}(v_i|x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(M^2 x^2 + A^2)}} \exp\left(-\frac{(v_i - \lambda x)^2}{2(M^2 x^2 + A^2)}\right) \quad (5)$$

对于上述网络输出信号 $\bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i$, 当 $N \rightarrow \infty$ 时,由中心极限定理可近似为一高斯分布。其条件概率密度函数为:

$$p(\bar{y}|x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \frac{q_x(1-q_x)}{N}}} \exp\left(-\frac{(\bar{y} - q_x)^2}{2 \frac{q_x(1-q_x)}{N}}\right) \quad (6)$$

其中

$$\begin{aligned} q_x &= P\{y_i = 1|x\} = P\{v_i \geq U|x\} = \\ &= \int_U^\infty p_{v|x}(v_i|x) dv_i = \frac{1}{2} - \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(-\frac{U - \lambda x}{\sqrt{2(M^2 x^2 + A^2)}}\right) \end{aligned} \quad (7)$$

式中, erf 为误差函数, $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$ 。

2 系统的互信息

系统输入确定性信号 x 与输出信号 \bar{y} 之间的互信息为^[25]:

$$I = H_c(\bar{y}) - H_c(\bar{y}|x) \quad (8)$$

其中, $H_c(\bar{y})$ 为系统的输出信息熵; $H_c(\bar{y}|x)$ 为输入信号为 x 时的输出条件熵。

在图 1 所示的神经网络系统中有:

$$H_c(\bar{y}) = - \int_{-\infty}^{\infty} p(\bar{y}) \log_2 p(\bar{y}) d\bar{y} \quad (9)$$

$$H_c(\bar{y}|x) = - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(x) p(\bar{y}|x) \log_2 p(\bar{y}|x) dx d\bar{y} \quad (10)$$

其中

$$p(\bar{y}) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x) p(\bar{y}|x) dx =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi \frac{q_x(1-q_x)}{N}}} \exp\left(-\frac{(\bar{y}-q_x)^2}{2 \frac{q_x(1-q_x)}{N}}\right) dx \quad (11)$$

因此,式(9)和式(10)可分别表示为:

$$\begin{aligned} H_c(\bar{y}) &= - \int_{-\infty}^{\infty} p(\bar{y}) \log_2 p(\bar{y}) d\bar{y} = \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} p(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi \frac{q_x(1-q_x)}{N}}} \right. \\ &\quad \left. \exp\left(-\frac{(\bar{y}-q_x)^2}{2 \frac{q_x(1-q_x)}{N}}\right) dx \right) \times \\ &\quad \log_2 \left(\int_{-\infty}^{\infty} p(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi \frac{q_x(1-q_x)}{N}}} \right. \\ &\quad \left. \exp\left(-\frac{(\bar{y}-q_x)^2}{2 \frac{q_x(1-q_x)}{N}}\right) dx \right) d\bar{y} \quad (12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_c(\bar{y}|x) &= - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(x) p(\bar{y}|x) \log_2 p(\bar{y}|x) dx d\bar{y} = \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi \frac{q_x(1-q_x)}{N}}} \exp\left(-\frac{(\bar{y}-q_x)^2}{2 \frac{q_x(1-q_x)}{N}}\right) \times \\ &\quad \left(-\frac{1}{2} \log_2 \frac{2\pi q_x(1-q_x)}{N} - \frac{N(\bar{y}-q_x)^2}{2q_x(1-q_x)\ln 2} \right) dx d\bar{y} \quad (13) \end{aligned}$$

3 实验仿真

3.1 单独加性噪声或乘性噪声作用时的 SSR 现象

取式(4)中 $\lambda = 1$, 输入的高斯信号 x 的方差 $\sigma^2 = 1$, 阈值单元数 $N = 511$ 。图 2 和图 3 分别给出了互信息 I 作为乘性噪声强度 M 或加性噪声强度 A 的函数在不同阈值水平 U 下的变化曲线。

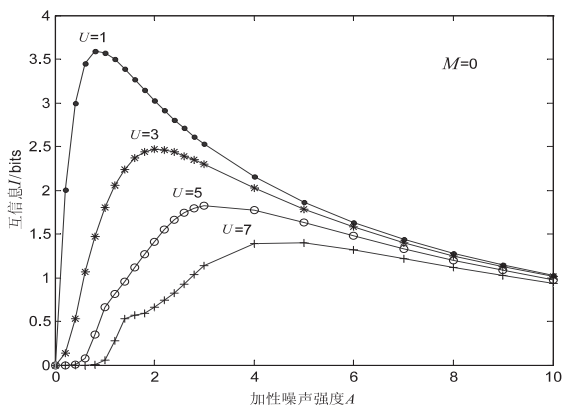


图 2 互信息 I 作为加性噪声强度 A 的函数随不同 U 的变化

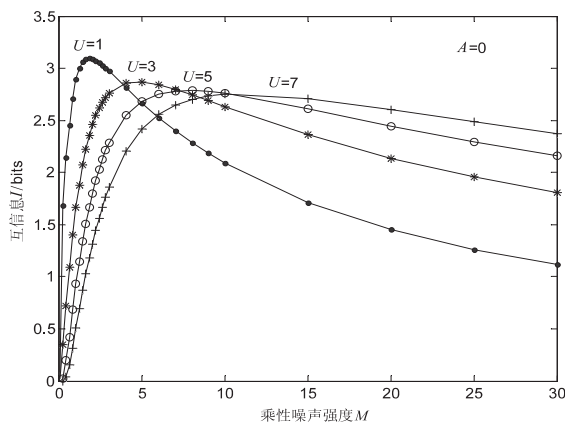


图 3 互信息 I 作为乘性噪声强度 M 的函数随不同 U 的变化

由图 2 可以看出,对所有系统阈值 U ,互信息 I 的变化曲线总是随 A 的增加先升后降,显示出 SSR 现象。并且随着 U 的增加,互信息的峰值下降并且右移,此时噪声恶化了阈上随机共振的功效。

由图 3 可以看出,当系统只受乘性噪声作用时,不同的系统阈值 U ,同样出现 SSR 现象。并且随着 U 的增加,互信息的峰值下降并且右移,噪声恶化阈上随机共振功效。

对比图 2 和图 3 可以发现,对每一个固定的系统阈值 U ,使得互信息达到峰值所需的最佳乘性噪声强度明显大于最佳加性噪声强度,这表明单独加性噪声情况下比单独乘性噪声情况下更容易诱导 SSR 现象发生。

3.2 加性噪声和乘性噪声共同作用时的 SSR 现象

图 4 和图 5 分别给出了在加性噪声和乘性噪声共同作用下,互信息 I 作为 A 和 M 的函数在不同 U 下的变化曲线。

从图 4 可以看出,当乘性噪声强度较小时 ($M = 0.5$),图 4(a) 中互信息 I 的变化曲线总是随 A 的增加先升后降,显示出标准 SSR 现象。并且随着 U 的增加,互信息的峰值下降并且右移,噪声恶化了阈上随机共振的功效。随着乘性噪声强度的增加 ($M = 1$),对比图 4(a) 与 (b) 可以发现,互信息的峰值在下降,显示出噪声对系统信息传输性能的改善效果下降。继续增加乘性噪声强度 ($M = 2$),图 4(c) 中显示在 $U = 1$ 时没有出现 SSR 现象,而 $U = 3, 5, 7$ 时 SSR 都发生,说明阈值的增加使得信号主要成分在阈下,经典 SR 影响增加,SSR 现象更容易发生。

从图 5 可以看出,当加性噪声强度较小时 ($A = 0.5$),对所有的 U 均出现 SSR 现象,且随着 U 的增大,互信息峰值在减小且右移,信息传输的效果在减弱。但随着 A 的增大 ($A = 1, 2$),图 5(b)、(c) 显示对于较小的阈值 U ,SSR 现象不存在,说明阈值的增加使得

SSR 现象更容易发生。

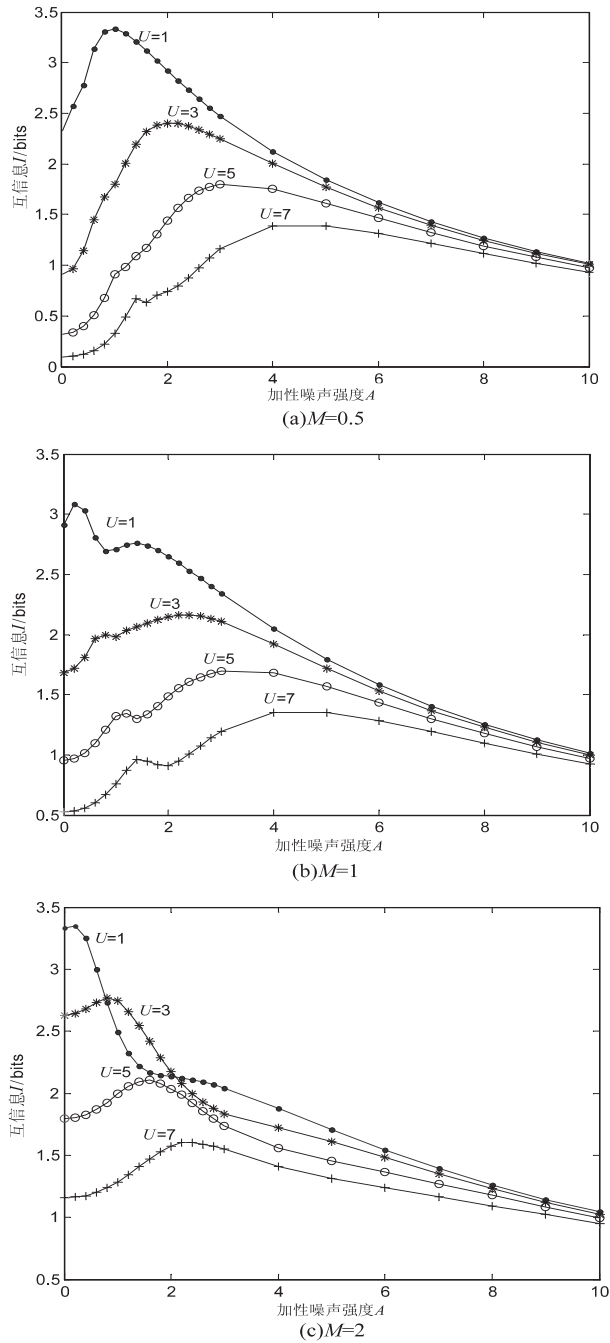


图 4 不同乘性噪声强度 M 时,互信息 I 作为 A 的函数随不同 U 的变化

图 4 与图 5 再次说明阈值的增加会使得阈上随机共振的功效降低;对比图 4 与图 5 可以看出,对每一个固定的系统阈值 U ,使得互信息达到峰值时所需的最佳乘性噪声强度明显大于最佳加性噪声强度,说明改变加性噪声强度比改变乘性噪声强度更容易诱导 SSR 现象发生,SSR 功效更好。

4 结束语

为更真实地研究多阈值神经网络,在已有的研究基础上对典型的神经网络中的求和网络做了进一步改

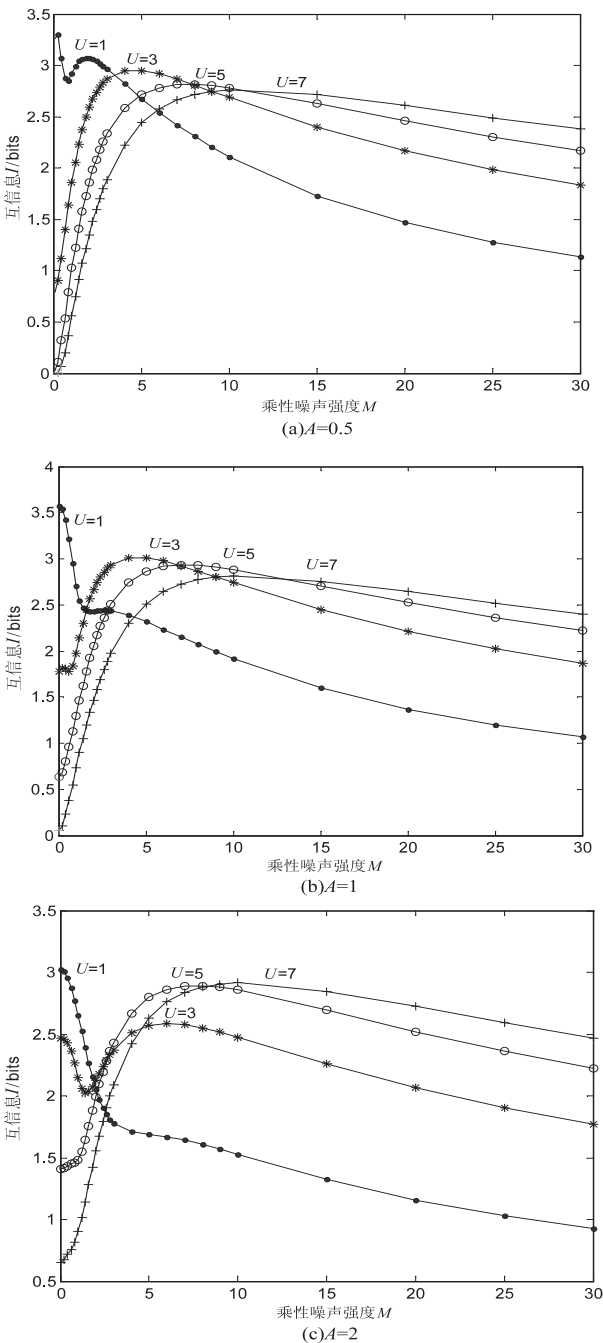


图 5 不同加性噪声强度 A 时,互信息 I 作为 M 的函数随不同 U 的变化

进,通过求和平均网络,采用中心极限定理,将输出信号近似为连续的高斯分布,得到输入、输出均为连续信号的系统互信息。文中以互信息为测度,讨论了加性噪声与乘性噪声共同作用下多阈值神经网络中的阈上随机共振现象。通过数值计算和计算机仿真发现,阈上随机共振现象的存在性及噪声增强信息传输性能与系统阈值和乘性或加性噪声强度的选择有较大关系。系统阈值的增加使信号当中处在阈下的成分增多,更能诱导阈上随机共振,但会降低阈上随机共振的功效。噪声强度以及系统阈值的适当选取会使得阈上随机共

振现象更加明显,能更好地增强信息传输性能。对每一固定的系统阈值,单独加性噪声情况下比单独乘性噪声情况下更容易诱导随机共振现象发生。此外,改变加性噪声强度比改变乘性噪声强度时阈上随机共振现象更容易发生。

参考文献:

- [1] Benzi R, Sutera A, Vulpiani A. The mechanism of stochastic resonance[J]. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 1981, 14(11): 453–457.
- [2] Fauve S, Heslot F. Stochastic resonance in a bistable system [J]. *Phys Lett*, 1983, 97A(1–2): 5–7.
- [3] Gammaitoni L, Hänggi P, Jung P. Stochastic resonance [J]. *Rev Mod Phys*, 1998, 70(1): 223–287.
- [4] Gingl Z, Kiss L B, Moss F. Non-dynamic stochastic resonance [J]. *Europhysics Letters*, 1995, 29: 191–196.
- [5] Mitaim S, Kosko B. Adaptive stochastic resonance [J]. *Proceeding of the IEEE*, 1998, 86(11): 2152–2183.
- [6] Zozor S, Amblard P O. Stochastic resonance in discrete-time nonlinear AR(1) models [J]. *IEEE Trans on Signal Processing*, 1999, 47(1): 108–122.
- [7] Collins J J, Chow C C, Imhoff T T. Aperiodic stochastic resonance in excitable systems [J]. *Phys Rev E*, 1995, 52(4): 3321–3324.
- [8] Collins J J, Chow C C, Imhoff T T. Stochastic resonance without tuning [J]. *Nature*, 1995, 376(20): 236–238.
- [9] Chapeau-Blondeau F, Godivier X. Theory of stochastic resonance in signal transmission by static nonlinear system [J]. *Phys Rev E*, 1997, 55(2): 1478–1495.
- [10] Zozor S, Amblard P O. Stochastic resonance in discrete-time nonlinear SETAR(1,2,0,0) model [C]//*Proc of IEEE signal process, workshop higher order stat. Banff Alta, Canada; IEEE*, 1997: 166–170.
- [11] Chapeau-Blondeau F. Noise-aided nonlinear Bayesian estimation [J]. *Physical Review E*, 2002, 66: 032101.
- [12] Kay S. Can detectability be improved by adding noise? [J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2000, 7(1): 8–10.
- [13] Zozor S, Amblard P O. On the use of stochastic resonance in sine detection [J]. *Signal Processing*, 2002, 82(3): 353–367.
- [14] Chapeau-Blondeau F. Stochastic resonance for an optimal detector with phase noise [J]. *Signal Processing*, 2003, 83: 665–670.
- [15] Stocks N G. Supra-threshold stochastic resonance in multilevel threshold systems [J]. *Physical Review Letters*, 2000, 84: 2310–2313.
- [16] Rousseau D, Duan F, Chapeau-Blondeau F. Supra-threshold stochastic resonance and noise-enhanced Fisher information in arrays of threshold devices [J]. *Physical Review E*, 2003, 68: 031107.
- [17] Chapeau-Blondeau F, Rousseau D. Noise-aided SNR amplification by parallel arrays of sensors with saturation [J]. *Physics Letters A*, 2006, 351(4–5): 231–237.
- [18] Duan F, Chapeau-Blondeau F, Abbott D. Theory of array stochastic resonance in a parallel array of nonlinear dynamical elements [J]. *Physics Letters A*, 2008, 372(13): 2159–2166.
- [19] McDonnell M D, Stocks N G, Abbott D. Optimal stimulus and noise distributions for information transmission via supra-threshold stochastic resonance [J]. *Physical Review E*, 2007, 75(6): 1–35.
- [20] Chen Hao, Varshney P K, Kay S, et al. Theory of the stochastic resonance effect in signal detection: part I – Fixed detectors [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2007, 55(7): 3172–3183.
- [21] Chen Hao, Varshney P K. Theory of the stochastic resonance effect in signal detection: part II Variable detectors [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2008, 56(10): 5031–5041.
- [22] Stocks N G, Mannella R. Generic noise-enhanced coding in neuronal arrays [J]. *Physical Review E*, 2001, 64(3): 030902.
- [23] Stocks N G. Information transmission in parallel threshold arrays: suprathreshold stochastic resonance [J]. *Physical Review E*, 2001, 63(4): 041114.
- [24] Stocks N G. Suprathreshold stochastic resonance; an exact result for uniformly distributed signal and noise [J]. *Physics Letters A*, 2001, 279(5): 308–312.
- [25] Stocks N G, Morse R P. Enhanced information transmission with signal-dependent noise in an array of nonlinear elements [J]. *Phys Rev E*, 2007, 75(2): 021121.
- [26] 郭永峰, 谭建国. 一类非线性神经网络系统的超阈值随机共振现象 [J]. *物理学报*, 2012, 61(17): 55–59.
- [27] 李欢, 王友国. 一类非线性神经网络中噪声改善信息传输 [J]. *物理学报*, 2014, 63(12): 59–65.
- [28] 龙慧, 李宏, 滑瑞霞. 基于阈上随机共振现象的弱信号检测 [J]. *微处理机*, 2011, 32(4): 25–27.
- [29] 张礁石, 杨子贤, 卢结成. 阈值阵列模型与超阈值随机共振 [J]. *通信技术*, 2012, 45(7): 122–124.

多阈值神经网络系统中的随机共振研究

作者：[王友国](#)，[姜梦琦](#)，[翟其清](#)，[WANG You-guo](#)，[JIANG Meng-qi](#)，[ZHAI Qi-qing](#)
作者单位：[南京邮电大学 通信与信息工程学院, 江苏 南京, 210003](#)
刊名：[计算机技术与发展](#)[ISTIC](#)
英文刊名：[Computer Technology and Development](#)
年，卷(期)：2015, 25(12)

引用本文格式：[王友国](#). [姜梦琦](#). [翟其清](#). [WANG You-guo](#). [JIANG Meng-qi](#). [ZHAI Qi-qing](#) [多阈值神经网络系统中的随机共振研究](#)[期刊论文]-[计算机技术与发展](#) 2015(12)