

# 一种求解 $K$ 最短路径问题的新算法

赵礼峰, 于汶雨

(南京邮电大学 理学院, 江苏 南京 210023)

**摘要:**种群分割是混合蛙跳算法的重要组成部分,不同的种群分割方法对混合蛙跳算法的收敛速度的影响不同。文中首先在原始混合蛙跳算法基础上,提出一种新的种群分割方法,使得每个族群中的个体适应度趋近均衡。然后结合 Yen 算法的偏离路径思想提出一种新的学习策略,对算法迭代方法进行改进。改进后的混合蛙跳算法适用于求解  $K$  最短路径问题。最后对改进后的算法进行仿真实验。首先选取单调递归的 Dijkstra 算法对改进算法可行性进行验证,结果表明改进后的算法是可行的;再选取遗传算法与改进算法进行对比,结果表明改进后的算法在寻优精确度、时间效率和稳定性方面均优于遗传算法。

**关键词:**混合蛙跳算法;种群分割;学习策略; $K$  最短路径

中图分类号:TP301.6

文献标识码:A

文章编号:1673-629X(2015)11-0067-04

doi:10.3969/j.issn.1673-629X.2015.11.014

## A New Algorithm for Solving $K$ Shortest Path Problem

ZHAO Li-feng, YU Wen-yu

(College of Sciences, Nanjing University of Posts and Telecommunications,  
Nanjing 210023, China)

**Abstract:** Population segmentation is an important part of shuffled frog leaping algorithm of which convergence rate is affected by different population segmentation methods. A new segmentation method on the basis of the original SFLA is proposed in this paper so that the individual fitness in each ethnic group approaches equilibrium. Then present a new learning strategy combined with the deviated path idea of the Yen algorithm to improve the algorithm's iterative method. The improved shuffled frog leaping algorithm is suitable to solve the  $K$ -shortest path problem. Finally, do the simulation for the improved algorithm. Firstly, the monotonous recursive Dijkstra algorithm is selected to verify the feasibility of the improved algorithm and the results show that the improved algorithm is feasible. And then the genetic algorithm is selected to compare with the improved algorithm, and the results show that the improved algorithm's optimization accuracy, time efficiency and stability is superior to the genetic algorithm.

**Key words:** Shuffled Frog Leaping Algorithm (SFLA); segmentation population; learning strategy;  $K$  shortest path

## 0 引言

$K$  最短路径问题<sup>[1]</sup>在现代计算机网络及交通系统中扮演着极为重要的角色,涉及很多领域,如通信、网络、交通工程、人工智能等<sup>[2-3]</sup>。例如在交通查询系统中,需要给用户提供多条可供选择的最短路径、QoS 路由问题、机器人动作规划问题等都可以看作是  $K$  最短路径问题。因此,如何快速求解  $K$  最短路径问题受到了越来越多的关注,并先后提出了不同的求解方法。文献[4]中,毛少武等基于 Dijkstra 算法与 MPS 算法,提出了一种改进的  $K$  最短路径搜索算法,并应用于通讯

网络当中;文献[5-7]利用“偏离路径”的思想、性质给出了计算  $K$  条最短路径的递推公式,只是在求解  $K$  最短路径问题时分别采取了不同方法。

混合蛙跳算法 (Shuffled Frog Leaping Algorithm, SFLA)<sup>[8-10]</sup>是由 Eusuff 和 Lansey 于 2003 年首次提出,是一种新的基于群体智能的启发式计算方法。该算法模拟青蛙觅食过程中信息共享和交流的特点且产生结构简单,全局寻优能力强,易于实现,受到国内外学者的广泛关注。

SFLA 虽然具有全局搜索能力强、参数少、族群之

收稿日期:2015-01-08

修回日期:2015-04-16

网络出版时间:2015-11-04

基金项目:国家自然科学基金资助项目(61070234,61071167)

作者简介:赵礼峰(1959-),男,教授,硕士研究生导师,研究方向为图论及其在通信中的应用;于汶雨(1989-),女,硕士研究生,研究方向为图论及其在通信中的应用。

网络出版地址: <http://www.cnki.net/kcms/detail/61.1450.TP.20151104.0952.054.html>

间协同作用进化等优点,但同时具有很多不足的地方。针对其不足,文中提出一种新的种群分割方法。在随机选取个体并对性能进行排序后,按所需种群个数进行分块处理,再在分块基础上随机抽取个体放入各个族群,这样可以保证种群之间的多样性趋于平衡。为使 SFLA 适用于  $K$  最短路径问题,结合 Yen 算法的偏离路径思想,重新定义一种学习策略,以实现文中问题的求解。仿真结果表明,该算法具有较高的精确度和稳定性,并且能快速求解  $K$  最短路径问题。

## 1 预备知识

假设网络  $G = (V(G), E(G))$  是简单图,其中  $V(G)$  为顶点集,  $E(G)$  为边集,且  $|V(G)| = n$ ,  $|E(G)| = m$ ,网络  $G$  中的每条边都赋有权值  $w(e)$ 。考虑图  $G$  当中任意不同的两点  $s$  与  $t$ ,令  $P_G(s, t) = v_s e_1 v_2 e_2 \cdots e_l v_t$  为  $G$  中  $s$  到  $t$  的最短路,将路径权值记为  $d_G(s, t) = \sum_{i=1}^l w(e_i)$ 。

对于给定顶点  $s$  和  $t$  的  $K$  最短路径问题就是在图  $G$  中求出  $s$  到  $t$  的  $k$  条路  $P_1, P_2, \dots, P_k$ ,并且满足  $W(P_1) \leq W(P_2) \leq \dots \leq W(P_k)$ 。

## 2 混合蛙跳算法和 Yen 算法简介

### 2.1 混合蛙跳算法

SFLA 的基本过程<sup>[11]</sup>:随机生成  $F$  只青蛙组成初始种群  $P \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ ,  $S$  维解空间的第  $i$  只青蛙表示为  $X_i = [x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{is}]$ 。生成初始群体后,首先将群内青蛙按适应值降序排列,并记录蛙群中具有最优适应值的青蛙  $X_g$ ;然后将整个蛙群分成  $p$  个族群,每个族群包含  $q$  只青蛙,满足关系  $F = p \times q$ 。其中:第一只青蛙分入第一个族群,第二只青蛙分入第二个族群,第  $p$  只青蛙分入第  $p$  个族群,第  $p+1$  只青蛙重新分入第一个族群,直到全部青蛙划分完毕。

每个族群中具有最好和最差适应值的青蛙分别标记为  $X_b$  和  $X_w$ ,然后对每个族群进行局部搜索,即对族群中的  $X_w$  循环进行局部搜索操作。根据最初蛙跳规则,其更新方式为:

$$D = r \cdot (X_b - X_w) \quad (1)$$

$$X'_w = X_w + D, -D_{\max} \leq D_i \leq D_{\max} \quad (2)$$

式中,  $r$  表示 0 到 1 之间的随机数;  $D_{\max}$  表示青蛙所允许改变位置的最大值。

在经过更新后,如果得到的蛙  $X'_w$  优于原来的青蛙  $X_w$ ,则取代原来族群中的青蛙;如果没有改进,则用  $X_g$  取代  $X_b$ ,执行局部搜索过程;如果仍没有改进,则随机产生一只新的青蛙直接取代原来的  $X_w$ 。重复上述局

部搜索  $L_{\max}$  次,当完成后,将所有族群青蛙重新混合并排序和划分族群,再进行局部搜索,如此反复,直到定义的收敛条件结束为止。全局信息交换和局部深度搜索的平衡策略使得算法能够跳出局部极值点,向全局最优方向进行。

### 2.2 Yen 算法

最早偏离路径算法由 Yen 在 1971 年提出<sup>[12]</sup>。Yen 算法的基本思想:状态节点  $x$  不仅表示  $s \rightarrow x \rightarrow v$  的路径(记作  $P_{(s,v)}$ ),同时表示一条从  $s$  到  $v$  的完整路径,也就是  $P_{(s,v)}$  再连接上从  $x \rightarrow v \rightarrow t$  的最短路径。在选定状态节点  $x$  时,同时要保存节点  $x$  的前一个节点,记作  $x_{\text{pre}}$ ,边  $e_{x_{\text{pre}}x}$  就称作  $P_x$  的偏离边;那么  $P_x$  上  $x_{\text{pre}} \rightarrow t$  的这一段子路径就称为  $P_x$  的偏离路径。

Yen 算法的简单过程:先求出从  $s$  到  $t$  的最短路径,它是初始状态  $x_1$  所代表的路径。设它的第一条边是  $e_{sa}$ ,则  $x_1$  中  $v = a$ ,  $x_1$  的长度为  $w(e_{sa})$ ;此时  $x_{1_{\text{pre}}} = s$ ,  $P_{x_1}$  的偏离边是  $e_{sa}$ 。对于  $P_{x_1}$  的偏离路径上的每一条边  $e_{uv}$ ,都要找出另一条边  $e_{u'v'}$ ,所有从  $u$  出发的边当中需要满足  $[w(e_{u'v'}) + d(v', t)] \geq [w(e_{uv}) + d(v, t)]$ 。从每一条边  $e_{uv}$  都可以选出一个新状态节点  $x_2$ ,  $x'$  中  $v = v'$ ,  $x_2$  的长度为  $d(s, u) + w(e_{u'v'})$ ;  $x_{2_{\text{pre}}}$  为节点  $u$ ,此时  $P_{x_2}$  的偏离边就是  $e_{u'v'}$ 。

以上为两种算法求解的过程。其中, SFLA 的种群分割方法存在不足,会导致族群质量不均,同时局部搜索方法也不适用于  $K$  最短路径问题的求解。Yen 算法的偏离路径思想可以重新构造一种局部搜索方式,同时需要对 SFLA 的种群分割方法进行改进。

## 3 算法改进

### 3.1 个体适应度函数

最短路径问题与混合蛙跳算法相结合,需要对算法中个体适应度进行更改<sup>[13]</sup>。在此问题中,每只青蛙个体都代表一条路径。给定一个赋权网络图  $G = (V, E)$ ,边的适应度函数表示为  $w: E \rightarrow R^+$ ,  $w(e)$  为  $e \in E$  的适应度。路径  $P$  所有边的权值和表示青蛙的适应度函数,由于  $K$  最短路径问题所求结果为路径权值升序,而 SFLA 青蛙适应度按降序排列,故定义青蛙适应度函数为:

$$\text{Fitness} = \frac{1}{\sum_{e \in P} w(e)}$$

### 3.2 种群分割

原始 SFLA 种群分割方法造成族群之间个体适应度呈下降趋势,导致最后一个族群所含个体适应度最差。针对这种情况,提出一种新的种群分割方法:

Step1:随机选取  $F$  只青蛙构成蛙群,对每只青蛙

按照 3.1 中适应度函数计算个体适应度,并对每只青蛙的适应度按降序排列;

Step2:确定所需要的族个数  $p$ ,根据公式  $F = p \times q$ ,将蛙群按适应度从好到坏分成  $q$  块,每块中含有青蛙个数为  $p$ ;

Step3:分块后,按照顺序从每块当中随机选取个体向族群中分配,直到所有青蛙分配完位置。

这样可以使得族群之间所含青蛙个体的适应度趋于平均。图 1 为族群数量  $p = 3$  时的种群分割图解,图中箭头代表随机性。

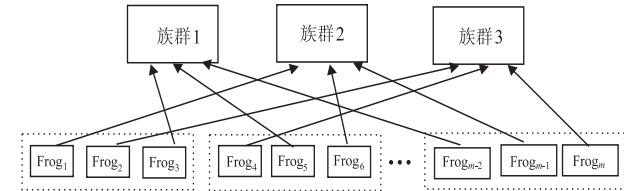


图 1 种群分割图解

### 3.3 学习策略

原始 SFLA 更新策略不适用求解  $K$  最短路径问题,故重新定义一种青蛙之间的学习策略。在  $K$  最短路径问题中的每只青蛙代表的是一条路径,所以可以把每条路径的节点编号取出对每只青蛙进行编号,由 2.2 中所述的 Yen 偏离路径思想,可知每只青蛙的编号与其他个体之间存在相同的节点,综上重新定义一种学习策略:

首先,假设有两只青蛙  $F_b$  与  $F_w$ ,  $F_b$  代表适应度好的青蛙,  $F_w$  代表适应度差的青蛙,个体编号为:

$F_b: 1\ 2\ 5\ 4\ 9$

$F_w: 1\ 4\ 2\ 7\ 5\ 8\ 9$

可以找出  $F_b$  与  $F_w$  拥有的相同节点为  $\{1, 2, 5, 9\}$ , 在 SFLA 中由  $F_w$  向  $F_b$  学习,故在相同节点集合中任选两个节点构成节点对,如选取  $(2, 5)$ , 那么在每只青蛙编号中可以提取一段编码序列。

$F_b: [2\ 5]$

$F_w: [2\ 7\ 5]$

当  $F_w$  向  $F_b$  学习时,用  $F_b$  的编码序列取代  $F_w$  的编码序列,则青蛙  $F_w$  的编码更改为:

$F_w: 1\ 3\ 2\ 5\ 8\ 9$

这样就完成了一次学习过程。

此外,若在学习结束后产生环路,例如选取节点对为  $(2, 9)$  时,  $F_w$  学习后的编码为  $1\ 4\ 2\ 5\ 4\ 9$ , 含有相同的节点,则剔除公共部分,编号变为  $1\ 4\ 9$ 。

### 3.4 算法流程

根据以上阐述,给出改进算法流程:

Step1:初始化。随机产生  $F$  只青蛙,按照 3.1 中所述计算个体适应度,并且将蛙群按个体适应度降序排序。

Step2:族群划分。按照 3.2 中所述方法将蛙群分成  $p$  个族群。

Step3:局部搜索。每个族群中青蛙学习策略如 3.3 所述方法搜索  $l$  次。

Step4:族群混合。每个族群执行  $l$  次搜索后,将各个族群个体合并成一个蛙群,将青蛙按适应度重新排列,并更新最好个体  $F_g$ 。

Step5:检查终止条件。如果迭代终止条件满足则停止,否则重新执行 Step2。

一般经过一定次数循环进化后,代表最好的青蛙个体不再改动时算法停止,有时在达到定义最大迭代次数后停止。对于  $K$  最短路径问题,族群数量应当取  $p \geq k$ , 当算法停止后输出的前  $k$  只青蛙就是所求的  $k$  条最短路径。

## 4 仿真实验

仿真实验环境为:CPU 为 Intel CORE i5;内存为 4 G DDR3;操作系统为 Windows 7。算法采用 Matlab 编写及编译,以图 2 中 30 个节点的网络拓扑图为算例,对算法的可行性及精确度进行实验。

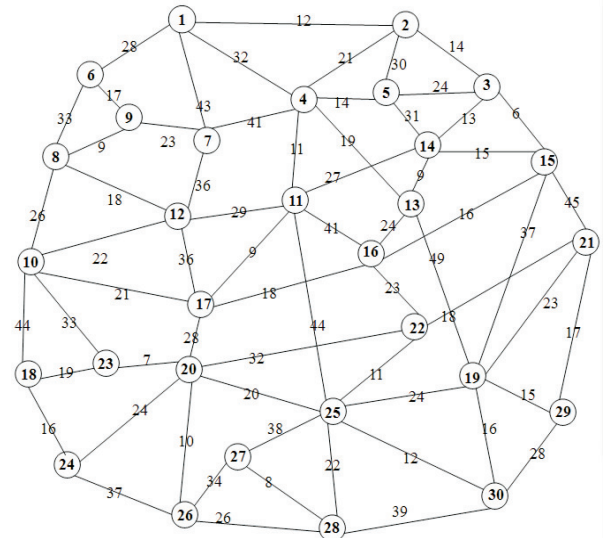


图 2 网络拓扑图

表 1 是运用递归调用的 Dijkstra 算法求出图 2 中  $k$  条最短路径。其中  $k = 10$ , 用来验证文中改进 SFLA 的可行性。改进 SFLA 参数设置为:族群数  $p = 15$ , 族群内青蛙个数  $q = 10$ , 局部搜索强度  $l = 10$ , 迭代次数  $I = 50$ 。如表 1 所示,改进算法可以准确地求出前  $k$  条最短路径。

图 3 给出遗传算法 (GA)<sup>[14]</sup> 与改进 SFLA 搜索到前 10 条路径结果对比,其中遗传算法参数设置为:种群规模  $P = 200$ , 交叉概率  $P_c = 0.9$ , 变异概率  $P_m = 0.1$ , 迭代次数  $G = 50$ 。改进 SFLA 算法参数设置为:族群数  $p = 15$ , 族群内青蛙个数  $q = 10$ , 局部搜索强度  $l$

= 10,迭代次数  $I = 50$ 。从图中可以看出,改进 SFLA 算法比遗传算法寻优能力强,并且比遗传算法寻优精确度高,说明改进 SFLA 算法具有较高的可靠性。

表 1 两种算法搜索到的路径

	Dijkstra 算法求得路径	$W(p)$	SFLA
path <sub>1</sub>	1→2→3→15→19→30	85	✓
path <sub>2</sub>	1→2→3→15→16→22→25→30	94	✓
path <sub>3</sub>	1→4→11→25→30	99	✓
path <sub>4</sub>	1→2→4→11→25→30	100	✓
path <sub>5</sub>	1→2→3→15→19→25→30	105	✓
path <sub>6</sub>	1→2→3→14→15→19→30	107	✓
path <sub>7</sub>	1→4→11→17→20→25→30	112	✓
path <sub>8</sub>	1→2→3→15→19→29→30	112	✓
path <sub>9</sub>	1→2→4→11→17→20→25→30	113	✓
path <sub>10</sub>	1→2→3→14→13→19→30	113	✓

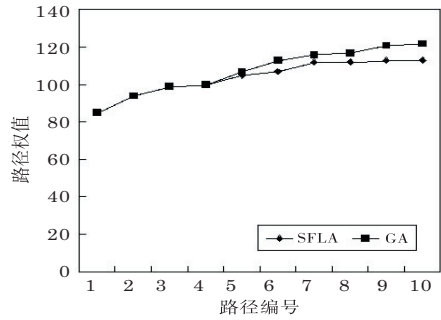


图 3 两种算法求解结果

图 4 为在随机生成网络中两种算法求得前 10 条路径所花费时间比较。设定起始搜索网络规模为 20 个节点,150 条边,每次搜索结束后,网络规模以 5 个节点 50 条边数量增加,直到增加到 50 个节点 450 条为止。由图可以看出,改进 SFLA 平均时间效率高于遗传算法搜索时间效率,并且改进的 SFLA 曲线相较于遗传算法曲线更加平缓,说明算法不但具有很好的时间效率,同时具有较高的稳定性。

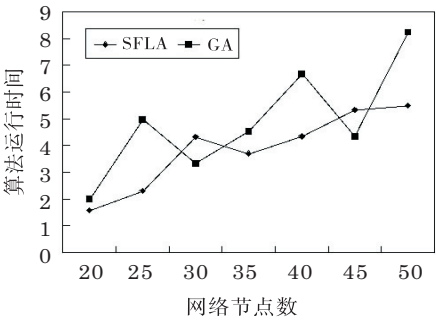


图 4 两种算法对不同网络求解时间

5 结束语

文中通过对混合蛙跳算法进行改进,提出了一种求解  $K$  最短路径问题的新算法。通过改进种群分割方式,定义新的种群学习方式,实现了对  $K$  最短路径问题的求解。仿真结果表明,文中算法能够较快较准确地找到多条最短路径,具有较高稳定性。对求解一般复杂网络中  $K$  最短路径问题,具有较好的应用价值。

参考文献:

[1] Palmgren M, Yuan Di. A short summary on  $K$  shortest path: algorithms and applications [EB/OL]. 2006-01-08. <http://www.esc.auckland.ac.nz/Mason/Courses/LinkopingCol-Cen99/kth.pdf>.

[2] Androustopoulos K N, Zografos K. Solving the  $k$ -shortest path problem with time windows in a time varying network[J]. Operations Research Letters, 2008, 36(6): 692-695.

[3] 王增平,李刚,任建文. 基于前  $K$  最短路径的输电断面搜索新算法[J]. 电工技术学报, 2012, 27(4): 193-201.

[4] 毛少武,张焕国,黄崇超,等. 改进的  $K$  最短路径算法在通信网络中的应用[J]. 武汉大学学报:理学版, 2013, 59(6): 534-538.

[5] Hoffman W, Pavley R. A method for the solution of the  $N$ th best path problem[J]. JACM, 1959, 6(4): 506-514.

[6] 袁红涛,朱美正.  $K$  优路径的一种求解算法与实现[J]. 计算机工程与应用, 2004, 40(6): 51-53.

[7] 王明中,谢剑英,陈应麟. 一种新的  $K$ th 最短路径搜索算法[J]. 计算机工程与应用, 2004, 40(30): 49-50.

[8] Vahed A R, Mirzaei H. Solving a bi-criteria permutation flow-shop problem using shuffled frog-leaping algorithm[J]. Soft Computing, 2008, 12(5): 435-452.

[9] Eusuff M M, Lansey K E. Optimization of water distribution net design using the shuffled frog leaping algorithm[J]. Journal of Water Resources Planning and Management, 2003, 129(3): 210-225.

[10] 谢政,李建平. 网络算法与复杂性理论[M]. 长沙:国防科技大学出版社, 2003.

[11] Vahed A R, Mirzaei H. A hybrid multi-objective shuffled frog-leaping algorithm for a mixed-model assembly line sequencing problem[J]. Computers & Industrial Engineering, 2007, 53(4): 642-666.

[12] Ten J Y. Finding the  $K$  shortest loopless paths in a network[J]. Management Science, 1971, 17(11): 712-716.

[13] 柴登峰,张登荣. 前  $N$  条最短路径问题的算法及应用[J]. 浙江大学学报:工学版, 2002, 36(5): 531-534.

[14] 马炫. 求解  $k$  条最优路径问题的遗传算法[J]. 计算机工程与应用, 2006, 42(12): 100-101.

# 一种求解K最短路径问题的新算法

作者：[赵礼峰](#)，[于汶雨](#)，[ZHAO Li-feng](#)，[YU Wen-yu](#)  
作者单位：[南京邮电大学 理学院, 江苏 南京, 210023](#)  
刊名：[计算机技术与发展](#)  
英文刊名：[Computer Technology and Development](#)  
年，卷(期)：2015, 25(11)

引用本文格式：[赵礼峰](#). [于汶雨](#). [ZHAO Li-feng](#). [YU Wen-yu](#) 一种求解K最短路径问题的新算法[期刊论文]-[计算机技术与发展](#) 2015(11)