# 高阶消失矩的二进小波滤波器的构造方法

汪艳丽,吐尔洪江·阿布都克力木,陆艳飞
(新疆师范大学 数学科学学院,新疆 乌鲁木齐 830054)

**摘 要**:文中在二进提升格式的基础上,结合消失矩的条件和小波的相关理论,推导出一种构造新的具有高阶消失矩的二进小波滤波器的方法。首先,对 Mallat 提出的 B-样条二进小波进行拓展,推导出构造新的 B-样条二进小波滤波器方法;然后,在二进提升格式的基础上,以 $r = 1, m = 2$ 的 B-样条二进小波滤波器作为初始二进小波滤波器,经过多次提升和大量计算,构造出新的具有7阶消失矩的二进小波滤波器;最后,再以对偶二进提升格式为基础,选择合适的自由参数,对初始二进小波重构高通滤波器进行三次提升,推导出具有紧支集、线性相位、7阶消失矩的对偶提升二进小波滤波器。

**关键词**:消失矩;二进提升格式;对偶二进提升格式;提升二进小波滤波器

**中图分类号**:TP301.6 **文献标识码**:A **文章编号**:1673-629X(2015)08-0142-05

doi:10.3969/j.issn.1673-629X.2015.08.030

# Constructed Method of Dyadic Wavelet Filter of Higher-order Vanishing Moments

WANG Yan-li, TURGHUNJAN Abdukirim Turki, LU Yan-fei
(College of Mathematical Sciences, Xinjiang Normal University, Urumqi 830054, China)

**Abstract**: Based on the dyadic lifting scheme, combined with the condition of vanishing moments and related wavelet theory, deduce a new two constructor method has higher-order moments vanish into the wavelet filter. First, B-spline dyadic wavelet proposed by Mallat is expanded into new methods to derive two wavelet filter structure B-spline. Then, based on binary format, with $r = 1, m = 2$ B-spline dyadic wavelet filter as the initial dyadic wavelet filter, after repeated lifting and a lot of calculations, construct a new binary wavelet filter with 7 vanishing moments. Finally, based on the dual binary format ascension, select the appropriate freedom parameters for the three lifting to initial dyadic wavelet reconstruction high-pass filter, deducing lifting dyadic wavelet filters with compact support, linear phase, dual lifting 7-order vanishing moments.

**Key words**: vanishing moments; dyadic lifting scheme; dual dyadic lifting scheme; ascension binary wavelet filter

## 0 引 言

小波理论[1](Wavelet Theory)是20世纪80年代中期发展起来的一门数学理论和方法,也是在 Fourier 级数的基础上发展起来的。小波分析方法是一种窗口大小固定而形状均可改变的时间—频率局部分析方法[2],同时还拥有多分辨率分析与表征信号局部能量的特征,故在信号处理方面备受学者们的关注[3]。小波变换在信号处理领域被认为是"最完美的分析手段",同时又被誉为分析信号的"数学显微镜"[4],它是调和分析这一数学领域半个世纪以来的工作结晶,必将广泛应用于信号处理、图像处理、量子场论、语言识别与合成、音乐、地震勘测、雷达、CT成像、彩色复印、流体湍流、天体识别、机器视觉、机械故障诊断与监控、分形以及数字电视等领域[5-7]。1996年,Sweldens 提出的不依赖于傅里叶变换的小波提升算法(Sweldens 提升格式)[8]就是构造小波滤波器方法中的一种;但是,由于这种提升格式只适用于双正交小波滤波器的构造,仅仅是二进提升格式的一种特殊情况,不能构造二进小波滤波器。近年来,随着小波分析的实用性越来越强[9],以及其应用领域的逐渐扩展,小波的应用和理论研究紧密地结合在一起,在信息科技等很多领域都取得了令人瞩目的成就[10]。随着越来越多的小波

**收稿日期**:2014-10-06 **修回日期**:2015-01-13 **网络出版时间**:2015-07-21

**基金项目**:国家自然科学基金资助项目(11261061,61362039,10661010);新疆维吾尔自治区自然科学基金资助项目(200721104)

**作者简介**:汪艳丽(1990-),女,硕士研究生,研究方向为小波分析及其应用;吐尔洪江·阿布都克力木,教授,博士,通讯作者,研究方向为小波分析与模式识别。

**网络出版地址**:http://www.cnki.net/kcms/detail/61.1450.TP.20150721.1453.085.html

滤波器设计方法被提出[11-13]，提升二进小波滤波器逐渐被专家学者们运用到具体实验中，同时取得了较好的实验效果。

因此，文中给出了二进提升格式，从 B-样条二进小波滤波器出发，构造出具有高阶消失矩的提升二进小波滤波器和对偶提升二进小波滤波器。文中推导出的新的提升二进小波滤波器和对偶提升二进小波滤波器均比文献[14]中提到的二进小波滤波器具有更高阶的消失矩。同时，小波消失矩的阶数越高，其光滑性就越好，在频域内的衰减性就越快，且其频谱定域性就越好。

具体实验中运用提升后的具有高阶消失矩二进小波滤波器，其实验效果更好，优势更明显。

# 1　二进小波理论

## 1.1　消失矩

若

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^k \psi(t)\,\mathrm{d}t = 0, 0 \leqslant k < p \text{ 且} \int_{-\infty}^{\infty} t^p \psi(t)\,\mathrm{d}t \neq 0 \tag{1}$$

成立，则称 $\psi(t)$ 具有 $p$ 阶消失矩。

## 1.2　二尺度方程

由滤波器 $\{h, g, \tilde{h}, \tilde{g}\}$ 产生的两个尺度函数 $\varphi(t)$ 和 $\tilde{\varphi}(t)$ 以及小波 $\psi(t)$ 和 $\tilde{\psi}(t)$ 的 Fourier 变换满足如下关系：

$$\begin{aligned}
\hat{\varphi}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{h}\left(\frac{\omega}{2}\right)\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right)\\
\hat{\tilde{\varphi}}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\tilde{h}}\left(\frac{\omega}{2}\right)\hat{\tilde{\varphi}}\left(\frac{\omega}{2}\right)\\
\psi(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{g}\left(\frac{\omega}{2}\right)\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right)\\
\hat{\tilde{\psi}}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\tilde{g}}\left(\frac{\omega}{2}\right)\hat{\tilde{\varphi}}\left(\frac{\omega}{2}\right)
\end{aligned} \tag{2}$$

称式(2)为二尺度方程，也称二尺度关系或者二尺度符号。

## 1.3　等价命题

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^k \psi(t)\,\mathrm{d}t = 0; \frac{\mathrm{d}^k \hat{\psi}(\omega)}{\mathrm{d}\omega^k}\Big|_{\omega=0} = 0;$$

$$\frac{\mathrm{d}^k \hat{g}(\omega)}{\mathrm{d}\omega^k}\Big|_{\omega=0} = 0, 0 \leqslant k < p \tag{3}$$

式(3)中的三个命题相互等价。

## 1.4　二进完全重构条件

如果滤波器 $\{h, g, \tilde{h}, \tilde{g}\}$ 的 Fourier 变换满足如下关系：

$$\hat{\tilde{h}}(\omega)\hat{h}^*(\omega) + \hat{\tilde{g}}(\omega)\hat{g}^*(\omega) = 2 \tag{4}$$

其中，‘ * ’表示复共轭，称式(4)为二进完全重构条件。

## 1.5　二进提升格式

定义 1：设初始二进小波滤波器为 $\{h, g, \tilde{h}, \tilde{g}\}$，那么提升滤波器的系数由

$$\begin{aligned}
&h_k^l = h_k, g_k^l = g_k - \sum_m s_m h_{k-m}\\
&\tilde{h}_k^l = \tilde{h}_k + \sum_m s_{-m}\tilde{g}_{k-m}, \tilde{g}_k^l = \tilde{g}_k
\end{aligned} \tag{5}$$

确定，称式(5)为二进提升格式(dyadic lifting scheme)，其中 $s_m$ 为提升参数。

定理 1：

(1)若定义 1 中的初始二进小波分解高通滤波器 $g$ 的 Fourier 变换满足 $\hat{g}(0) \neq 0$，那么 $\hat{g}^l(0) = 0$ 的充分条件是 $\hat{s}(0) = \hat{g}(0)/\hat{h}(0)$；

(2)若初始二进小波分解高通滤波器 $g$ 具有 $p$ 阶消失矩，那么运用定义 1 提升后的二进小波分解高通滤波器 $\hat{g}^l(\omega)$ 具有至少 $p+1$ 阶消失矩的充分条件是 $\hat{s}(\omega)$ 满足：$\frac{\mathrm{d}^k \hat{s}(\omega)}{\mathrm{d}\omega^k}\Big|_{\omega=0} = 0, 0 \leqslant k < p$ 与 $\frac{\mathrm{d}^p \hat{s}(\omega)}{\mathrm{d}\omega^p}\Big|_{\omega=0} = \frac{1}{\hat{h}(0)}\frac{\mathrm{d}^p \hat{g}(\omega)}{\mathrm{d}\omega^p}\Big|_{\omega=0}$。

反复利用此定理可以构造出具有 $m$ ( $m > p$ )阶消失矩的二进小波滤波器。

## 1.6　二进对偶提升格式

定义 2：设初始二进小波滤波器为 $\{h, g, \tilde{h}, \tilde{g}\}$，那么滤波器的系数由

$$\begin{aligned}
&h_k^l = h_k + \sum_m r_{-m} g_{k-m}, g_k^l = g_k\\
&\tilde{h}_k^l = \tilde{h}_k, \tilde{g}_k^l = \tilde{g}_k - \sum_m r_m \tilde{h}_{k-m}
\end{aligned} \tag{6}$$

确定，式(6)称为二进对偶提升格式(dyadic dual lifting scheme)，其中 $r_m$ 为提升参数。

定理 2：

(1)若定义 2 中的初始二进小波重构高通滤波器 $\tilde{g}$ 的 Fourier 变换满足 $\hat{\tilde{g}}(0) \neq 0$，那么 $\hat{\tilde{g}}^l(0) = 0$ 的充分条件是 $\hat{r}(0) = \hat{\tilde{g}}(0)/\hat{\tilde{h}}(0)$；

(2)若初始二进小波重构高通滤波器 $\tilde{g}$ 具有 $p$ 阶消失矩，那么运用定义 2 提升后的对偶二进小波重构高通滤波器 $\hat{\tilde{g}}^l(\omega)$ 具有至少 $p+1$ 阶消失矩的充分条件是 $\hat{r}(\omega)$ 满足：$\frac{\mathrm{d}^k \hat{r}(\omega)}{\mathrm{d}\omega^k}\Big|_{\omega=0} = 0, 0 \leqslant k < p$ 与 $\frac{\mathrm{d}^p \hat{r}(\omega)}{\mathrm{d}\omega^p}$

$|_{\omega=0}=\frac{1}{\hat{\tilde{h}}(0)}\frac{d^p\hat{\tilde{g}}(\omega)}{d\omega^p}|_{\omega=0}$。

反复利用此定理可以构造出具有 $n$（$n>p$）阶消失矩的对偶提升二进小波滤波器。

## 2 B-样条二进小波构造的新方法

对 Mallat 构造的（$r=1$）B-样条二进小波进行分析和推导，可以得到一种构造新的 B-样条二进小波的方法：

$m$ 次 B-样条是 $I_{[0,1]}$ 与其自身的 $m+1$ 卷积的平移，其 Fourier 变换有

$$\hat{\varphi}(\omega)=\left(\frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2}\right)^{m+1}e^{-i\varepsilon(\omega/2)},\varepsilon=\begin{cases}1, m\text{ 是偶数}\\0, m\text{ 是奇数}\end{cases}$$

设定滤波器 $\tilde{h}(\omega)$ 满足：$\hat{\tilde{h}}(\omega)=\hat{h}(\omega)$，由式(2)可以得到

$$\hat{h}(\omega)=\sqrt{2}\frac{\hat{\varphi}(2\omega)}{\hat{\varphi}(\omega)}=\sqrt{2}\,(\cos(\omega/2))^{m+1}e^{-i\varepsilon(\omega/2)}$$

选取 $\hat{g}(\omega)=(-i)^{\tau}e^{-i(2-\tau)(\omega/2)}\,(\sin(\omega/2))^{r}$，其中 $\tau=\begin{cases}1, r=1\\0, r=2\end{cases}$，那么，由式(4)可以推出

$$\hat{\tilde{g}}(\omega)=\sqrt{2}\,(-i)^{\tau}e^{-i(2-\tau)(\omega/2)}\,(\sin(\omega/2))^{2-r}\sum_{l=0}^{m}(\cos(\omega/2))^{2l}$$

最后，再由式(2)可以得到新的二进小波

$$\hat{\psi}(\omega)=(-\omega/4)^{r}e^{-i((2+\varepsilon-\tau)\omega/4-\pi/2)}\left(\frac{\sin(\omega/4)}{\omega/4}\right)^{m+r+1}$$

## 3 构造具有高阶消失矩的新的二进小波滤波器

分析上面叙述的构造方法，选取新构造的（$r=1$，$m=2$）B-样条二进小波为初始二进小波滤波器，分别利用定理 1 和定理 2，构造具有更高阶消失矩的提升二进小波滤波器。

### 3.1 利用定理 1 构造具有 7 阶消失矩的二进小波滤波器

以上述滤波器 $\{\hat{h}(\omega),\hat{g}(\omega),\hat{\tilde{h}}(\omega),\hat{\tilde{g}}(\omega)\}$ 为初始二进小波滤波器，因为分解高通滤波器 $\hat{g}(\omega)$ 具有 1 阶消失矩，运用定义 1 可以构造出具有 2 阶或更高阶消失矩的滤波器 $\hat{g}^{l}(\omega)$，此时，根据定理 1，可知 $\hat{s}(\omega)$ 满足：

$$\hat{s}(0)=0$$

$$\frac{d\hat{s}(\omega)}{d\omega}|_{\omega=0}=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{d\hat{g}(\omega)}{d\omega}|_{\omega=0}=-\frac{i}{2}$$

选取 $\hat{s}(\omega)=-\frac{i}{2}\sin\omega$，利用式(5)可以得到提升后的二进小波滤波器

$$\hat{h}^{l}(\omega)=\frac{\sqrt{2}}{8}(e^{-2i\omega}+3e^{-i\omega}+3+e^{i\omega})$$

$$\hat{g}^{l}(\omega)=\frac{\sqrt{2}}{32}(-e^{-3i\omega}-3e^{-2i\omega}+14e^{-i\omega}-14+3e^{i\omega}+e^{2i\omega})$$

$$\hat{\tilde{h}}^{l}(\omega)=\frac{\sqrt{2}}{128}(-e^{-4i\omega}-7e^{-3i\omega}-5e^{-2i\omega}+77e^{-i\omega}+77-5e^{i\omega}-7e^{2i\omega}-e^{3i\omega})$$

$$\hat{\tilde{g}}^{l}(\omega)=\frac{\sqrt{2}}{32}(e^{-3i\omega}+7e^{-2i\omega}+22e^{-i\omega}-22-7e^{i\omega}-e^{2i\omega})$$

第一次提升后的 $\hat{g}^{l}(\omega)$ 满足：$\frac{d^k\hat{g}^{l}(\omega)}{d\omega^k}|_{\omega=0}=0,0\le k<3$ 且 $\frac{d^3\hat{g}^{l}(\omega)}{d\omega^3}|_{\omega=0}=-\frac{3i}{2}\neq 0$，因此，提升后的二进小波滤波器具有 3 阶消失矩。再次提升，可以构造出具有 4 阶或更高阶消失矩的滤波器 $\hat{g}^{ll}(\omega)$，此时，根据定理 1 知，$\hat{s}(\omega)$ 满足：

$$\frac{d^k\hat{s}(\omega)}{d\omega^k}|_{\omega=0}=0,0\le k<3$$

$$\frac{d^3\hat{s}(\omega)}{d\omega^3}|_{\omega=0}=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{d^3\hat{g}_k^{l}(\omega)}{d\omega^3}|_{\omega=0}=-\frac{3i}{2}$$

选取 $\hat{s}(\omega)=-\frac{i}{4}\sin^3\omega$，利用式(5)得

$$\hat{h}^{ll}(\omega)=\frac{\sqrt{2}}{8}(e^{-2i\omega}+3e^{-i\omega}+3+e^{i\omega})$$

$$\hat{g}^{ll}(\omega)=\frac{\sqrt{2}}{256}(e^{-5i\omega}+3e^{-4i\omega}-8e^{-3i\omega}-32e^{-2i\omega}+106e^{-i\omega}-106+32e^{i\omega}+8e^{2i\omega}-3e^{3i\omega}-e^{4i\omega})$$

$$\hat{\tilde{h}}^{ll}(\omega)=\frac{\sqrt{2}}{1\,024}(e^{-6i\omega}+7e^{-5i\omega}+11e^{-4i\omega}-99e^{-3i\omega}-110e^{-2i\omega}+702e^{-i\omega}+702-110e^{i\omega}-99e^{2i\omega}+11e^{3i\omega}+7e^{4i\omega}+e^{5i\omega})$$

$$\hat{\tilde{g}}^{ll}(\omega)=\frac{\sqrt{2}}{32}(e^{-3i\omega}+7e^{-2i\omega}+22e^{-i\omega}-22-7e^{i\omega}-e^{2i\omega})$$

第二次提升后的 $\hat{g}^{ll}(\omega)$ 满足：$\frac{d^k\hat{g}^{ll}(\omega)}{d\omega^k}|_{\omega=0}=0,0\le k<5$ 且 $\frac{d^5\hat{g}^{ll}(\omega)}{d\omega^5}|_{\omega=0}=-\frac{54\sqrt{2}}{4}i\neq 0$，具有 5 阶消失矩。再次以提升后的二进小波滤波器 $\hat{g}^{ll}(\omega)$ 为初始

二进小波滤波器进行提升,可以构造具有 6 阶或更高阶消失矩的二进小波滤波器 $\hat{g}^{lll}(\omega)$ 。由定理 1 知,$\hat{s}(\omega)$ 满足:

$$\frac{d^k\hat{s}(\omega)}{d\omega^k}\Big|_{\omega=0}=0,0\leqslant k<5$$

$$\frac{d^5\hat{s}(\omega)}{d\omega^5}\Big|_{\omega=0}=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{d^5\hat{g}^{ll}(\omega)}{d\omega^5}\Big|_{\omega=0}=-18\frac{3i}{4}$$

选取 $\hat{s}(\omega)=-\frac{5i}{32}\sin^5\omega$ ,利用式(5)得到

$$\hat{h}^{lll}(\omega)=\frac{\sqrt{2}}{8}(e^{-2i\omega}+3e^{-i\omega}+3+e^{i\omega})$$

$$\hat{g}^{lll}(\omega)=\frac{\sqrt{2}}{8\ 192}(-5e^{-7i\omega}-15e^{-6i\omega}+42e^{-5i\omega}+166e^{-4i\omega}-231e^{-3i\omega}-1\ 149e^{-2i\omega}+3\ 292e^{-i\omega}-3\ 292+1\ 149e^{i\omega}+231e^{2i\omega}-166e^{3i\omega}-42e^{4i\omega}+15e^{5i\omega}+5e^{6i\omega})$$

$$\tilde{\hat{h}}^{lll}(\omega)=\frac{\sqrt{2}}{32\ 768}(-5e^{-8i\omega}-35e^{-7i\omega}-53e^{-6i\omega}+509e^{-5i\omega}+887e^{-4i\omega}-4\ 063e^{-3i\omega}-4\ 745e^{-2i\omega}+23\ 889e^{-i\omega}+23\ 889-4\ 745e^{i\omega}-4\ 063e^{2i\omega}+887e^{3i\omega}+509e^{4i\omega}-53e^{5i\omega}-35e^{6i\omega}-5e^{7i\omega})$$

$$\tilde{\hat{g}}^{lll}(\omega)=\frac{\sqrt{2}}{32}(e^{-3i\omega}+7e^{-2i\omega}+22e^{-i\omega}-22-7e^{i\omega}-e^{2i\omega})$$

第三次提升后的 $\hat{g}^{lll}(\omega)$ 满足:$\frac{d^k\hat{g}^{lll}(\omega)}{d\omega^k}\Big|_{\omega=0}=0$, $0\leqslant k<7$ 且 $\frac{d^7\hat{g}^{lll}(\omega)}{d\omega^7}\Big|_{\omega=0}=-4\ 515\ 840i\neq0$。因此,第三次提升后得到的二进小波滤波器具有 7 阶消失矩。继续利用定义 1 的二进提升格式和定理 1,可以构造出有 8 阶或更高阶消失矩的二进小波滤波器。

## 3.2　利用定义 2 构造具有 7 阶消失矩的对偶提升二进小波滤波器

由于初始重构高通滤波器 $\tilde{\hat{g}}(\omega)$ 具有 1 阶消失矩,运用定义 2 对 $\tilde{\hat{g}}(\omega)$ 进行提升,可以构造出具有 2 阶或更高阶消失矩的重构高通滤波器 $\tilde{\hat{g}}^{l}(\omega)$ 。此时,由定理 2 可知,$\hat{r}(\omega)$ 必须满足条件:

$$\hat{r}(0)=0$$

$$\frac{d\hat{r}(\omega)}{d\omega}\Big|_{\omega=0}=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{d\tilde{\hat{g}}(\omega)}{d\omega}\Big|_{\omega=0}=-\frac{3i}{2}$$

选取 $\hat{r}(\omega)=-\frac{i}{2}\sin3\omega$ ,利用式(6)对初始滤波器进行对偶提升,得到

$$\hat{h}^{l}(\omega)=\frac{\sqrt{2}}{8}(-e^{-4i\omega}+e^{-3i\omega}+e^{-2i\omega}+3e^{-i\omega}+3+e^{i\omega}+e^{2i\omega}-e^{3i\omega})$$

$$\hat{g}^{l}(\omega)=\frac{\sqrt{2}}{2}(e^{-i\omega}-1)$$

$$\tilde{\hat{h}}^{l}(\omega)=\frac{\sqrt{2}}{8}(e^{-2i\omega}+3e^{-i\omega}+3+e^{i\omega})$$

$$\tilde{\hat{g}}^{l}(\omega)=\frac{\sqrt{2}}{32}(-e^{-5i\omega}-3e^{-4i\omega}-2e^{-3i\omega}+6e^{-2i\omega}+22e^{-i\omega}-22-6e^{i\omega}+2e^{2i\omega}+3e^{3i\omega}+e^{4i\omega})$$

第一次提升后的 $\tilde{\hat{g}}^{l}(\omega)$ 满足:$\frac{d^k\tilde{\hat{g}}^{l}(\omega)}{d\omega^k}\Big|_{\omega=0}=0,0\leqslant k<3$ 且 $\frac{d^3\tilde{\hat{g}}^{l}(\omega)}{d\omega^3}\Big|_{\omega=0}\neq0$。故 $\tilde{\hat{g}}^{l}(\omega)$ 具有 3 阶消失矩,接着运用定义 2 继续对所得的提升二进小波滤波器进行对偶提升,可以构造出具有 4 阶或更高阶消失矩的重构高通滤波器 $\tilde{\hat{g}}^{ll}(\omega)$ ,由定理 2 可知,此时 $\hat{r}(\omega)$ 必须满足条件:

$$\frac{d^k\hat{r}(\omega)}{d\omega^k}\Big|_{\omega=0}=0,0\leqslant k<3$$

$$\frac{d^3\hat{r}(\omega)}{d\omega^3}\Big|_{\omega=0}=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{d^3\tilde{\hat{g}}^{l}_{k}(\omega)}{d\omega^3}\Big|_{\omega=0}=-\frac{57i}{4}$$

选取 $\hat{r}(\omega)=-\frac{19i}{8}\sin^3\omega$ ,利用式(6)得到

$$\hat{h}^{ll}(\omega)=\frac{\sqrt{2}}{128}(3e^{-4i\omega}-3e^{-3i\omega}-41e^{-2i\omega}+105e^{-i\omega}+105-41e^{i\omega}-3e^{2i\omega}+3e^{3i\omega})$$

$$\hat{g}^{ll}(\omega)=\frac{\sqrt{2}}{2}(e^{-i\omega}-1)$$

$$\tilde{\hat{h}}^{ll}(\omega)=\frac{\sqrt{2}}{8}(e^{-2i\omega}+3e^{-i\omega}+3+e^{i\omega})$$

$$\tilde{\hat{g}}^{ll}(\omega)=\frac{\sqrt{2}}{512}(3e^{-5i\omega}+9e^{-4i\omega}-32e^{-3i\omega}-56e^{-2i\omega}+238e^{-i\omega}-238+56e^{i\omega}+32e^{2i\omega}-9e^{3i\omega}-3e^{4i\omega})$$

第二次提升后的 $\tilde{\hat{g}}^{ll}(\omega)$ 满足:$\frac{d^k\tilde{\hat{g}}^{ll}(\omega)}{d\omega^k}\Big|_{\omega=0}=0,0\leqslant k<5$ 且 $\frac{d^5\tilde{\hat{g}}^{ll}(\omega)}{d\omega^5}\Big|_{\omega=0}\neq0$, 具有 5 阶消失矩。继续进行对偶提升,可以构造具有 6 阶或更高阶消失矩的滤波器 $\tilde{\hat{g}}^{lll}(\omega)$ 。此时,$\hat{r}(\omega)$ 必须满足条件:

$$\frac{d^k\hat{r}(\omega)}{d\omega^k}\Big|_{\omega=0}=0,0\leqslant k<5$$

$$\frac{d^5\hat{r}(\omega)}{d\omega^5}\Big|_{\omega=0}=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{d^5\tilde{\hat{g}}^{ll}(\omega)}{d\omega^5}\Big|_{\omega=0}=-\frac{105i}{4}$$

选取 $\hat{r}(\omega) = -\frac{7i}{32}\sin^5\omega$，利用式(6)得到：

$$\hat{h}^{III}(\omega) = \frac{\sqrt{2}}{2\,048}(-7e^{-6i\omega} + 7e^{-5i\omega} + 83e^{-4i\omega} - 83e^{-3i\omega} - 726e^{-2i\omega} + 1\,750e^{-i\omega} + 1\,750 - 726e^{i\omega} - 83e^{2i\omega} + 83e^{3i\omega} + 7e^{4i\omega} - 7e^{5i\omega})$$

$$\hat{g}^{III}(\omega) = \frac{\sqrt{2}}{2}(e^{-i\omega} - 1)$$

$$\hat{\tilde{h}}^{III}(\omega) = \frac{\sqrt{2}}{8}(e^{-2i\omega} + 3e^{-i\omega} + 3 + e^{i\omega})$$

$$\hat{\tilde{g}}^{III}(\omega) = \frac{\sqrt{2}}{8\,192}(-7e^{-7i\omega} - 21e^{-6i\omega} + 62e^{-5i\omega} + 242e^{-4i\omega} - 477e^{-3i\omega} - 1\,071e^{-2i\omega} + 3\,668e^{-i\omega} - 3\,668 + 1\,071e^{i\omega} + 477e^{2i\omega} - 242e^{3i\omega} - 62e^{4i\omega} + 21e^{5i\omega} + 7e^{6i\omega})$$

第三次提升后 $\hat{\tilde{g}}^{III}(\omega)$ 满足：$\frac{d^k\hat{\tilde{g}}^{III}(\omega)}{d\omega^k}|_{\omega=0} = 0, 0 \leqslant k < 7$ 且 $\frac{d^7\hat{\tilde{g}}^{III}(\omega)}{d\omega^7}|_{\omega=0} = -\frac{3\,064\,305}{4\,096}i \neq 0$。因此 $\hat{\tilde{g}}^{III}(\omega)$ 具有 7 阶消失矩。继续运用定义 2 的对偶二进提升格式，根据定理 2 可以构造出具有 8 阶或更高阶消失矩的二进小波滤波器。

## 4　结束语

文中叙述了利用二进提升格式和对偶二进提升格式构造新的具有高阶消失矩的二进小波滤波器的方法。推导出的新的提升二进小波滤波器具有更高阶的消失矩，文中所述二进提升格式和对偶二进提升格式使得构造具有高阶消失矩的二进小波滤波器成为可能，构造定理 1 和定理 2 更是使得高阶消失矩的二进小波滤波器的构造变得简单且有理可循。原则上讲，传统意义上使用傅里叶分析的地方，都可以使用小波分析。应用提升格式提高二进小波的消失矩使得提升后的二进小波滤波器，光滑性得到提高，衰减性也得到增强。再根据其平移不变性以及小波变换对信号的适应性，接下来，将把提升后的具有高阶消失矩的二进小波具体应用到图像增强、去噪，图像压缩、图像边缘检测，理论物理，军事电子对抗与武器的智能化，音乐和语言的人工合成，医学成像与诊断，减少 B 超、CT、核磁共振成像的时间，数值分析、构造快速数值方法、曲线曲面构造、微分方程求解，人脸识别[9]等领域的研究中，期望新构造的二进小波滤波器在实际应用中取得更好的实用效果。

**参考文献：**


[1]　吐尔洪江·阿布都克力木. 小波信号处理基础[M]. 北京：北京邮电大学出版社，2014.

[2]　彭玉华. 小波变换与工程应用[M]. 北京：科学出版社，1999.

[3]　Mallat S. Wavelet tour of signal processing[M]. New York：Academic Press，1998.

[4]　关履泰. 小波方法与应用[M]. 北京：高等教育出版社，2007.

[5]　王大凯，彭进业. 小波分析及其在信号处理中的应用[M]. 北京：电子工业出版社，2006.

[6]　吐尔洪江·阿布都克力木. 基于自适应二进小波变换的人脸检测方法[J]. 计算机工程与应用，2010，46(18)：149-151.

[7]　Abdukirim T，Niijima K，Takano S. Lifting dyadic wavelets[R]. Kyushu：Kyushu University，2002.

[8]　Sweldens W. The lifting scheme：a new philosophy in biothogonal wavelet construction[M]//Wavelet application in signal and image processing Ⅲ. New York：SPIE，1995：68-79.

[9]　李　晨，王军锋. 一种新的提升小波自适应阈值图像去噪算法[J]. 计算机技术与发展，2012，22(7)：78-80.

[10]　Laine A，Fan J，Schuler S. A framework for contrast enhancement by dyadic wavelet analysis[C]//Proc of second international workshop on digital mammography. [s. l.]：[s. n.]，1994：10-12.

[11]　吐尔洪江·阿布都克力木，阿布都许库热·阿布都克力木，张海英. 二进小波的构造方法研究[J]. 纯粹数学与应用数学，2012，28(2)：149-154.

[12]　张海英，范志强. 提升二进小波滤波器的构造方法研究[J]. 计算机与现代化，2013(1)：22-24.

[13]　Abdukirim T，Abulikemu A，Eziz T. Lifting dyadic wavelets and design of decomposition filters with short length[C]//Proc of IEEE international conference on computer science and automation engineering. [s. l.]：IEEE，2011：517-520.

[14]　张海英，姜闪闪，吐尔洪江·阿布都克力木. 基于消失矩条件的二进小波滤波器的设计方法[J]. 新疆师范大学学报，2008，27：8-12.

# 高阶消失矩的二进小波滤波器的构造方法

作者： 汪艳丽， 吐尔洪江·阿布都克力木， 陆艳飞， WANG Yan-li， TURGHUNJAN Abdukirim Turki， LU Yan-fei
作者单位： 新疆师范大学 数学科学学院,新疆 乌鲁木齐,830054
刊名： 计算机技术与发展ISTIC
英文刊名： Computer Technology and Development
年，卷(期)： 2015(8)