

# 等价三叉树模型的三环网络 $TL(N;1,s_2,s_3)$ 研究

姜太平,徐超,邵伟鹏,王小林

(安徽工业大学 计算机学院,安徽 马鞍山 243000)

**摘要:**多环网络的直径是衡量网络效率的重要指标,利用等价三叉树方法求解了具有2个发射边变量的有向三环网络  $TL(N;1,s_2,s_3)$  的直径,研究了该三叉树的性质,给出了三叉树的构造算法,采用C#语言和SQL Server2008仿真实现了三叉树的结构模型。在此三叉树的结构模型上做了大量实验,根据得到的实验结果,找到了该族三环网络直径  $d(N;1,s_2,s_3)$  最大值、最小值的分布规律,并且给出了直径  $d(N;1,s_2,s_3)$  的上界与下界的显式公式。仿真结果表明,直径的最大值和最小值都随着  $N$  值的增加而有规律增加,但是增加的规律不同,直径的最大值随  $N$  值的增加呈有规律的锯齿状波动增加,直径的最小值随  $N$  值的增加呈有规律的阶梯状增加。

**关键词:**三环网络;三叉树;直径;族

**中图分类号:** O157.9;TP302

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1673-629X(2015)06-0021-04

**doi:** 10.3969/j.issn.1673-629X.2015.06.005

## Research on Triple-loop Networks $TL(N;1,s_2,s_3)$ of Ternarytree Model

JIANG Tai-ping, XU Chao, TAI Wei-peng, WANG Xiao-lin

(School of Computer, Anhui University of Technology, Ma'anshan 243000, China)

**Abstract:** The diameter of multi-loop networks is an important indicator to measure network efficiency, a new method, equivalent ternarytree method, to calculate the diameter of directed triple-loop networks  $TL(N;1,s_2,s_3)$  is presented. A new diagram, ternarytree, is obtained by this method. The structural model of ternarytree is stimulated which makes use of C# and SQL Server 2008. A lot of experiments are made on ternarytree structure model, according to the experimental results, find the distribution rule of the maximum values and the minimum values of this triple-loop networks diameter  $d(N;1,s_2,s_3)$ , giving the explicit formula of the upper bound and lower bound of diameter  $d(N;1,s_2,s_3)$ . The simulating results show that the maximum diameter value is regular zigzag rising with the  $N$  value rising, the minimum diameter value is regular stair-stepping rising with the  $N$  value rising.

**Key words:** triple-loop networks; ternarytree; diameter; family

## 0 引言

多环网络因其架构简单及节点对称等特性,时常被应用于计算机互连网络或通讯系统的各种并行处理结构中。相对于单环网络的低可靠度与长传输延迟,以及高环网络的高硬件复杂度,三环网络便受到广泛的关注与探讨。三环网络的图论模型是指这样一个有向图  $TL(N;s_1,s_2,s_3)$ : 它的每个顶点记为  $0,1,\dots,N-1$ , 并从每个顶点  $i$  发出三条有向边  $i \rightarrow i+s_1(\text{mod } N)$ ,  $i \rightarrow i+s_2(\text{mod } N)$  和  $i \rightarrow i+s_3(\text{mod } N)$ , 其中  $s$  是自然数,且  $1 \leq s_1,s_2,s_3 \leq N-1$ 。有很多学者在研究其拓扑性质及与其直径相关的问题。记  $TL(N;s_1,s_2,s_3)$  的直径为  $d(N;s_1,s_2,s_3)$ , 为网络中任意两个节点之间的

最小距离中的最大者。并记  $d(N) = \min\{d(N;s_1,s_2,s_3): 1 \leq s_1,s_2,s_3 \leq N-1\}$ 。如果  $d(N) = d(N;s_1,s_2,s_3)$ , 则称一个三环网络  $TL(N;s_1,s_2,s_3)$  为最优的。

三环网络的研究关注两个重要的问题,其一是对于给定的直径  $d(N)$ , 寻找出最大的节点数  $N$ , 并且求出对应的连接参数  $s_1,s_2,s_3$ , 可应用于在给定传输延时下所能服务最多的使用者;其二为节点  $N$  固定时,寻找最佳三参数使得网络具有最小直径,可应用于计算最小传输延迟。Aguiló 等首次提出三环网络的超L型瓦模型,计算出直径  $d(N) \leq 10$  时的最大节点  $N$  值和连接边  $s_1,s_2,s_3$ <sup>[1]</sup>; 随后又研究了三环网络  $TL(N;s_1,s_2,s_3)$ , 给出了一个紧优三环网络无限族,并试图给出其下界的显式公式,但是结果表明  $TL(N;s_1,s_2,s_3)$  紧

收稿日期:2014-07-29

修回日期:2014-10-29

网络出版时间:2015-05-06

基金项目:国家自然科学基金资助项目(6100311);安徽省自然科学基金重点项(KJ2013Z023,KJ2013A058)

作者简介:姜太平(1974-),男,博士研究生,研究方向为增强现实、立体显示。

网络出版地址: <http://www.cnki.net/kcms/detail/61.1450.TP.20150506.1648.042.html>

密族群并不具备单调性<sup>[2]</sup>;进入 21 世纪后,三环网络的研究得到了更多学者的关注,F. K. Hwang 等通过超 L 型瓦模型研究了无向三环网络,列出了其连通度等特性<sup>[3-4]</sup>;而 C. Chen 等又提出并研究了三环网络的超 L 型瓦的是否可以构建与其节点数和连接边参数也有本质的联系等问题<sup>[5-6]</sup>;侯新民等展示了一种全新的三环网络构造模型—层图,并从理论上分析了层图的性质<sup>[7]</sup>;Pilar Sabariego 等从最小距离图来研究三环网络,并首次仿真绘制多组超 L 型瓦三维图<sup>[8]</sup>。

上述对于三环网络的直径计算问题,主要是构建其等价的超 L 型瓦来进行,且连接边  $s_1, s_2, s_3$  都是变量时的一般数学问题<sup>[1-8]</sup>。邵伟鹏等提出一种三环网络超 L 型瓦仿真算法,列出当连接参数只有一个变量时,即  $TL(N;1,s,s+1)$  这一族的超 L 型瓦,并分析了其直径分布情况<sup>[9]</sup>;随后又提出了一种基于三叉树模型的三环网络  $TL(N;1,s,s+1)$  的仿真算法<sup>[10]</sup>。在实际应用中,三环网络往往是先设计成相邻的节点互联,再考虑其他两个连接参数的问题,先固定一个发射边常量为 1,再设置另外两个发射边变量为  $s_2, s_3$ ,即研究的是  $TL(N;1,s_2,s_3)$ 。文中推广应用了文献[10]提出的等价三叉树模型,通过该模型求解出三环网络  $TL(N;1,s_2,s_3)$  直径的上、下界,绘制出其直径三维分布图,最终分析并得到直径的上、下界公式。

文中在已有研究的基础上进行创新。2012 年,边琼芳利用 C++编程计算出三环网络的直径分布图,并分析其直径分布特点<sup>[11]</sup>,有向环网平均直径<sup>[12]</sup>,双环网络的[+h]边优先寻径策略<sup>[13]</sup>,直角坐标系下无向双环网络  $G(N; \pm 1, \pm s)$  直径<sup>[14]</sup>,对文中的研究给予理论和实践上的支持。

## 1 三环网络 $TL(N;1,s_2,s_3)$ 的直径和等价三叉树模型直径求解

三环网络  $TL(N;1,s_2,s_3)$  的直径是指任意两个节点间距离最短集合的最大值,记为  $d(N;1,s_2,s_3)$ 。设  $d(i,j)$  是由节点  $i$  到  $j$  的最短路径长度,则  $d(N;1,s_2,s_3) = \max_{0 \leq i,j \leq N-1} \{d(u,v)\}$ 。

定义 1:三环网络  $TL(N;1,s_2,s_3)$  的图论模型是一个有着  $N$  个节点的有向图,从任意一个节点  $i$  发出三条有向边,即  $i \rightarrow i+1 \pmod{N}$ ,  $i \rightarrow i+s_2 \pmod{N}$  和  $i \rightarrow i+s_3 \pmod{N}$ ,其中  $s_2, s_3$  是大于 1 并小于  $N-1$  的自然数,且  $s_2 \neq s_3$ 。设三环网络中的节点集合中的任一点  $i_0$  为起始点,此时  $i_0$  也为三叉树的根节点,按  $i_0 \rightarrow i_0+1 \pmod{N}$ ,  $i_0 \rightarrow i_0+s_2 \pmod{N}$  和  $i_0 \rightarrow i_0+s_3 \pmod{N}$  的顺序和方式来访问剩余的  $N-1$  个节点,节点  $i_0 \rightarrow i_0+1 \pmod{N}$  是  $i_0$  的左子树,  $i_0 \rightarrow i_0+s_2 \pmod{N}$  为  $i_0$  的中

子树,  $i_0 \rightarrow i_0+s_3 \pmod{N}$  则为  $i_0$  的右子树。随后,再按从左至右的顺序从第一层的每一个节点发出  $[1]$ 、 $[s_2]$  和  $[s_3]$  发射边,继续访问节点,若该节点已被访问过,则什么也不做;若节点尚未被访问过,也就是说该节点还未在三叉树中出现过,再作为上一层节点的子节点加入成为第二层;此时,再从树的第二层上的每一个节点出发,按第一层的顺序和方法去访问其余未被访问,即没有加入三叉树的节点,直到网络中所有的  $N$  个节点都被访问到。上述严格依据三叉树层次来遍历网络所有节点的方法叫做三环网络的等价三叉树法,记为  $T_{TL}(N;1,s_2,s_3)$ 。

由于三环网络  $TL(N;1,s_2,s_3)$  具有对称性,所以只需研究节点 0 到其他节点的最短距离,  $d(N;1,s_2,s_3) = \max\{d(0,j): 1 \leq j \leq N-1\}$ 。即根节点永远为 0,再按照  $T_{TL}(N;1,s_2,s_3)$  构建三叉树模型。

该三叉树有以下性质:

性质 1:树  $T_{TL}(N;1,s_2,s_3)$  中,若节点  $v$  在树中的  $c$  层上,则必存在整数  $x,y,z$ ,其中  $x,y,z \geq 0$ ,使得  $v = x + y \cdot s_2 \pmod{N} + z s_3 \cdot \pmod{N}$ ,且  $c = x + y + z$ 。

证明:三叉树  $T_{TL}(N;1,s_2,s_3)$  中节点  $u$  到节点  $v$  的路径为  $uv$ ,可表示为  $(u_0, u_1, \dots, u_{k-1})$ ,其中  $u_0$  为根节点。由于三叉树的层是连续的,则由节点  $u$  到  $v$  必会经过  $k$  个节点,而终点为  $u_{k-1} = v$ ;路径  $uv$  所包含的节点数为  $k$ ,其中包含  $x$  个左子树节点,  $y$  个中子树节点及  $z$  个右子树节点,即从根节点  $u_0$  出发会经过  $x$  个左子树节点,  $y$  个中子树节点和  $z$  个右子树节点最终到达节点  $v$ ;所以,  $x + y + z = k - 1$ ,而节点  $v$  所在树的层次就为  $k - 1$ ,即  $c = k - 1$ ,则  $c = x + y + z$ ;又由三叉树的生成步骤可知:由根节点  $u_0$  出发经过  $x$  条  $[1]$  边、 $y$  条  $[s_2]$  和  $z$  条  $[s_3]$  边到达终节点  $u_{k-1}$ ,而  $u_{k-1} = v$ ,因此  $v = x + y \cdot s_2 \pmod{N} + z s_3 \cdot \pmod{N}$ ,得证。

推论 1:根节点到树中任意节点  $u$  所在层的所有节点的最短距离等于节点  $u$  所处的层数  $c$ 。

证明:设  $T_{TL}(N;1,s_2,s_3)$  任意一层的所有节点组成一个节点集  $u_i$ ,则  $u \in u_i$ ;在  $u_i$  中任意取一个节点  $v$ ,则  $v \in u_i$ 。由性质 1 可知,  $v = x + y \cdot s_2 \pmod{N} + z s_3 \cdot \pmod{N}$ ,且  $x + y + z = c$ ;设  $x', y', z'$ ,可以使得  $v = x' + y' \cdot s_2 \pmod{N} + z' s_3 \cdot \pmod{N}$ ,并且  $x' + y' + z' = m$ ,即其在  $m$  层,且  $m < c$ 。依据上述三环网络等价三叉树法的构造规则,此时  $v$  应在树的第  $m$  层,设  $m$  层所有节点集为  $u_j$ ,即  $v \in u_j$ ,而根据三叉树构造法,树中的各层节点集不相交,即  $u_i \cap u_j = \emptyset$ ,显然与  $v \in u_i$  矛盾。则节点  $u$  所在三叉树中的层数  $c$  等于根节点到该层所有节点的最短距离,证毕。

定理 1:直径  $d(N;1,s_2,s_3)$  等于树高  $h$ 。

证明:因为三环网络具有节点对称性,则仅需研究

从根节点(节点0)到其他节点的最短路径,即  $d(N;1,s_2,s_3) = \max\{d(0,j): 1 < j < N-1\}$ 。又由推论1可知:节点0到其他节点的最短距离为:  $1, \dots, h(h \geq 1)$ ,其中  $h$  为树的高度;因此,  $d(N;1,s_2,s_3) = \max\{1, \dots, h: 1 \leq h\} = h$ ,证毕。

2 三环网络  $TL(N;1,s,s+1)$  的等价二叉树构造算法

三环网络具有节点对称性,算法对于给定的节点数  $N$  设置0节点为起始点,以  $[1],[s_2],[s_3]$  为发射连接边,按如下步骤构造等价二叉树。

- Step1:初始化,给定  $N$ 、 $s_2$  和  $s_3$ ;
- Step2:绘制0节点在0层,此时层数为0,存储层数、节点值及其在二维空间的坐标值,此时,中间结果的节点数量  $NodeNum = 1$ ;
- Step3:依次对0加上  $1(\bmod N), s_2(\bmod N), s_3(\bmod N)$ ,则节点  $1, s_2, s_3$  为第1层,此时,0层就是此层的父层,0节点为刚刚加入树节点的父节点,将其节点值、所在层数及二维空间坐标值存储下来,再检查节点数量值  $NodeNum$  是否等于设定的节点数  $N$ ,如相等,执行 Step4,如不相等,再将第1层的节点按数值大小顺序分别加上  $1(\bmod N), s_2(\bmod N), s_3(\bmod N)$ ,依次判断节点值是否已经存在于数据库中,若已存在,则跳过,若未出现过,则将这些节点值、所在层数、节点二维空间坐标值记录下来,此时应为二叉树的第2层。如此循环,直到数据库里的节点数量值  $NodeNum$  与  $N$  相等;
- Step4:退出循环,绘制出二叉树图形;输出  $h$  为二叉树的树高,  $h$  就是该三环网络的直径  $d(N;1,s_2,s_3)$ 。

3 三环网络  $TL(N;1,s_2,s_3)$  的等价二叉树的仿真实现

构造算法采用 C#编程语言实现,SQL Server 2008 作为数据库存取计算的中间及最后结果,仿真实现了  $TL(N;1,s_2,s_3)$  这一族三环网络的等价二叉树模型,且对于任意给定的  $N,s_2,s_3$  都可以绘制出等价二叉树并计算出其直径。图1展示了其中的  $TL(19;1,5,9)$  的结果。

4 一系列三环网络  $TL(N;1,s_2,s_3)$  直径计算结果与分析

根据三环网络  $TL(N;1,s_2,s_3)$  的等价二叉树构造算法,对于给定的  $N(N > 3)$ ,及每个  $s_2$  和  $s_3(1 < s_2, s_3 < N-1)$  构造一个二叉树,输出其树高  $h$ ,即三环网

络的直径  $d(N;1,s_2,s_3)$ 。利用 C#和 SQL Server 2008 来编程实现,可以计算出  $TL(N;1,s_2,s_3)$  这一族三环网络的直径。数据库中已经存储大量的直径计算结果,限于篇幅,文中仅给出2个实例。

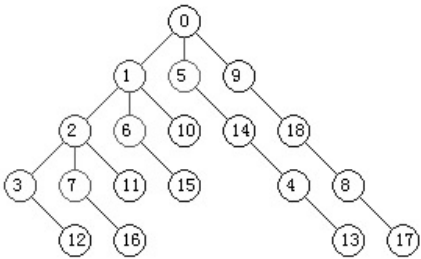


图1  $TL(19;1,5,9)$  的二叉树

(1)当  $N=49$  时( $N$  为奇数),直径  $d(N;1,s_2,s_3)$  取最大值为16,最小值为6,如图2所示。

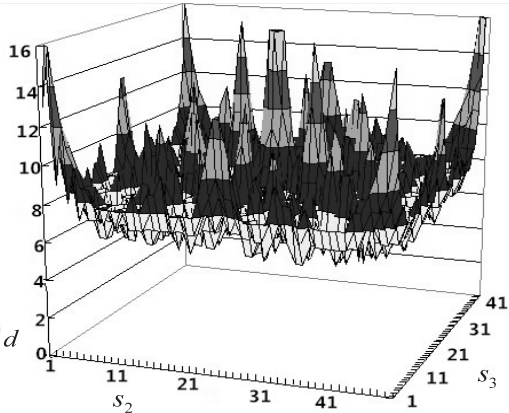


图2 三环网络  $TL(49;1,s_2,s_3)$  直径分布图

(2)当  $N=50$  时( $N$  为偶数),直径  $d(N;1,s_2,s_3)$  取最大值为24,最小值为6,如图3所示。

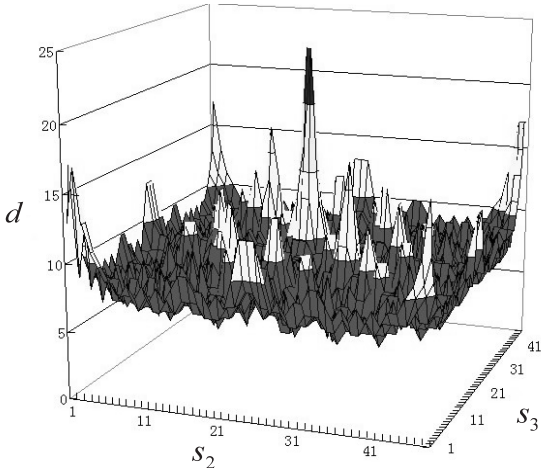


图3 三环网络  $TL(50;1,s_2,s_3)$  直径分布图

从以上直径分布图分析可以得出如下结论:

- (1)三环网络  $TL(N;1,s_2,s_3)$  的直径  $d(N;1,s_2,s_3)$ ,除去  $s_2 = s_3$ (即双环网络)的情况下,是中心对称分布。当  $N$  为奇数时,  $s_2 = (N-1)/2$  且  $s_3 = N - s_2, s_3 = (N+1)/2$  且  $s_2 = N - s_3, s_2 = (N+1)/2$  且  $s_3 = N +$



$2 - s_2, s_3 = (N + 1)/2$  且  $s_2 = N + 2 - s_3$  这一矩形区域为中心, 直径  $d(N; 1, s_2, s_3)$  的最大值为  $\lfloor N/3 \rfloor$ ; 当  $N$  为偶数时,  $s_2 = N/2$  且  $s_3 = s_2 + 1, s_3 = N/2$  且  $s_2 = s_3 + 1$  是中心, 直径  $d(N; 1, s_2, s_3)$  在中心处取最大值  $N/2 - 1$ , 这是由三环网络自身的对称性决定的。

(2) 对任何  $s_2 + s_3 = N$ , 都有  $d(N; 1, s_2, s_3) = d(N; 1, s_3, s_2)$ 。

直径  $d(N; 1, s_2, s_3)$  的上、下界与节点  $N$  的变化关系从如图4中可以很明显地得到。

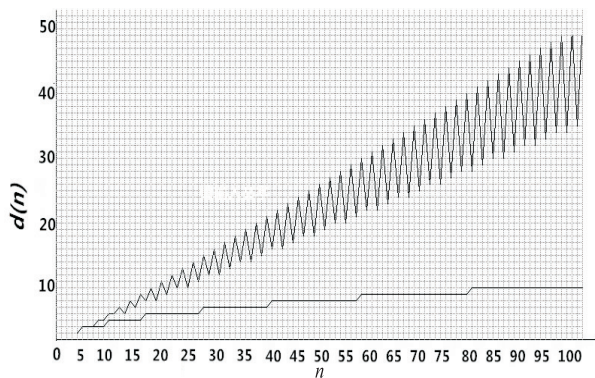


图4 三环网络  $TL(N; 1, s_2, s_3)$  直径上下界分布图

分析直径上界与下界分布曲线图可以得出如下结论:

(1) 直径的上界  $d_{\text{Upper}}$  随节点数  $N$  的增加而有规律地呈锯齿状波动性增加。分析直径的上界数据可以得到直径  $d(N; 1, s_2, s_3)$  上界公式。其中  $N$  为节点数,  $n$  为整数。

$$d_{\text{Max}} = \begin{cases} (N - 2)/2, N = 2n (n \geq 2) \\ (N + 1)/3, N = 6n - 1 (n \geq 1) \\ (N - 1)/3, N = 6n + 1 (n \geq 1) \\ N/3, N = 3(2n + 1) (n \geq 1) \end{cases}$$

(2) 直径的下界  $d_{\text{Lower}}$  随节点数  $N$  的增加而有规律地呈阶梯状增加。分析直径的下界数据可以得到直径  $d(N; 1, s_2, s_3)$  下界公式。其中  $N$  为节点数,  $n$  为整数,

并且  $n \geq 1, f(n) = \begin{cases} f(0) = 5, n = 0 \\ f(n - 1) + 2n + 3, n > 0 \end{cases}$ 。

$$d_{\text{Min}} = \begin{cases} 1, N = 4 \\ n + 2, f(n) \leq N < f(n + 1) \end{cases}$$

## 5 结束语

文中推广应用了等价二叉树方法, 来研究计算三环网络  $TL(N; 1, s_2, s_3)$  的直径。由于此族三环网络有两个发射边变量, 虽然研究方法与文献[10]类似, 但得到的直径的分布图却是三维的, 且分析较为复杂, 并

且得到了其上下界的显式公式。文献[1]试图给出三环网络  $TL(N; s_1, s_2, s_3)$  上下界的显式公式, 发现其下界有跃变性, 却未能给出原因。从文中及文献[10]的研究结果看,  $TL(N; 1, s, s + 1)$  与  $TL(N; 1, s_2, s_3)$  的下界都没有跃变性, 如何将这一算法改进, 推广到广义三环网络  $TL(N; s_1, s_2, s_3)$  (其中  $s_1, s_2, s_3$  是自然数, 且  $1 \leq s_1 \neq s_2 \neq s_3 < N - 1$ ), 解开下界跃变之谜, 是今后的研究方向。

## 参考文献:

- [1] Aguiló F, Fiol M A, García C. Triple-loop networks with small transmission delay[J]. Discrete Mathematics, 1997, 167-168: 3-16.
- [2] Aguiló F. New dense families of triple loop networks[J]. Discrete Mathematics, 1999, 197-198: 15-27.
- [3] Hwang F K, Du D Z. A survey on multi-loop networks[J]. Theoretical Computer Science, 2003, 299(1-3): 107-121.
- [4] Hwang F K, Lin B C. K-diameters of the hyper-L shape tile[J]. Interconnection Network, 2002, 3(3-4): 245-252.
- [5] Chen C, Hwang F K, Lee J S, et al. The existence of hyper-L triple-loop networks[J]. Discrete Mathematics, 2003, 268(1-3): 287-291.
- [6] Chen C, Hung C S, Tang W S. On the existence of hyper-L triple-loop networks[J]. Discrete Mathematics, 2006, 306(12): 1132-1138.
- [7] 侯新民, 王天明. 分布式三环网络传输延迟[J]. 大连理工大学学报, 2002, 42(1): 9-12.
- [8] Sabariego P, Santos F. Triple-loop networks with arbitrarily many minimum distance diagrams[J]. Discrete Mathematics, 2009, 309: 1672-1684.
- [9] 邵伟鹏, 方木云, 徐宏, 等. 三环网络  $TL(N; 1, s, s + 1)$  超L型瓦仿真算法[J]. 华中科技大学学报: 自然科学版, 2010, 38(3): 50-52.
- [10] 邵伟鹏, 岳建华, 方木云. 一种新的三环网络  $TL(N; 1, s, s + 1)$  直径求解方法[J]. 中国矿业大学学报, 2012, 41(3): 510-514.
- [11] 边琼芳, 邵伟鹏, 苏小虎, 等. 基于图论模型的三环网络  $G(N; 1, s, s + 1)$  直径分布算法[J]. 安徽工业大学学报: 自然科学版, 2012, 29(4): 371-374.
- [12] 陈业斌, 李颖, 郑啸, 等. 关于有向环网平均直径的研究[J]. 通信学报, 2013, 34(2): 138-146.
- [13] 方木云, 屈玉贵, 赵保华. 双环网络的  $[+h]$  边优先寻径策略[J]. 计算机学报, 2008, 31(3): 536-542.
- [14] 刘辉, 方木云, 郑啸, 等. 直角坐标系下无向双环网络  $G(N; \pm 1, \pm s)$  直径的研究[J]. 通信学报, 2011, 32(1): 138-143.

等价三叉树模型的三环网络TL (N;1, s2, s3) 研究

作者：

[姜太平](#)，[徐超](#)，[邵伟鹏](#)，[王小林](#)，[JIANG Tai-ping](#)，[XU Chao](#)，[TAI Wei-peng](#)，[WANG Xiao-lin](#)

作者单位：

[安徽工业大学 计算机学院, 安徽 马鞍山, 243000](#)

刊名：

[计算机技术与发展](#)

英文刊名：

[Computer Technology and Development](#)

年，卷(期)：

2015 (6)

引用本文格式：[姜太平](#). [徐超](#). [邵伟鹏](#). [王小林](#). [JIANG Tai-ping](#). [XU Chao](#). [TAI Wei-peng](#). [WANG Xiao-lin](#) 等价三叉树模型的三环网络TL (N;1, s2, s3) 研究[期刊论文]-[计算机技术与发展](#) 2015 (6)