

基于小波变换的分块压缩感知算法

荣雁霞, 邱晓晖

(南京邮电大学 通信与信息工程学院, 江苏 南京 210003)

摘要:利用压缩感知理论实现了对二维图像的精确重构,但此方法是对整幅图像进行重构,花费时间长,观测矩阵所需的存储空间大。为了解决这个矛盾,根据图像小波变换系数的特点,将图像分块思想与小波变换相结合,提出一种基于小波变换的分块压缩感知算法。每一个图像块经小波变换后,保留图像低频系数,只对高频系数进行观测。重构时采用正交匹配追踪算法(OMP)对高频系数进行恢复。实验结果表明,文中算法与不分块压缩感知算法相比,重构图像的 PSNR 值有 2~4 dB 的提高,重构时间明显减少。与基于二维离散余弦变换(DCT)的分块压缩感知算法相比,块效应有明显的改善,重构质量明显提高。

关键词:分块压缩感知;小波变换;图像重构;正交匹配追踪

中图分类号:TN911

文献标识码:A

文章编号:1673-629X(2015)05-0029-04

doi:10.3969/j.issn.1673-629X.2015.05.008

Image Blocking Compressed Sensing Algorithm Based on Wavelet Transform

RONG Yan-xia, QIU Xiao-hui

(College of Communication and Information Engineering, Nanjing Univ. of Posts and Tele.,
Nanjing 210003, China)

Abstract: Use the compressed sensing theory to realize the accurate reconstruction of two-dimensional image, but this method aims at whole image which is needed long time and large storage space of matrix. To solve this problem, according to the properties of image wavelet transform coefficients, combined image blocking theory and wavelet transform, an improved blocking compressed sensing algorithm based on wavelet transform is proposed, which only measured the high-pass wavelet coefficients of the image algorithm while retaining the low-dimensional coefficients. For the reconstruction, by using the Orthogonal Matching Pursuit (OMP) algorithm, high-pass wavelet coefficients could be recovered by the measurements. Experimental results show that the PSNR of image reconstruction is improved about 2 to 4, the time of reconstruction is decreased obviously, compared with the compressed sensing algorithm without blocking. Compared with blocking compressed sensing based on DCT, the blocking effects and the quality of the recovered image is improved obviously.

Key words: blocking compressed sensing; wavelet transform; image reconstruction; orthogonal matching pursuit

0 引言

为了实现无失真的信号重建,传统的信号采样速率必须大于等于信号带宽的 2 倍。近年来,由 Candes 和 Donoho 等人提出的压缩感知理论(Compressed Sensing, CS)^[1-3]突破了这一局限。压缩感知理论使得信号采样和压缩同时进行,其信号采集速度可以大大降低。其核心思想是如果信号是可压缩的或者在某个变换基上是稀疏的,那么就可以利用观测矩阵将其投影到一个低维空间,获得远小于信号维度的测量值,

再通过压缩感知重构算法求解出原始信号^[4-5]。压缩感知理论使得在信号采集的同时对数据进行压缩,从而避免了大量无用数据的采集,节省了时间和资源,为信号采样领域带来了革新^[6-9]。

根据压缩感知理论,图像重构时如果尺寸太大,在采集端等待全部图像信号采集完毕后再进行测量,需要很多的存储空间和时间。2007 年, Lu Gan 提出了分块压缩感知(Block Compressed Sensing, BCS)^[10]。该方法指出:可以将原始图像分成一些大小相等的图像

收稿日期:2014-07-05

修回日期:2014-10-07

网络出版时间:2015-04-22

基金项目:江苏省自然科学基金(BK2011789);东南大学毫米波国家重点实验室开放课题(K201318)

作者简介:荣雁霞(1989-),女,硕士研究生,研究方向为智能信号处理、数字图像处理;邱晓晖,教授,研究方向为现代信号中的智能信号处理。

网络出版地址: <http://www.cnki.net/kcms/detail/61.1450.TP.20150422.1008.022.html>

块,采用相同的观测矩阵单独对每个图像块进行观测和重构。这种方法能解决大尺度图像实时传输的问题,使计算复杂度大大减少。而且在观测时每一个图像块的测量矩阵远小于整幅图像的测量矩阵,便于存储。但传统的 BCS 在重构时虽然计算量小,但重构图像会产生一定的块效应,重构质量有所下降。文中将图像分块思想与小波变换相结合,提出一种基于小波变换的分块压缩感知算法。算法的思想:图像经小波变换后,低频系数对图像重构起到了很重要的作用。原图像分块后,对每一个子块进行小波变换。然后保留每个小块的低频系数,只对高频系数进行压缩采样得到测量向量。重构时利用正交匹配追踪(OMP)算法对高频系数进行恢复,再进行小波反变换重构图像。这样一方面减少重构所需的测量数,一方面可以提高重构的精度。

1 压缩感知理论简介

设信号 x 是长度为 N 的离散信号,可以用一组基 $\Psi_{N \times N} = \{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N\}$ 的线性组合表示,即

$$x = \Psi\theta = \sum_{i=1}^N \psi_i \theta_i \quad (1)$$

其中, $\theta_i = \langle x, \psi_i \rangle$ 。若信号 x 可以仅被 K 个基向量线性表示时,则称信号 x 在基 Ψ 上是 K 稀疏的, Ψ 是信号 x 的稀疏基。当 $k \ll N$ 时,如果信号可以被很少的大系数和很少的小系数表示的话,则称信号 x 是可压缩(稀疏)^[11]的。

对于信号 x ,可将其投影到一组测量向量 $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_M\}$ 上,得到 x 的 M 个线性测量,即:

$$y = \Phi x, \Phi \in R^{M \times N} \quad (2)$$

对信号 x 进行线性测量,得到信号 x 的测量值 y 。对于给定的测量值 y 从式(2)求解是一个线性规划问题。由于 $K < M \leq N$,所以式(2)是一个欠定方程,需要从 M 个方程中求 N 个解,然而欠定方程的解一般是不唯一的。为了解决这个问题,设计合适的测量矩阵 Φ ,使得式(2)中的 Φ 满足约束等距性质(Restricted Isometry Property, RIP)^[12],即对于稀疏度为 K 的信号 x ,RIP 可以如下表示:

$$(1 - \delta_K) \|x\|_2^2 \leq \|\Phi x\|_2^2 \leq (1 + \delta_K) \|x\|_2^2 \quad (3)$$

就可以由 y 无失真地恢复出 x 。CS 信号的恢复问题可以表示成求解如下的 l_0 范数下的最优化(Optimization)问题:

$$\min_x \|x\|_0 \quad \text{s.t.} \quad \|y - \Phi x\|_2 < \varepsilon \quad (4)$$

然而求解 l_0 范数最优化是个 NP-hard 问题,可将问题转换为:

$$\min_x \|x\|_1 \quad \text{s.t.} \quad \|y - \Phi x\|_2 < \varepsilon \quad (5)$$

对于求解 l_1 最小范数下的最优化问题,目前的求解算法有贪婪追踪算法,每次迭代选择一个局部最优解来逼近原始信号。主要包括匹配追踪(MP)^[13]和正交匹配追踪(OMP)^[5]算法。此类算法计算速度快,但所需的观测值较多。还有一类是凸松弛算法,该类算法是将非凸优化问题转换成凸优化问题,求解得到原始信号的逼近。代表算法:基追踪(BP)^[14]法,此类算法需要的观测值少,但计算复杂度大。

OMP 算法的思想:是一种迭代贪婪算法,每次迭代选择与迭代余量有着最大相关性的原子(测量矩阵 Φ 的列)的索引,加入上一次迭代后的支撑集,再进行迭代余量更新,即从测量值 y 中减去其在所选原子上的正交投影,直到迭代次数等于信号的稀疏度 K ,停止迭代。当信号数据量 N 大时使用此方法可大大减少计算量,所以 OMP 算法更适合用于图像的重构。

2 基于小波变换的分块压缩感知

2.1 二维图像的直接 CS 重构

本节利用压缩感知理论结合小波变换实现了对二维图像的精确重构,具体步骤如下:

步骤 1:选取大小为 $N \times N$ 的二维图像,根据图像大小构建正交小波变换矩阵。

步骤 2:利用正交小波变换矩阵对图像进行稀疏化表示,得到图像系数表示矩阵。

步骤 3:选取合适的 M 值,构造大小为 $M \times N$ 维的高斯随机矩阵,对图像稀疏表示矩阵进行测量。

步骤 4:采用 OMP 算法对观测向量矩阵进行重构,得到重构系数矩阵。

步骤 5:对重构所得系数矩阵进行小波反变换,得到重构图像。

文中选取标准测试图像 Lena 256×256 ($N = 256$)。测量矩阵选取独立同分布的高斯随机矩阵,分别对图像进行采样率(M/N)为 0.2、0.3、0.4、0.5 的采样,并采用 OMP 算法对测量值进行重构。为了衡量图像效果,采用客观图像质量评价指标 PSNR 来表征重构图像和相应原始图像之间的差别。

通过上述步骤,在不同采样率下得到的重构结果如图 1 所示。

从图 1 可以看出:当采样率为 0.2 时,PSNR 值过低,重构图像效果差;采样率为 0.5 时,重构图像的质量有明显的提高。但随着采样率的提高,重构所需时间和观测值数量也会大大增加。而且该方法是对整幅图像进行观测,测量矩阵所需的存储空间比较大,对大尺度的图像重构代价比较大。

2.2 DCT 分块压缩感知

针对在二维图像的直接 CS 重构算法中所遇到的

问题,根据 Lu Gan 提出的将图像分块进行重构的思想,文献[15]提出了基于二维 DCT 变换的分块压缩感知算法。该算法首先将原始图像均匀分块,对每个子块进行 DCT 变换,然后采用相同的观测矩阵单独对每个图像块进行观测和重构,最后采用 OMP 算法重构每个图像块,再把图像块拼起来得到图像。此方法不仅可以减少运算复杂度,也减少了传感器部分的存储量;而且不需要传输所有的观测数据,加快了重构速度。但运用此方法在采样率过低时重构出来的图像有明显的块效应和人为噪声。

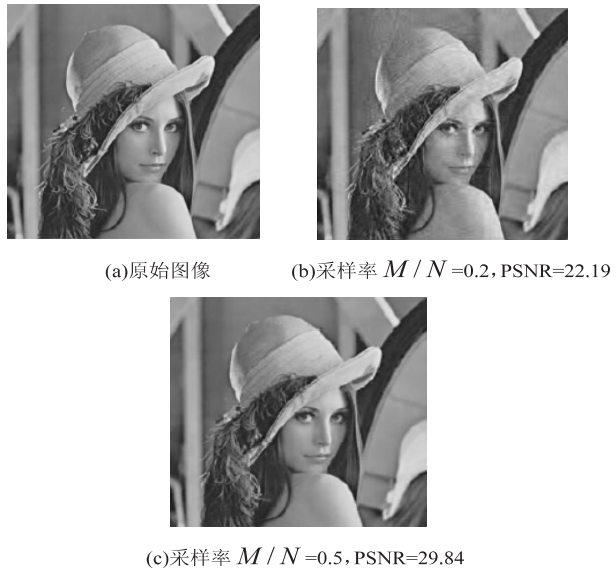


图1 Lena 原始图像及 CS 重构图像

2.3 小波变换分块压缩感知

文献[16]中提到图像经一层小波分解后高频子带和低频子带的特性。在图像经小波变换后如果将高频系数与低频系数一起重构,会破坏低频分量系数之间的相关性,导致重构效果变差。因此文中对直接 CS 重构算法和 DCT 分块算法进行了改进,提出了一种基于小波变换的分块压缩感知算法。

- 具体算法步骤如下:
- 步骤 1:将原始图像 X 进行分块, X 像素大小为 $I=N \times N$, 均匀分成大小为 $B \times B$ 的子块,每个子块均记为 $X_i, i=1,2,\cdots,N/B$;
- 步骤 2:选择合适的 M 值,对每个子块 X_i 设计相同维数为 $M_B \times B^2$ 的高斯随机观测矩阵,其中 $M_B=(M \times B^2)/I$ 。此时整幅图像的观测矩阵是由每个子块的观测矩阵组成的对角矩阵;
- 步骤 3:对每个子块 $X_i, i=1,2,\cdots,N/B$ 进行一层小波变换,每个子块得到一个低频子带 LL,3 个高频子带 {LH,HL,HH},此时得到图像经过小波分解后的低频系数和高频系数。保留低频系数,只对高频系数进行测量;
- 步骤 4:对每一块测量后的高频系数矩阵采用

OMP 算法进行重构;

步骤 5:恢复的高频系数与低频系数一起进行小波反变换得到恢复的图像。最后将恢复的子块合并成整幅图像。

3 仿真结果分析

为验证文中算法的正确性,选取标准测试图像 Lena 256×256 。在实验中将图像分成 16×16 和 32×32 的小块。观测矩阵选取高斯随机矩阵,重构算法采用 OMP。表 1 是文中算法和直接 CS 重构算法在采样率分别为 0.2、0.3、0.4、0.5 的情况下,恢复图像的重构时间。表 2 是文中算法、DCT 分块算法和直接 CS 重构算法在不同采样率下恢复图像的 PSNR 值。

表1 文中算法和直接 CS 重构算法
不同采样率下的重构时间

Lena 256×256	分块 16×16	分块 32×32	直接 CS 重构
采样率(M/N)	重构时间/s	重构时间/s	重构时间/s
0.2	4.56	7.57	13.27
0.3	8.64	11.71	22.02
0.4	11.53	15.02	29.59
0.5	14.87	18.53	40.53

表2 三种算法不同采样率下的 PSNR 值

Lena 256×256	文中算法		DCT 分块算法		直接 CS 重构 PSNR/dB
	分块	分块	分块	分块	
	16 \times 16	32 \times 32	16 \times 16	32 \times 32	
采样率(M/N)	PSNR/dB	PSNR/dB	PSNR/dB	PSNR/dB	
0.2	26.53	28.21	25.19	27.43	22.19
0.3	27.36	29.61	26.71	28.83	24.37
0.4	29.53	31.03	28.17	30.38	27.38
0.5	31.79	33.46	30.53	32.76	29.84

从表 1 和表 2 中可以看出,利用文中算法得到图像的 PSNR 值比直接 CS 重构算法高 2 ~ 4 dB,而且随着分块大小的提高 PSNR 值有相应提高。但实验证明随着分块大小的增加计算复杂度也会相应增加。文中算法的重构时间比直接 CS 算法明显减少,重构速度有所提高。

图 2 给出了 Lena 图像 16×16 分块在 0.1、0.2、0.3、0.4 采样率下,采用 DCT 分块算法(左)和文中算法(右)重构得到的图像。从表 2 和图 2 中可以看出,基于 DCT 变换的分块算法在低采样率下有明显的块效应,而文中算法利用小波变换后子带的频率特性有效改善了块效应,PSNR 值平均有 1.2 dB 的提高,增强了图像的重构质量。

4 结束语

压缩感知算法在对整幅图像进行重构时,计算复

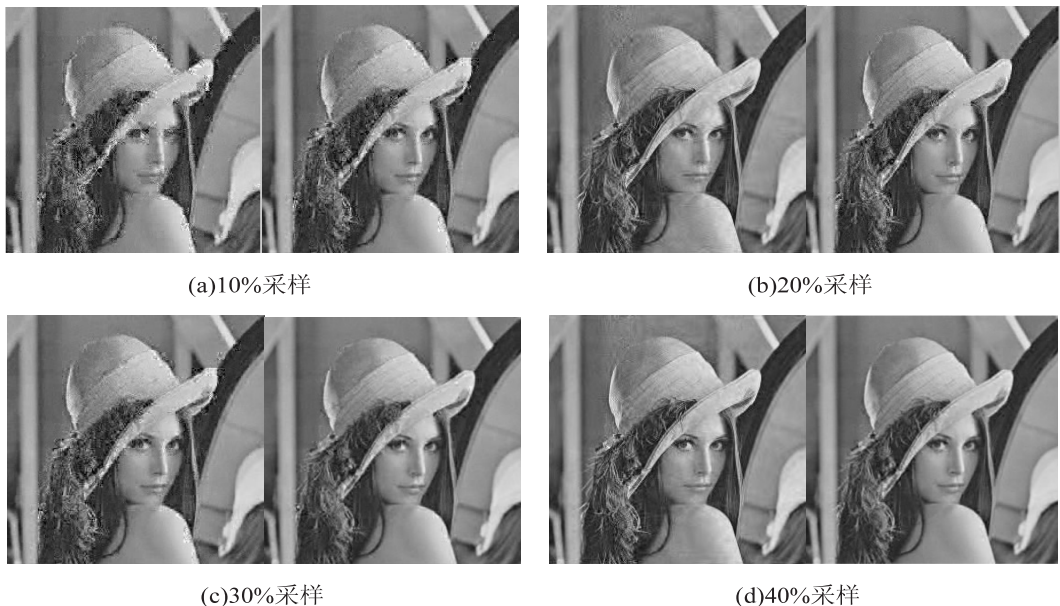


图 2 Lena 图像在 DCT 分块算法(左)和文中算法(右)不同采样率下的重构图

杂度大,所需存储空间大。采用分块的思想,可有效提高重构质量,大大减少重构时间。根据图像小波分解中低频系数的特点,将小波变换与分块压缩感知相结合,提出了基于小波变换的分块压缩感知算法。与原有的压缩感知重构算法比较,文中算法重构图像的 PSNR 值有一定的提高,重构质量明显增强。

参考文献:

- [1] Donoho D L. Compressed sensing[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52(4): 1289-1306.
- [2] Candes E, Romberg J, Tao T. Robust uncertainty principles: exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52(2): 489-509.
- [3] Candès E. Compressed sampling[C]//Proceedings of the international congress of mathematicians. Madrid, Spain: [s. n.], 2006: 1433-1452.
- [4] 张晓咏,熊承义,胡开云,等. 基于灰度纹理信息的图像压缩感知编码与重构[J]. 计算机技术与发展, 2013, 23(1): 47-50.
- [5] Tropp J, Gilbert A C. Signal recovery from random measurements via orthogonal matching pursuit[J]. IEEE Trans on Information Theory, 2008, 53(12): 4655-4666.
- [6] 石光明,刘丹华,高大化,等. 压缩感知理论及其研究进展

[J]. 电子学报, 2009, 37(5): 1070-1081.

- [7] 金 坚,谷源涛,梅顺良. 压缩采样技术及其应用[J]. 电子与信息学报, 2010, 32(2): 470-475.
- [8] 刘吉英,朱炬波. 基于压缩感知的低数据率雷达采样与成像方法[J]. 计算机工程与科学, 2012, 34(7): 114-119.
- [9] 吕 翊,林贺宇,赵 辉,等. 基于 sym8 小波和部分 had-mard 矩阵的深空图像压缩编码[J]. 重庆邮电大学学报: 自然科学版, 2012, 24(5): 646-651.
- [10] Lu Gan. Block compressed sensing of natural images[C]//Proceedings of the international conference on digital signal processing. Cardiff, UK: [s. n.], 2007: 403-406.
- [11] Baraniuk R G. Compressive sensing[J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2007, 24(4): 118-124.
- [12] Candès E. The restricted isometry property and its implications for compressed sensing[J]. Comptes Rendus Mathématique, 2008, 346(9-10): 589-592.
- [13] Mallat S, Zhang Z. Matching pursuits with time-frequency dictionaries[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1993, 41(12): 3397-3415.
- [14] Candès E, Tao T. Decoding by linear programming[J]. IEEE Trans on Information Theory, 2005, 51(12): 4203-4215.
- [15] 沈明欣,刘文波. 基于压缩感知理论的图像重构技术[J]. 电子科技, 2011, 24(3): 9-12.
- [16] 岑翼刚,陈晓方,岑丽辉,等. 基于单层小波变换的压缩感知图像处理[J]. 通信学报, 2010, 31(8A): 52-55.

基于小波变换的分块压缩感知算法

作者：[荣雁霞](#)，[邱晓晖](#)，[RONG Yan-xia](#)，[QIU Xiao-hui](#)
作者单位：[南京邮电大学 通信与信息工程学院, 江苏 南京, 210003](#)
刊名：[计算机技术与发展](#)[ISTIC](#)
英文刊名：[Computer Technology and Development](#)
年，卷(期)：2015(5)

引用本文格式：[荣雁霞](#), [邱晓晖](#), [RONG Yan-xia](#), [QIU Xiao-hui](#) [基于小波变换的分块压缩感知算法](#)[期刊论文]-[计算机技术与发展](#) 2015(5)