

编队卫星最小推力合作交会飞行轨道设计

朱小龙^{1,2}, 刘迎春¹

(1. 中国科学院 空间应用工程与技术中心, 北京 100094;

2. 中国科学院大学, 北京 100049)

摘要: 相较传统的被动式交会而言, 空间合作交会往往能显著地减少总燃料消耗量。为求解编队卫星最小连续推力合作交会飞行轨迹, 首先分别求出双星独立交会至原点处的双脉冲解; 然后以推力幅值为延拓变量, 逐步减小推力幅值, 将双脉冲解最终延拓至最小推理解; 最后利用得到的两组最小推理解直接优化出最小连续推力合作交会解。该方法通过建立双脉冲轨道与最小推力轨道之间的延拓关系, 并使用双脉冲解作为协态变量初始猜测值, 从而较为平滑地得到了满足最小连续推力最优控制一阶必要条件的合作交会解, 同时避免了最优控制问题中协态变量的随机猜测。仿真结果验证了所提出方法的有效性。

关键词: 合作交会; 最小推力; 数值延拓; 编队卫星

中图分类号: V412.4

文献标识码: A

文章编号: 1673-629X(2015)03-0136-06

doi: 10.3969/j.issn.1673-629X.2015.03.031

Orbit Design for Minimum-thrust Cooperative Rendezvous between Formation Satellites

ZHU Xiao-long^{1,2}, LIU Ying-chun¹

(1. Technology and Engineering Center for Space Utilization, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100094, China;

2. University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China)

Abstract: Compared with traditional passive rendezvous, cooperative rendezvous can usually decrease the total fuel consumption remarkably. In order to obtain the minimum-thrust cooperative rendezvous trajectory between formation satellites, firstly, a two-impulse solution which ensures rendezvous to the origin is solved respectively. Then the thrust amplitude which is the continuation variable is decreased gradually and the minimum-thrust amplitude is ultimately deprived from the two-impulse solution. At last, the minimum-thrust cooperative rendezvous orbit can be optimized directly. By establishing the continuation relationship between the two-impulse orbit and the minimum-thrust one and taking the two-impulse solution as the initial guess values of costate variables, the proposed method smoothly obtains the minimum-thrust cooperative rendezvous solution that satisfies the necessary conditions in the optimal control and the costate variables in the optimal control problem are no longer acquired randomly. Simulation results show the effectiveness of the proposed approach.

Key words: cooperative rendezvous; minimum-thrust; numerical continuation; formation satellites

0 引言

空间合作交会是指对目标航天器和追踪航天器均施加主动控制, 使二者在末端时刻具有完全相同的位置和速度矢量。与传统的被动式交会^[1-4]相比, 合作交会往往能显著地减少总燃料消耗量, 在执行在轨服务、空间协同作战及编队调整等复杂任务时, 具有明显优势^[5]。随着小卫星编队飞行的发展, 合作交会也成

为小卫星协同工作的重要技术之一。

文中讨论的空间合作交会涉及到两个航天器的最优转移轨道设计, 相对以往单一航天器转移轨道优化设计来说变得更为复杂。针对航天器合作交会的最优控制问题, 国内外学者尝试了包括遗传算法^[6]、直接配置法^[7]和混合法^[8]在内的多种轨迹优化方法, 并取得了一定的成果。文中在借鉴相关研究的基础上, 主要

收稿日期: 2014-04-15

修回日期: 2014-07-20

网络出版时间: 2015-01-20

基金项目: 中国科学院知识创新工程重大项目(KGGX1-YW-24)

作者简介: 朱小龙(1991-), 男, 硕士研究生, 研究方向为相对运动轨迹优化; 刘迎春, 研究员, 研究方向为空间应用任务分析与系统设计。

网络出版地址: <http://www.cnki.net/kcms/detail/61.1450.TP.20150120.2200.021.html>

探讨两颗编队卫星的最小连续推力合作交会飞行轨道的优化设计问题。最小连续推力解不仅对进行合作交会的两星提出了推力幅值下限值的要求,而且具有推力均保持全程开启的性质,满足最优控制的一阶必要条件,可以为求解其他推力水平 bang-bang 控制最优解奠定基础,如提供协态变量初始猜测值。因此,研究最小连续推力合作交会飞行轨道的优化设计问题有着十分重要的意义。

为了有效地得到最小连续推力,引入了系统参数延拓方法。延拓方法的基本思想是从一个相对简单的问题出发,通过对某些系统参数的连续延拓最终求解出原本较难解决的问题。自 Bertrand^[9]考虑引入同伦延拓方法解决一般 bang-bang 最优控制问题以来,学者们已利用同伦延拓方法求解了深空转移轨道^[10]、编队调度^[11]以及编队重构^[12]的最优控制问题。然而目前还较少有公开文献讨论如何将延拓方法应用到合作交会飞行轨迹优化设计中去,并且已有的同伦延拓方法依然存在部分不足,如缺乏较为系统而有效地选取初始协态变量的方法。文中所展现的主要研究思想是从双脉冲解出发,通过对推力幅值延拓最终得到单颗卫星交会参考轨道的最小连续推力,然后再得到两颗卫星合作交会的最小连续推力解。

1 最小连续推力最优控制模型

1.1 编队卫星运动模型

文中研究涉及圆轨道编队中的任意两颗卫星。假设圆轨道为参考轨道,编队卫星的轨道控制均采用连续推力的形式,且不考虑燃料消耗过程中编队卫星质量的变化。任意一颗卫星相对参考轨道的相对运动可用 HCW 方程描述^[13]。用于建立 HCW 相对运动模型的坐标系定义如下:坐标系原点位于主星, x 轴由地心指向主星, y 轴在主星轨道面上与 x 轴垂直,沿运动方向为正, z 轴垂直于轨道平面,与 x, y 轴构成右手系。

采用 HCW 方程所描述的相对运动模型可表示为

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{r}} \\ \dot{\mathbf{v}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{E}_1 \mathbf{r} + \mathbf{E}_2 \mathbf{v} + \mathbf{F} \mathbf{u} \end{bmatrix}, \quad \|\mathbf{u}\| = 1 \quad (1)$$

式中, \mathbf{r} 和 \mathbf{v} 分别为卫星的相对位置与速度矢量; \mathbf{F} 为卫星推力加速度幅值并有上限 F_{\max} (设卫星取单位质量,推力加速度后文中直接称为推力); \mathbf{u} 为推力方向的单位矢量;矩阵 \mathbf{E}_1 与 \mathbf{E}_2 表示如下:

$$\mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} 3n^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -n^2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2n & 0 \\ -2n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

式中, n 为主星圆轨道的轨道角速度。
令 $F = 0$, 此时无主动的推力控制,求解式(1)可得到

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r}(t) \\ \mathbf{v}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{r}(t_0) \\ \mathbf{v}(t_0) \end{bmatrix} \quad (4)$$

式中, t_0 表示初始时刻; t 表示任意时刻。记 $M = n(t - t_0)$, $s_M = \sin M$, $c_M = \cos M$, 则式(4)中矩阵 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ 可表示为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 - 3c_M & 0 & 0 \\ 6(s_M - M) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c_M \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{s_M}{n} & \frac{2(1 - c_M)}{n} & 0 \\ \frac{2(c_M - 1)}{n} & \frac{(4s_M - 3M)}{n} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{s_M}{n} \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3ns_M & 0 & 0 \\ 6n(c_M - 1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -ns_M \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} c_M & 2s_M & 0 \\ -2s_M & 4c_M - 3 & 0 \\ 0 & 0 & c_M \end{bmatrix} \quad (8)$$

设两颗编队卫星的状态变量分别为 $\mathbf{r}_1(t)$, $\mathbf{v}_1(t)$ 和 $\mathbf{r}_2(t)$, $\mathbf{v}_2(t)$, 在末端时刻 t_f , 如果令

$$\boldsymbol{\psi} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_2(t_f) \\ \mathbf{v}_2(t_f) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1(t_f) \\ \mathbf{v}_1(t_f) \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (9)$$

求解式(9)即可得到编队卫星的合作交会轨迹。如果末端时刻两颗编队卫星的状态变量满足

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r}_2(t_f) \\ \mathbf{v}_2(t_f) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1(t_f) \\ \mathbf{v}_1(t_f) \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (10)$$

则表明两颗编队卫星是同时向原点处交会,可以看作是合作交会的一个特例。

1.2 最优控制问题模型

基于式(1)所描述的相对运动方程,给定两颗编队卫星初始状态 $\mathbf{r}_1(t_0), \mathbf{v}_1(t_0), \mathbf{r}_2(t_0), \mathbf{v}_2(t_0)$ 及交会周期 T , 合作交会最优控制问题可以描述如下:寻找两颗编队卫星的最优推力 $F_1(t), F_2(t)$, 在保证约束方程(9)的条件下,使得如下总速度脉冲最小化。

$$J = \Delta v = \int_0^T [F_1(t) + F_2(t)] dt \quad (11)$$

式中,性能指标为积分型^[14]。

系统哈密顿函数为

$$H = F_1 + \boldsymbol{\lambda}_{r_1}^T \mathbf{v}_1 + \boldsymbol{\lambda}_{v_1}^T (\mathbf{E}_1 \mathbf{r}_1 + \mathbf{E}_2 \mathbf{v}_1 + F_1 \mathbf{u}_1) +$$

$$F_2 + \lambda_{r_2}^T v_2 + \lambda_{v_2}^T (E_1 r_2 + E_2 v_2 + F_2 u_2) \quad (12)$$

协态变量方程可推导为

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_{r_1}^T = -\frac{\partial H}{\partial r_1} = -\lambda_{v_1}^T E_1 \\ \dot{\lambda}_{v_1}^T = -\frac{\partial H}{\partial v_1} = -\lambda_{r_1}^T - \lambda_{v_1}^T E_2 \\ \dot{\lambda}_{r_2}^T = -\frac{\partial H}{\partial r_2} = -\lambda_{v_2}^T E_1 \\ \dot{\lambda}_{v_2}^T = -\frac{\partial H}{\partial v_2} = -\lambda_{r_2}^T - \lambda_{v_2}^T E_2 \end{cases} \quad (13)$$

显然,式中的两组协态变量互相解耦。求解任意一组可以得到

$$\begin{bmatrix} \lambda_r(t) \\ \lambda_v(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F & G \\ H & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_r(t_0) \\ \lambda_v(t_0) \end{bmatrix} \quad (14)$$

式中的矩阵 F, G, H, I 可表示为

$$F = \begin{bmatrix} 4 - 3c_M & -6(s_M - M) & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c_M \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$G = \begin{bmatrix} -3ns_M & 6n(c_M - 1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ns_M \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$H = \begin{bmatrix} -\frac{s_M}{n} & -\frac{2(1 - c_M)}{n} & 0 \\ \frac{2(1 - c_M)}{n} & \frac{3M - 4s_M}{n} & 0 \\ 0 & 0 & -s_M \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$I = \begin{bmatrix} c_M & 2s_M & 0 \\ -2s_M & 4c_M - 3 & 0 \\ 0 & 0 & c_M \end{bmatrix} \quad (18)$$

该最优控制问题的横截条件为

$$\begin{bmatrix} \lambda_{r_1}(t_f) \\ \lambda_{v_1}(t_f) \\ \lambda_{r_2}(t_f) \\ \lambda_{v_2}(t_f) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial r_1} \gamma_r \\ \frac{\partial \psi}{\partial v_1} \gamma_v \\ \frac{\partial \psi}{\partial r_2} \gamma_r \\ \frac{\partial \psi}{\partial v_2} \gamma_v \end{bmatrix}_{t_f} = \begin{bmatrix} -\gamma_r \\ -\gamma_v \\ \gamma_r \\ \gamma_v \end{bmatrix} \quad (19)$$

式中, ψ 如式(9)所示;变量 γ_r, γ_v 为相应的乘子,可取任意值。因此协态变量在末端时刻的约束为:两编队卫星的末端协态变量取相反数。

式(12)中共有四个控制变量:推力方向 u_1, u_2 和推力幅值 F_1, F_2 。在满足约束条件 $\|u\| = 1$ 的情况下使哈密顿函数 H 极小化可得 u 的最优取值形式。

$$\begin{cases} u_1^*(t) = -\frac{\lambda_{v_1}(t)}{\|\lambda_{v_1}(t)\|} \\ u_2^*(t) = -\frac{\lambda_{v_2}(t)}{\|\lambda_{v_2}(t)\|} \end{cases} \quad (20)$$

由式(20)可知,最优的推力方向与 $-\lambda_v$ 的方向相同, Lawden^[15] 将其称为主矢量 $p(t)$, 其模值表示为 $p(t)$ 。将式及主矢量带入式,系统哈密顿函数变为

$$H = (1 - p_1) F_1 + \lambda_{r_1}^T v_1 - p_1^T (E_1 r_1 + E_2 v_1) + (1 - p_2) F_2 + \lambda_{r_2}^T v_2 - p_2^T (E_1 r_2 + E_2 v_2) \quad (21)$$

为使式(21)中的 H 达到极小值,最优推力幅值应取 bang-bang 控制形式(暂不考虑 $p = 1$ 的奇异情况):

$$F_1^* = \begin{cases} F_{\max_1} & p_1 > 1 \\ 0 & p_1 < 1 \end{cases} \quad F_2^* = \begin{cases} F_{\max_2} & p_2 > 1 \\ 0 & p_2 < 1 \end{cases} \quad (22)$$

式中, F_{\max_1}, F_{\max_2} 分别为两编队卫星的推力幅值上限值。如果最优推力 $F_1^*(t), F_2^*(t)$ 均为推力全程开启模式,此时合作交会卫星的主矢量

$$p_1(t) \geq 1, p_2(t) \geq 1 \quad (23)$$

其形成的轨迹即为最小连续推力合作交会轨迹。

至此,编队卫星最小连续推力合作交会飞行轨道设计问题已经转换为微分方程((1)、(13)、(20)和(23))的边值问题(边值约束(9)和(19)),微分方程边值问题的解即为最小连续推力最优解。

2 最小连续推力求解

上一节提出的微分方程边值问题并不容易直接求解,主要原因是协态变量没有特定的物理意义,不易给出合理的初始估计值,并且式(19)的协态变量末端约束使得协态变量初值更加难以猜测。

为了较为平滑地得到满足最小连续推力最优控制一阶必要条件的解,本节提出一种以推力幅值为延拓变量的数值延拓方法,主要分为三步:

第一步是解析求出两颗卫星分别向原点处交会的双脉冲解;

第二步是以推力幅值为延拓变量,将第一步得到的两组双脉冲解分别逐步延拓至能完成交会任务的最小推力解;

第三步是利用第二步的两组最小推力解直接优化出最小连续推力合作交会解(记该解的推力幅值分别为 $F_{\min}^{(1)}$ 和 $F_{\min}^{(2)}$)。

由于在前两步的优化计算过程中,两颗编队卫星互不耦合,可以单独求解,而且求解方法完全相同,因此2.1节和2.2节所介绍的将同时适应于两颗卫星的

双脉冲解和最小推力解的求解。

2.1 双脉冲解

双脉冲解是指在初始时刻 t_0 和末端时刻 t_f 分别施加一次脉冲所形成的交会轨迹。结合式(4)和(10)可求出两次速度脉冲为

$$\begin{cases} \Delta \boldsymbol{v}_1 = -\boldsymbol{B}_T^{-1} \boldsymbol{A}_T \boldsymbol{r}(t_0) - \boldsymbol{v}(t_0) \\ \Delta \boldsymbol{v}_2 = -\boldsymbol{C}_T \boldsymbol{r}(t_0) + \boldsymbol{D}_T \boldsymbol{B}_T^{-1} \boldsymbol{A}_T \boldsymbol{r}(t_0) \end{cases} \quad (24)$$

式中, $\boldsymbol{A}_T, \boldsymbol{B}_T, \boldsymbol{C}_T, \boldsymbol{D}_T$ 分别表示 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}$ 在 T 时刻的值。

根据式(20)中的最优推力方向取值形式,在双脉冲解中,将速度脉冲方向(推力方向)设定为主矢量方向,可以得到初始时刻速度矢量对应的协态变量:

$$\boldsymbol{\lambda}_v(t_0) = -\frac{\Delta \boldsymbol{v}_1}{\|\Delta \boldsymbol{v}_1\|} \quad (25)$$

与末端时刻速度矢量对应的协态变量:

$$\boldsymbol{\lambda}_v(t_f) = -\frac{\Delta \boldsymbol{v}_2}{\|\Delta \boldsymbol{v}_2\|} \quad (26)$$

将式(25)、(26)带回式(14),即可得到初始时刻位置矢量对应的协态变量:

$$\boldsymbol{\lambda}_r(t_0) = \boldsymbol{H}_T^{-1} [\boldsymbol{\lambda}_v(t_f) - \boldsymbol{I}_T \boldsymbol{\lambda}_v(t_0)] \quad (27)$$

与末端时刻位置矢量对应的协态变量

$$\boldsymbol{\lambda}_r(t_f) = \boldsymbol{F}_T \boldsymbol{H}_T^{-1} \boldsymbol{\lambda}_v(t_f) + (\boldsymbol{G}_T - \boldsymbol{F}_T \boldsymbol{H}_T^{-1} \boldsymbol{I}_T) \boldsymbol{\lambda}_v(t_0) \quad (28)$$

将式(25)与(27)带回式(14),即可得到双脉冲解的任意时刻协态变量。双脉冲解的主要作用是赋予协态变量一组解析的初值,避免了随机猜测。

2.2 最小推力解

为实现从双脉冲解至最小推力解的延拓,首先分析以下子问题:利用有限推力替代脉冲推力,与双脉冲解的两次脉冲相对应,设定推力开关序列为“开-关-开”,始末两段推进时间分别为 Δt_1 和 Δt_2 ,确定最优推力大小与方向,使得式(11)中的总速度脉冲最小化。

该子问题中,最优控制问题的推导过程与1.2节类似,可依次得到式(20)和(22)。给定推力幅值,由于推力开关序列被强制为“开-关-开”,为使哈密顿函数达到极小值,必要条件式(22)蜕变为:

$$\begin{cases} p^*(t) > 1, & \text{开关为“开”} \\ p^*(t) = \text{任意值}, & \text{开关为“关”} \end{cases} \quad (29)$$

事实上,由式(20)可知,最优推力方向只与主矢量的方向有关,与主矢量模值无关。协态变量按比例增大或减小(见后文式(31)、(32)与图1的描述)不影响式(20),也不影响协态变量方程(13)。对于任意“开-关-开”推力序列满足约束条件(10)的可行解,通过对主矢量的处理总能满足必要条件式(29)(如后文中图1所示),必要条件式(29)对得到最优解并无实

际贡献。这里,采用直接/间接混合法^[16]的思想,即利用协态变量方程与式(20),通过对性能指标直接优化从而不再寻求对部分必要条件与充分条件的满足,在数值优化意义上获得“开-关-开”推力序列的燃料最优解。

上述子问题的求解可以转化为如表1所示的非线性规划问题(记为NLP1)的求解,其中约束条件中等式左边的 $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{\lambda}_r, \boldsymbol{\lambda}_v$ 由初始时刻的状态和协态变量经推进段1和自由滑行段正向计算得到;等式右边的 $\boldsymbol{r}', \boldsymbol{v}', \boldsymbol{\lambda}_r', \boldsymbol{\lambda}_v'$ 由末端时刻的状态和协态变量经推进段2逆向计算得到。

这是一个标准的包含等式与不等式约束的非线性规划问题,该研究采用MATLAB软件中的fmincon函数进行求解,性能指标及约束条件对于优化参数的梯度均由数值微分计算得到,无需推导解析式。后文所列出的非线性规划问题采用同样方法求解。

表1 子问题非线性规划模型(NLP1)

构成要素	要素表达式
优化参数	$\boldsymbol{\lambda}_r(t_0), \boldsymbol{\lambda}_v(t_0), \boldsymbol{\lambda}_r(t_f), \boldsymbol{\lambda}_v(t_f), \Delta t_1, \Delta t_2$
性能指标	$\min(\Delta t_1 + \Delta t_2)$
约束条件	$\begin{cases} \boldsymbol{r}(t_f - \Delta t_2) = \boldsymbol{r}'(t_f - \Delta t_2) \\ \boldsymbol{v}(t_f - \Delta t_2) = \boldsymbol{v}'(t_f - \Delta t_2) \\ \boldsymbol{\lambda}_r(t_f - \Delta t_2) = \boldsymbol{\lambda}_r'(t_f - \Delta t_2) \\ \boldsymbol{\lambda}_v(t_f - \Delta t_2) = \boldsymbol{\lambda}_v'(t_f - \Delta t_2) \\ \Delta t_1 + \Delta t_2 \leq T \end{cases}$
协态变量方程	方程(14)
状态变量方程	推力段:方程(1);滑行段:方程(4)

如果将双脉冲解看作是推力幅值为无穷大、推进时间为无穷小的一个解,由于该解满足上述子问题的最优性一阶必要条件(式(20),式(29)未考虑),因此可以认为双脉冲解是上述子问题在推力幅值为无穷大时的最优解。

而当推力幅值逐步减小直至总推进时间($\Delta t_1 + \Delta t_2$)等于绕飞周期 T 时,此时对应的推力幅值 F_{\min} 即为形成绕飞轨迹的最小推力。该研究中,通过延拓推力幅值(逐步减小)将双脉冲解最终过渡至最小推力解。

随着推力幅值的减小,指标函数 $J = (\Delta t_1 + \Delta t_2)$ 逐步变大,设置小参数 $b(b > 0)$,当满足以下条件时停止求解NLP1(即停止减小推力幅值)

$$T - (\Delta t_1 + \Delta t_2) \leq bT \quad (30)$$

此时,将“开-关-开”推力序列替换为推力全程开启的形式,并建立如表2所示的非线性规划问题(记为NLP2),其中约束条件中的 $\boldsymbol{r}(t_f), \boldsymbol{v}(t_f)$ 由 $\boldsymbol{r}(t_0), \boldsymbol{v}(t_0)$ 经正向积分得到。利用已经得到的NLP1问题

的解作为初值(b 取值足够小),即可通过直接寻优得到最小推力解。需要指出的是,获得“最小推力”采用了逐步减小推力幅值的技术手段,即多次求解 NLP1,这有利于避免“最小推力”陷入局部最优。

表 2 最小推力解非线性规划模型(NLP2)

构成要素	要素表达式
优化参数	$\lambda_r(t_0), \lambda_v(t_0), F$
性能指标	$\min(F)$
约束条件	式(10)
协态变量方程	式(14)
状态变量方程	式(1)

得到最小推力 F_{\min} 后,记最小推力解的协态变量为 $\lambda(t)$, 主矢量曲线为 $p(t)$, 最小值为 p_{\min} , 如图 1(a)所示,对 $\lambda(t)$ 做如下处理:

$$\lambda'(t) = \frac{\lambda(t)}{p_{\min}} \tag{31}$$

由式(20)可知:处理后的协态变量并不影响最小推力解。相应地,主矢量曲线按比例变为

$$p'(t) = \frac{p(t)}{p_{\min}} \tag{32}$$

图 1(b)为处理后的主矢量曲线 $p'(t)$ 的示意图。此时,任意时刻的主矢量模值均不小于 1,并且其最小值(可能不止一个)等于 1。根据式(20)与(22)可知, $p'(t)$ 亦满足 $F = F_{\min}$ (推力全程开启)条件下的燃料最优解必要条件,因此最小推力解也成为 $F = F_{\min}$ 时的燃料最优解,并将为后续求解最小连续推力解提供初始估计值。

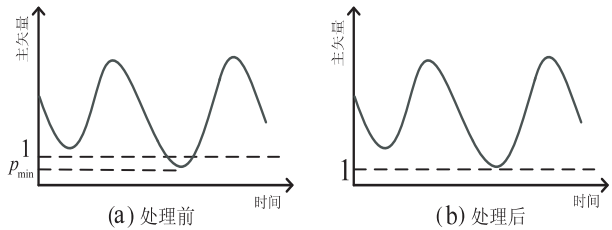


图 1 最小推力解主矢量示意图

最小连续推力合作交会解的求解可以转化为如表 3 所示的非线性规划问题(记为 NLP3)的求解。其中优化参数由上一步的两组最小推力解提供。

表 3 最小推力解非线性规划模型(NLP3)

构成要素	要素表达式
优化参数	$\lambda_{r_1}(t_0), \lambda_{v_1}(t_0), F_1, \lambda_{r_2}(t_0), \lambda_{v_2}(t_0), F_2$
性能指标	$\min(F_1 + F_2)$
约束条件	式(9)、(19)
协态变量方程	式(14)
状态变量方程	式(1)

3 算例仿真

设主星轨道为围绕地球运行的 400 km 高的圆轨道,第一颗编队卫星的初始和末端状态分别为:

$$\begin{cases} r_1(t_0) = [1 \quad 0 \quad 2]^T \\ v_1(t_0) = [0 \quad -0.002 \quad 3 \quad 0]^T \end{cases}$$

设定交会周期 $T=4\,442.9$ s,由式(24)可以得到双脉冲解为:

$$\begin{cases} \Delta v_1 = [0.481 \, 9 \quad 0.078 \, 7 \quad 0.735 \, 2]^T \\ \Delta v_2 = [-1.075 \, 2 \quad -0.078 \, 7 \quad -2.379 \, 2]^T \end{cases} \tag{34}$$

取第一个优化的推力幅值为:

$$F_0 = \|\Delta v_1\| + \|\Delta v_2\| = 3.494 \, 7 \tag{35}$$

按照 2.2 节介绍的延拓方法对推力幅值进行延拓,即多次求解 NLP1 (并取 $b = 10^{-2}$) 与一次求解 NLP2,可以得到最小推力解,其推力幅值为:

$$F_1 = 8.219 \, 0 \times 10^{-4} \tag{36}$$

第二颗编队卫星的初始和末端状态分别为:

$$\begin{cases} r_2(t_f) = [0 \quad 2 \quad 0]^T \\ v_2(t_f) = [0.001 \, 1 \quad 0 \quad 0.002 \, 3]^T \end{cases} \tag{37}$$

依照相同的求解过程,可以得出其最小推力幅值为:

$$F_2 = 8.800 \, 6 \times 10^{-4} \tag{38}$$

将以上两组最小推力解带入 NLP3,可以最终得到最小连续推力合作交会解为:

$$\begin{aligned} F_{\min}^{(1)} &= 5.179 \, 3 \times 10^{-4} \\ F_{\min}^{(2)} &= 5.179 \, 3 \times 10^{-4} \end{aligned} \tag{39}$$

图 2 给出了两编队卫星交会至原点处的轨迹以及最小连续推力合作交会轨迹,其中箭头方向表示最小连续推力方向。

从图中可以看出,两颗卫星的推力方向是时刻相反的,满足最小连续推力最优控制必要条件式(19)。

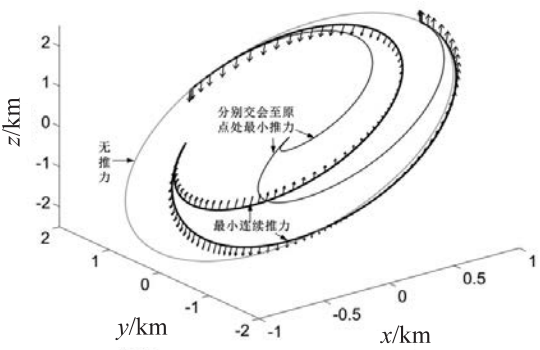


图 2 编队卫星合作交会轨迹

图 3 给出了最小连续推力解的主矢量。由于两颗卫星的协态变量为相反数,根据主矢量的定义可知,两颗卫星的主矢量曲线相同。显然,该主矢量曲线满足最小连续推力最优控制必要条件式(23)。

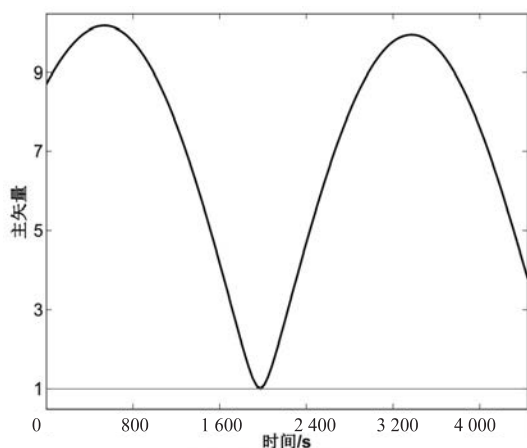


图3 最小连续推力主矢量曲线

4 结束语

文中针对编队卫星最小连续推力合作交会飞行轨迹的求解问题,首先推导了最小连续推力最优控制的一阶必要条件,然后建立了双脉冲轨道与最小推力轨道之间的延拓关系,最后通过对推力幅值的连续延拓,较为平滑地将双脉冲解延拓至最小连续推力合作交会解,同时避免了对最优控制问题中协态变量的随机猜测。

最小连续推力解是一般 bang-bang 控制最优解的极限情况,如何实现最小连续推力解向一般 bang-bang 控制最优解的稳定延拓还需要进一步的研究。

参考文献:

- [1] 朱仁璋,王鸿芳,丛云天,等. 中外交会对接技术比较研究[J]. 航天器工程,2013,22(3):8-15.
- [2] 朱仁璋,王鸿芳,徐宇杰,等. 从 ETS-VII 到 HTV—日本交会对接/停靠技术研究[J]. 航天器工程,2011,20(4):6-31.
- [3] 朱仁璋,王鸿芳,徐宇杰,等. 美国航天器交会技术研究[J]. 航天器工程,2011,20(5):11-36.
- [4] 朱仁璋,王鸿芳,肖清,等. 苏/俄交会对接技术研究[J]. 航天器工程,2011,20(6):16-31.

- [5] Coverstone-Carroll V, Prussing J E. Optimal cooperative power-limited rendezvous between coplanar circular orbits[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 1994, 17(5): 1096-1102.
- [6] Crispin Y J, Ricour M E. Cooperative rendezvous between active low thrust spacecraft[C]//Proc of AIAA guidance, navigation, and control conference. [s. l.]: [s. n.], 2007: 5232-5239.
- [7] 潘伟,路长厚,冯维明,等. 有限推力航天器双主动交会的最优控制[J]. 固体火箭技术,2009,32(4):373-378.
- [8] 潘伟,路长厚,冯维明,等. 基于混合法和多打靶法的有限推力航天器协同交会优化[J]. 固体火箭技术,2010,33(6):603-610.
- [9] Bertrand R, Epenoy R. New smoothing techniques for solving bang-bang optimal control problems - numerical results and statistical interpretation[J]. Optimal Control Applications and Methods, 2002, 23(4): 171-197.
- [10] Guo Tieding, Jiang Fanghua, Li Junfeng. Homotopic approach and pseudospectral method applied jointly to low thrust trajectory optimization[J]. Acta Astronautica, 2012, 71: 38-50.
- [11] Thevenet J B, Epenoy R. Minimum-fuel deployment for spacecraft formations via optimal control[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2008, 31(1): 101-113.
- [12] Li J, Xi X N. Fuel-optimal low-thrust reconfiguration of formation-flying satellites via homotopic approach[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2012, 35(6): 1709-1717.
- [13] Clohessy W H, Wiltshire R S. Terminal guidance system for satellite rendezvous[J]. Journal of the Aerospace Sciences, 1960, 27(9): 653-658.
- [14] 胡寿松. 自动控制原理[M]. 第5版. 北京: 科学出版社, 2007.
- [15] Lawden D F. Optimal trajectories for space navigation[M]. London: Butterworths, 1963.
- [16] Gao Y, Kluever C A. Low-thrust interplanetary orbit transfers using hybrid trajectory optimization method with multiple shooting[C]//Proc of AIAA/AAS astrodynamics specialist conference. [s. l.]: [s. n.], 2004.

编队卫星最小推力合作交会飞行轨道设计

作者:

朱小龙, 刘迎春, [ZHU Xiao-long](#), [LIU Ying-chun](#)

作者单位:

[朱小龙, ZHU Xiao-long\(中国科学院 空间应用工程与技术中心, 北京 100094; 中国科学院大学, 北京 100049\)](#), [刘迎春, LIU Ying-chun\(中国科学院 空间应用工程与技术中心, 北京, 100094\)](#)

刊名:

[计算机技术与发展](#) 

英文刊名:

[Computer Technology and Development](#)

年, 卷(期):

2015(3)

引用本文格式: [朱小龙](#). [刘迎春](#). [ZHU Xiao-long](#). [LIU Ying-chun](#) [编队卫星最小推力合作交会飞行轨道设计](#)[期刊论文]-[计算机技术与发展](#) 2015(3)