

求解分裂可行问题的改进投影算法

张九玲, 罗 俊, 王前芬

(南京邮电大学 理学院, 江苏 南京 210023)

摘 要: 分裂可行问题是一类有着广泛应用的最优化问题。文中由变分不等式改进的修正外梯度方法得到启发, 对求解分裂可行性问题的修正松弛 CQ 算法进行改进, 即对该算法的步长提出了一种新的取法, 从而减少了算法迭代步骤, 提高了算法运行效率, 比常规的算法效率提高了 17%。此外, 证明了算法的全局收敛性。数值实验结果表明, 文中改进的投影算法具有较快的收敛速度和良好的可行性, 特别地, 当维数较大的时候, 其优越性更明显。

关键词: 分裂可行问题; 步长; CQ 算法; 变分不等式

中图分类号: TP301.6

文献标识码: A

文章编号: 1673-629X(2015)03-0114-04

doi: 10.3969/j.issn.1673-629X.2015.03.026

Improved Projection Methods for Solving Split Feasibility Problem

ZHANG Jiu-ling, LUO Jun, WANG Qian-fen

(School of Science, Nanjing University of Posts & Telecommunications,
Nanjing 210023, China)

Abstract: Split feasibility problem is a optimization problem with wide range of applications. In this paper, based on the inspiration of the improved modified extra-gradient method to solve some variational inequalities, improve the modified relaxed CQ algorithm for the split feasibility problem, which proposes a new strategy for computing step size. The new algorithm reduces the iterative steps and improves operation efficiency. The efficiency of the algorithm is increased by 17%. In addition, prove the global convergence of the method. And meanwhile the same numerical results show that the algorithm has a faster convergence speed and can be applied easily. In particular, when the dimension is large, its superiority is more obvious.

Key words: split-feasibility problem; step size; CQ algorithm; variational inequalities

0 引 言

设 C, Q 分别是 R^n 和 R^m 中的非空闭凸子集, A 是 $R^{m \times n}$ 的实矩阵, 分裂可行问题 (SFP)^[1] 就是要找这样的元素 x (如果这样的 x 是存在的), $x \in C$ 使得 $Ax \in Q$ 。

分裂可行问题产生于工程实际问题^[1], 在图像重建^[2]与信号处理^[3]等领域有广泛的应用。为了解决这个问题, Byrne 提出了 CQ 算法^[4], Yang 接着提出了一种松弛 CQ 算法^[5]。后来 Qu Biao 和 Xiu Naihua^[6]利用 Armijo-like 搜索来获取步长, 对松弛 CQ 算法作了修正, 修正后的算法不要求矩阵的范数, 克服了以往算法需要计算矩阵特征值等的缺点。并在此基础上对算法做了进一步改进, 提出了修正松弛 CQ 算法。同时何炳生^[7]在解决变分不等式问题时, 提出了修正外

梯度方法, 并对该方法的步长做了改进, 即对步长给了一种新的取法, 从而达到了减少函数值计算次数的目的。文中将文献[7]中对步长改进的方法用于修正松弛 CQ 算法, 从而提高了该算法的运行效率。

1 预备知识

定义 1^[8]: 给定的 $\Omega \subset R^n$ 为一非空闭凸集, 且 $v \in R^n$, 以下问题

$$\min \{ \|u - v\| \mid u \in \Omega \}$$

的解称为 v 到 Ω 的投影, 记作 $P_\Omega(v)$ 。也可以写成 $P_\Omega(v) = \operatorname{argmin} \{ \|u - v\| \mid u \in \Omega \}$ 。

对于单集合分裂可行问题, 做出如下假设:

(H1) SFP 的解集非空;

(H2) 非空闭凸集 $C = \{x \in R^N \mid c(x) \leq 0\}$, 其中

$c:R^N \rightarrow R$ 是凸函数。非空闭凸集 $Q = \{y \in R^N \mid q(y) \leq 0\}$, 其中 $q:R^M \rightarrow R$ 是凸函数;

(H3) 对 $\forall x \in R^N, y \in R^M$, 至少存在一个 $\xi \in \partial c(x), \eta \in \partial q(y)$, 其中

$$\partial c(x) = \{\xi \in R^N \mid c(z) \geq c(x) + \langle \xi, z - x \rangle, \forall z \in R^N\}$$

$$\partial q(y) = \{\eta \in R^M \mid q(u) \geq q(y) + \langle \eta, u - y \rangle, \forall u \in R^M\}$$

2 算法及其收敛性

2.1 修正松弛 CQ 算法

接下来给出的是 Qu 和 Xiu^[6] 所提出的修正松弛 CQ 算法。

算法 1^[5]: 给定常数 $\gamma > 0, l \in (0, 1), \mu \in (0, 1)$, $k = 0, 1, \dots$, 对任意 $x_0 \in R^n$, 则

$$x^{k+1} = P_{C_k}(x^k - \beta_k F_k(\bar{x}^k))$$

其中, $\bar{x}^k = P_{C_k}(x^k - \beta_k F_k(x^k)); F_k(x) = A^T(I - P_{Q_k})Ax; \beta_k = \gamma l^{m_k}, m_k$ 是使得下式成立的最小非负整数

$$\|F_k(x^k) - F_k(\bar{x}^k)\| \leq \mu \frac{\|x^k - \bar{x}^k\|}{\beta_k}$$

其中, $C_k = \{x \in R^N \mid c(x^k) + \langle \xi^k, x - x^k \rangle \leq 0\}$, $\xi^k \in \partial c(x^k); Q_k = \{y \in R^M \mid q(Ax^k) + \langle \eta^k, y - Ax^k \rangle \leq 0\}, \eta^k \in \partial q(Ax^k)$ 。

2.2 改进的修正松弛 CQ 算法及其收敛性

考虑所给出算法的思想, 并结合变分不等式和分裂可行性问题等价关系^[8]这一性质, 考虑是否可以通过对步长作进一步改进, 即给定一个新的取法, 得到算法如下:

算法 2: 给定常数 $\gamma > 0, l \in (0, 1), \mu \in (0, 1)$, $\eta \in (0, 2)$, $k = 0, 1, \dots$, 对任意 $x_0 \in R^n$, 则

$$x^{k+1} = P_{C_k}(x^k - \alpha_k \beta_k F_k(\bar{x}^k))$$

其中, $\beta_k = \gamma l^{m_k}, m_k$ 是使得下式成立的最小非负整数。

$$\|F_k(x^k) - F_k(\bar{x}^k)\| \leq \mu \frac{\|x^k - \bar{x}^k\|}{\beta_k} \quad (1)$$

其中, $\alpha_k = \eta \alpha_k^*, \alpha_k^* = \frac{e_k(x^k, \beta_k)^T d_k(x^k, \beta_k)}{\|d_k(x^k, \beta_k)\|^2}$, $e_k(x^k, \beta_k) = x^k - P_{C_k}(x^k - \beta_k F_k(x^k)) = x^k - \bar{x}^k, d_k(x^k, \beta_k) = x^k - \bar{x}^k - \beta_k(F_k(x^k) - F_k(\bar{x}^k))$ 。

引理 1^[6,9]: F_k 在 R^N 上 Lipschitz 连续, 且 F_k 在 R^N 上强单调, 其系数为 $1/L$, 其中 L 是 $A^T A$ 的最大特征值, $k = 0, 1, 2, \dots$ 。

引理 2^[5,10]: 假设 $h:R^n \rightarrow R^n$ 是一个凸函数, 那么它是处处次可微的, 且它的次微分在 R^n 的任何有界子集上是一致有界的。

引理 3: $\alpha_k \leq \frac{2}{(1-\mu)^2}$, 其中 $k = 0, 1, 2, \dots$ 。

证明: 由引理 1 知, F_k 是单调的, 且是 Lipschitz 连续的, $\beta_k > 0$ 。则

$$e_k(x^k, \beta_k)^T d_k(x^k, \beta_k) = \|x^k - \bar{x}^k\|^2 -$$

$$(x^k - \bar{x}^k)^T [\beta_k F_k(x^k) - \beta_k F_k(\bar{x}^k)] \leq \|x^k - \bar{x}^k\|^2$$

又根据式 (1) 易知, $d_k(x^k, \beta_k) = x^k - \bar{x}^k - \beta_k(F_k(x^k) - F_k(\bar{x}^k)) \geq (1-\mu)\|x^k - \bar{x}^k\|$, 且 $\alpha_k = \eta \alpha_k^*, \eta \in (0, 2)$ 。

那么, $\alpha_k = \eta \alpha_k^* = \eta \frac{e_k(x^k, \beta_k)^T d_k(x^k, \beta_k)}{\|d_k(x^k, \beta_k)\|^2} < \frac{2}{(1-\mu)^2}$ 。

引理 4^[7]: 给定 $x^k, x^* \in C_k$, 且 $\beta_k > 0$, 那么对于任意 $\alpha > 0$, 有

$$\Theta_k(\alpha) \geq Q_k(\alpha) \geq \frac{(1-\mu)}{2} \|e_k(x^k, \beta_k)\|^2$$

其中, $\Theta_k(\alpha) = \|x^k - x^*\|^2 - \|x^{k+1}(\alpha) - x^*\|^2; Q_k(\alpha) = 2\alpha_k^* e_k(x^k, \beta_k)^T d_k(x^k, \beta_k) - \alpha_k^{*2} \|d_k(x^k, \beta_k)\|^2$ 。

引理 5^[7]: 对于所有 $x \in R^n$ 并且 $\bar{\beta}_k \geq \beta_k > 0$, 得到 $\|e_k(x_k, \bar{\beta}_k)\| \geq \|e_k(x_k, \beta_k)\|$, 且 $\frac{e_k(x_k, \bar{\beta}_k)}{\bar{\beta}_k} \leq \frac{e_k(x_k, \beta_k)}{\beta_k}$ 。

引理 6^[6,11]: $\beta_- \leq \beta_k \leq \gamma, k = 0, 1, 2, \dots, \beta_- = \min\{\gamma, \frac{\mu l}{L}\}$, 其中 L 是 $A^T A$ 的最大特征值。

引理 7^[6,12]: 设 F 是 R^n 到 R^n 的映射, 对任意 $x \in R^n, \beta > 0$, 有

$$\min\{1, \beta\} \|e(x, 1)\| \leq \|e(x, \beta)\| \leq \max\{1, \beta\} \|e(x, 1)\|$$

定理 1: 设 $\{x^k\}$ 是算法 2 生成的序列, 若 (H1) ~ (H3) 成立, 则 $\{x^k\}$ 收敛到 SFP 的一个解。

证明: 令 \hat{x} 是 SFP 的一个解。因为 $C \subseteq C_k, Q \subseteq Q_k$, 那么 $\hat{x} = P_C(\hat{x}) = P_{C_k}(\hat{x})$ 且 $A\hat{x} = P_Q(A\hat{x}) = P_{Q_k}(A\hat{x})$ 。对于所有的 $k = 0, 1, 2, \dots$, 有 $\hat{x} \in C_k$ 且 $F_k(\hat{x}) = 0$ 。

对于正序列 $\{\beta_k\}$, 由引理 6 知, 存在一个 $\beta_{\min} = \beta_-$, 那么对于所有的 k , 有 $\beta_k \geq \beta_{\min}$ 。

现在令 x 为 SFP 的一个解, 由引理 3 得到

$$\|x^{k+1} - x\|^2 \leq \|x^k - x\|^2 - c_0 \|e_k(x^k, \beta_k)\|^2 \quad (2)$$

其中, $c_0 = (1 - v)/2$, 从而知道序列 $\{x^k\}$ 是有

界的。

那么, $\sum_{k=0}^{\infty} c_0 \|e_k(x^k, \beta_k)\|^2 \leq \|x^0 - x\|^2$ 。

又由引理5得: $\lim_{k \rightarrow \infty} (x^k, \beta_{\min}) = 0$ 。则

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^k - \bar{x}^k\| = 0 \quad (3)$$

下面证明 $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^{k+1} - x^k\| = 0$ 。

$$\begin{aligned} \|x^{k+1} - x^k\| &= \|x^k - P_{C_i}[x^k - \alpha_k \beta_k F_k(\bar{x}^k)]\| = \\ &\|x^k - P_{C_i}[x^k - \alpha_k \beta_k F_k(x^k) + \alpha_k \beta_k F_k(x^k) - \\ &\alpha_k \beta_k F_k(\bar{x}^k)]\| \leq \\ &\|x^k - P_{C_i}[x^k - \alpha_k \beta_k F_k(x^k)]\| + \|P_{C_i}[x^k - \\ &\alpha_k \beta_k F_k(x^k)] - P_{C_i}[x - \alpha_k \beta_k F_k(x^k) + \\ &\alpha_k \beta_k F_k(x^k) - \alpha_k \beta_k F_k(\bar{x}^k)]\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{其中, } \|P_{C_i}[x^k - \alpha_k \beta_k F_k(x^k)] - P_{C_i}[x^k - \\ \alpha_k \beta_k F_k(x^k) + \alpha_k \beta_k F_k(x^k) - \alpha_k \beta_k F_k(\bar{x}^k)]\| \leq \\ \|x^k - \alpha_k \beta_k F_k(x^k) - x^k + \alpha_k \beta_k F_k(x^k) - \alpha_k \beta_k F_k(x^k) + \\ \alpha_k \beta_k F_k(\bar{x}^k)\| = \alpha_k \beta_k \|F_k(x^k) - F_k(\bar{x}^k)\| \leq \\ \alpha_k \mu \|x^k - \bar{x}^k\|。 \end{aligned}$$

又由引理3知 $\alpha_k < \frac{2}{(1-\mu)^2}$, 则

$$\begin{aligned} \|x^{k+1} - x^k\| &\leq \|x^k - P_{C_i}[x^k - \alpha_k \beta_k F_k(x)]\| + \\ &\frac{2\mu}{(1-\mu)^2} \|x^k - \bar{x}^k\| < \frac{1+\mu^2}{(1-\mu)^2} \|x^k - \bar{x}^k\| \end{aligned}$$

因此

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^{k+1} - x^k\| = 0 \quad (4)$$

假设 \bar{x} 是 $\{x^k\}$ 的一个聚点, 那么 $\{x^k\}$ 的一个子

序列 $\{x^{k_i}\}_{i=1}^{\infty}$ 收敛于 \bar{x} 。下面证明 \bar{x} 是 SFP 的解。

首先, 证明 $\bar{x} \in C$ 。

因为 $x^{k_i+1} \in C_{k_i}$, 然后由 C_{k_i} 的定义得

$$c(x^{k_i}) + \langle \xi^{k_i}, x^{k_i+1} - x^{k_i} \rangle \leq 0, \quad \forall i = 1, 2, \dots$$

由式(4)和引理2得: $c(\bar{x}) \leq 0$, 则 $\bar{x} \in C$ 。

接着, 证明 $A\bar{x} \in Q$ 。

由 $e_k(x^k, \beta_k) = x^k - P_{C_i}(x^k - \beta_k F_k(x^k))$, $k = 0, 1, 2, \dots$, 且根据引理3, 6, 7以及式(3), 得到:

$$\begin{aligned} \lim_{k_i \rightarrow \infty} \|e_{k_i}(x^{k_i}, 1)\| &\leq \lim_{k_i \rightarrow \infty} \frac{\|x^{k_i} - \bar{x}^{k_i}\|}{\min\{1, \beta_{k_i}\}} \leq \\ &\lim_{k_i \rightarrow \infty} \frac{\|x^{k_i} - \bar{x}^{k_i}\|}{\min\{1, \beta_{k_i}\}} = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

又 $\hat{x} \in C_{k_i}$, 对于 $i = 1, 2, \dots$ 有

$$\langle x^{k_i} - F_{k_i}(x^{k_i}) - P_{C_{k_i}}(x^{k_i} - F_{k_i}(x^{k_i})), \hat{x} - P_{C_{k_i}}(x^{k_i} - F_{k_i}(x^{k_i})) \rangle \leq 0$$

即

$$\langle e_{k_i}(x^{k_i}, 1) - F_{k_i}(x^{k_i}), x^{k_i} - \hat{x} - e_{k_i}(x^{k_i}, 1) \rangle \geq 0$$

由上述不等式得, 对于 $i = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} \langle x^{k_i} - \hat{x}, e_{k_i}(x^{k_i}, 1) \rangle &\geq \|e_{k_i}(x^{k_i}, 1)\|^2 - \langle F_{k_i}(x^{k_i}), \\ e_{k_i}(x^{k_i}, 1) \rangle + \langle F_{k_i}(x^{k_i}), x^{k_i} - \hat{x} \rangle &= \|e_{k_i}(x^{k_i}, 1)\|^2 - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\langle F_{k_i}(x^{k_i}), e_{k_i}(x^{k_i}, 1) \rangle + \langle (I - P_{Q_{k_i}})Ax^{k_i} - (I - \\ &P_{Q_{k_i}})A\hat{x}, Ax^{k_i} - A\hat{x} \rangle \geq \|e_{k_i}(x^{k_i}, 1)\|^2 - \\ &\langle F_{k_i}(x^{k_i}), e_{k_i}(x^{k_i}, 1) \rangle + \|(I - P_{Q_{k_i}})Ax^{k_i} - \\ &(I - P_{Q_{k_i}})A\hat{x}\|^2 = \|e_{k_i}(x^{k_i}, 1)\|^2 - \\ &\langle F_{k_i}(x^{k_i}), e_{k_i}(x^{k_i}, 1) \rangle + \|(I - P_{Q_{k_i}})Ax^{k_i}\|^2 \end{aligned} \quad (6)$$

又由变分不等式性质知

$$\|F_{k_i}(x^{k_i})\| = \|F_{k_i}(x^{k_i}) - F_{k_i}(\hat{x})\| \leq \lambda \|x^{k_i} - \hat{x}\|, \quad \forall i = 1, 2, \dots$$

且知 $\{x^{k_i}\}$ 是有界的, 那么 $\{F_{k_i}(x^{k_i})\}$ 也是有界的。因此, 从式(5)和(6)得到:

$$\lim_{k_i \rightarrow \infty} \|(I - P_{Q_{k_i}})Ax^{k_i}\| = 0$$

即

$$\lim_{k_i \rightarrow \infty} P_{Q_{k_i}}(Ax^{k_i}) - Ax^{k_i} = 0 \quad (7)$$

由于 $P_{Q_{k_i}}(Ax^{k_i}) \in Q_{k_i}$, 则有 $q(Ax^{k_i}) + \langle \eta^{k_i}, P_{Q_{k_i}}(Ax^{k_i}) - Ax^{k_i} \rangle \leq 0$ 。

令 $k_i \rightarrow \infty$, 根据引理2和式(7), 可以推出 $q(A\bar{x}) \leq 0$, 即 $A\bar{x} \in Q$, 则 \bar{x} 即为 SFP 的解。

又由假设可以得到, 子序列 $\{\|x^{k_i} - \bar{x}\|\}$ 收敛到0, 那么当 $k \rightarrow \infty$ 时, $x^k \rightarrow \bar{x}$ 。即对于任意 $\forall \varepsilon > 0$, 存在一个 $k_p > 0$, 其中 p 是某一常数, 有 $\|x^{k_p} - \bar{x}\| \leq \varepsilon$ 。又因为 \bar{x} 是 SFP 的解, 那么由式(2)及(3)有 $\|x^k - \bar{x}\| \leq \|x^{k_p} - \bar{x}\| \leq \varepsilon, \forall k \geq k_p$ 。因此, 序列 $\{x^k\}$ 收敛到 \bar{x} , 证毕。

3 数值实验

下面, 通过数值实验对算法1和算法2进行比较。在数值实验中, 为便于实现, 仅就如下形式问题的求解进行讨论: $x \in C$ 使得 $Ax = b, b \in Q$ 。

其中, $C = \{x \in R^n \mid \sum_{i=1}^n a_i x_i^2 \leq g\}$; $Q = \{y \in R^m \mid \sum_{j=1}^m b_j y_j \leq h\}$, 系数为 g, h ; 矩阵 $A \in R^{m \times n}$, 初始向量 x^0 是随机产生的。所有的程序都用 MatlabR2007b 编写, 其中的 CPU 时间以秒记。

首先, 对算法1和算法2进行比较, 得到在集合数量 n, m 取不同值情况下, 算法1和算法2在迭代步数 (step) 和运行时间 (T) 上的比较结果, 如表1所示。终止准则 $\|x^{k+1} - x^k\| \leq \varepsilon$, 取 $\varepsilon = 3 \times 10^{-5}, \gamma = 1, l = 0.8, \mu = 0.8, \eta = 1.9$ 。

实验结果表明, 算法2相对于算法1, 减少了迭代次数和运行时间, 加快了收敛速度, 且算法的效率提高了17%左右。通过对不同维数进行实验可以发现, 在问题规模较大的时候, 算法2的优越性更为明显。因此, 在实际应用中, 推荐使用算法2。

表1 算法1和算法2在 t, r 取不同值下的实验结果比较

(t, r)	算法1	算法2
(5, 10)	step = 2 932	step = 2 448
	$T = 1.23$	$T = 1.02$
(20, 30)	step = 2 088	step = 2 076
	$T = 1.20$	$T = 1.14$
(40, 40)	step = 984	step = 963
	$T = 0.74$	$T = 0.65$
(80, 60)	step = 2 259	step = 2 149
	$T = 2.29$	$T = 2.16$
(50, 100)	step = 2 288	step = 2 357
	$T = 2.36$	$T = 2.23$

4 结束语

为了提高解决分裂可行问题的算法效率,文中对所研究的修正松弛 CQ 算法^[13]的步长进行了进一步的改进。改进的修正松弛 CQ 算法不需要计算矩阵的逆和最大特征值。虽然在确定新步长时需要一些额外相对简单的计算,但可以达到提高算法效率的目的,同时给出了新的改进松弛 CQ 算法的收敛性证明。数值实验表明,新算法比原来的修正松弛 CQ 算法在解决实际问题中优越性更明显。

参考文献:

[1] Censor Y, Elfving T. A multi-projection algorithm using Bregman projections in a product space[J]. Number Algorithms, 1994, 8(2-4): 221-239.

(上接第 113 页)

能存在的隐含关联,利用用户资源推荐模型挖掘资源之间的隐含关系来进行资源推荐,在一定程度上提高了用户定制服务流的效率。文中算法的实现采用的是串行编程,旨在说明服务流定制用户资源推荐模型的有效性,下一步工作将集中在对算法的并行化改进,以达到缩短算法运行时间的目的。

参考文献:

[1] 许海玲,吴 潇,李晓东,等. 互联网推荐系统比较研究[J]. 软件学报,2009,20(2): 350-362.

[2] Aditya S T, Dabeer O, Dey B K. A channel coding perspective of collaborative filtering[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2011, 57(4): 2327-2341.

[3] Gong Songjie. A collaborative filtering recommendation algorithm based on user clustering and item clustering[J]. Journal of Software, 2010, 5(7): 745-752.

[4] 黄创光,印 鉴,汪 静,等. 不确定近邻的协同过滤推荐算法[J]. 计算机学报,2010,33(8): 1369-1377.

[5] 宋真真,王 浩,杨 静. 协同过滤技术在个性化推荐中的运

[2] Byrne C. A unified treatment of some iterative algorithms in signal processing and image reconstruction[J]. Inverse Problems, 2004, 20(1): 103-120.

[3] Censor Y. Parallel application of block iterative methods in medical imaging and radiation therapy[J]. Mathematical Programming, 1988, 42(1): 307-325.

[4] Byrne C. Iterative oblique projection onto convex sets and the split feasibility problem[J]. Inverse Problems, 2002, 18(2): 441-453.

[5] Yang Qingzhi. The relaxed CQ algorithm solving the split feasibility problem[J]. Inverse Problems, 2004, 20(4): 1261-1266.

[6] Qu Biao, Xiu Naihua. A note on the CQ algorithm for the split feasibility problem[J]. Inverse Problems, 2005, 21(5): 1655-1665.

[7] 何炳生. 论求解单调变分不等式的一些投影收缩算法[J]. 计算数学, 1996(1): 97-101.

[8] 王少玲. 求解多集合分裂可行性问题的新投影算法[D]. 南京: 南京邮电大学, 2012.

[9] 王新艳, 屈 彪. 求解分裂可行问题逆问题的算法推广[J]. 泰山学院学报, 2010(6): 10-14.

[10] 张忠威. 多集合分裂可行问题的算法研究[D]. 南京: 南京邮电大学, 2011.

[11] 徐成贤, 陈志平, 李乃成. 近代优化方法[M]. 北京: 科学出版社, 2002: 18-35.

[12] 李 雷, 吴从忻. 集值分析[M]. 北京: 科学出版社, 2003: 15-36.

[13] 杨庆之, 赵金玲. 分裂可行问题(SFP)的投影算法[J]. 计算数学, 2006, 28(2): 121-132.

用[J]. 合肥工业大学学报: 自然科学版, 2008, 31(7): 1059-1062.

[6] 朱 锐, 王怀民, 冯大为. 基于偏好推荐的可信服务选择[J]. 软件学报, 2011, 22(5): 852-864.

[7] 汪英姿. 基于本体的个性化图书推荐方法研究[J]. 现代图书情报技术, 2012(12): 72-78.

[8] 陆晓敏, 崇志宏, 陈国庆. 基于本体的商品推荐方法[J]. 计算机技术与发展, 2012, 22(10): 10-14.

[9] 张 磊, 陈俊亮, 孟祥武, 等. 基于 BP 神经网络的协作过滤推荐算法[J]. 北京邮电大学学报, 2009, 32(6): 42-46.

[10] 王 宁. 一种基于 BP 神经网络的即时在线推荐系统[J]. 计算机技术与发展, 2009, 19(7): 230-233.

[11] 邓爱林, 朱杨勇, 施伯乐. 基于项目评分预测的协同过滤推荐算法[J]. 软件学报, 2003, 14(9): 1621-1628.

[12] 张少中, 陈德人. 面向个性化推荐的两层混合图模型[J]. 计算机系统应用, 2009, 18(6): 26-26.

[13] Aggarwal H C, Wolf J L, Wu Kun-Lung, et al. Horting hatches an egg: a new graph - theoretic approach to collaborative filtering [C]//Proc of the KDD 1999. [s. l.]: [s. n.], 1999: 201-212.

[14] Zhou T, Jiang L L, Su R Q, et al. Effect of initial configuration on network-based recommendation[J]. EPL, 2008, 81: 58004.

求解分裂可行问题的改进投影算法

作者：[张九玲](#)，[罗俊](#)，[王前芬](#)，[ZHANG Jiu-ling](#)，[LUO Jun](#)，[WANG Qian-fen](#)

作者单位：[南京邮电大学 理学院, 江苏 南京, 210023](#)

刊名：[计算机技术与发展](#)

英文刊名：[Computer Technology and Development](#)

年，卷(期)：2015(3)

引用本文格式：[张九玲](#).[罗俊](#).[王前芬](#).[ZHANG Jiu-ling](#).[LUO Jun](#).[WANG Qian-fen](#) [求解分裂可行问题的改进投影算法](#)
[期刊论文]-[计算机技术与发展](#) 2015(3)