

压缩感知中的投影矩阵优化算法

柯家龙, 李继楼

(南京邮电大学 通信与信息工程学院, 江苏 南京 210003)

摘要: 压缩感知理论中感知矩阵的约束等距性或累积互相关性对于信号重建有着重要意义。降低感知矩阵的累积互相关性或平均互相关性, 能有效地提高信号重建表现。基于这个结论, 文中提出了一种在给定稀疏表示矩阵的条件下, 对投影矩阵进行迭代优化的方法。仿真结果表明, 文中提出的优化方法能够很大程度上降低感知矩阵的累积互相关性和平均互相关性。同时实验进一步表明, 文中提出的投影矩阵迭代优化方法明显提高了压缩感知正交匹配追踪算法的重建表现。

关键词: 压缩感知; 互相关性; 投影优化; 信号重建

中图分类号: TN91

文献标识码: A

文章编号: 1673-629X(2015)03-0095-04

doi: 10.3969/j.issn.1673-629X.2015.03.022

Algorithm of Optimization for Projection Matrix in Compressive Sensing

KE Jia-long, LI Ji-lou

(College of Communication and Information Engineering, Nanjing University of Posts and Telecommunications, Nanjing 210003, China)

Abstract: In compressive sensing theory, the restricted isometry property or cumulative mutual coherence plays an important role in signal reconstruction. Reducing the cumulative mutual coherence and the average mutual coherence of the sensing matrix can improve the reconstruction performance. Based on this conclusion, propose a novel iterative algorithm of optimization for projection matrix when the sparsity transformation matrix is deterministic. Simulation results show that the cumulative mutual coherence and the average mutual coherence of the obtained sensing matrix is reduced largely via the new algorithm. And the experiments also show that the new method proposed improves the reconstruction performance of OMP algorithm compared with optimizing before significantly.

Key words: compressive sensing; cumulative mutual coherence; projection optimization; signal reconstruction

0 引言

压缩感知理论^[1-5]作为一种革命性的采样理论, 近年来引起了国内外专家学者的广泛关注。压缩感知主要研究在远低于 Nyquist 采样率的条件下, 对稀疏或者可压缩信号进行采样重构, 其在阵列信号处理、雷达成像^[6-7]、医学成像^[8-9]、军事侦察等领域都有着巨大的应用前景。

设向量 x 是长度为 n 的信号, 即 $x \in R^{n \times 1}$, 如果 x 能够在某线性变换下, 仅用 $k(k \ll n)$ 个系数很好地表示出来, 即

$$x = \Psi\alpha$$

其中, Ψ 是稀疏变换矩阵; α 是系数向量, 最多有 k 个非零值。

根据压缩感知理论, 设计出一个不相关的 $m \times n(m < n)$ 维投影矩阵 Φ , 对信号 x 进行压缩采样得:

$$y = \Phi x = \Phi \Psi \alpha$$

其中, $y \in R^{m \times 1}$ 是采样所得测量值, 记 $A = \Phi \Psi$ 为感知矩阵。

解欠定方程组 $y = A\alpha$ 给出信号 x 的重建, 求解 α 被归结为求解最优化问题:

$$\min \|\alpha\|_0 \quad \text{s.t.} \quad A\alpha = y \quad (1)$$

可惜的是上述最优化问题是 NP 难问题。文献[10-11]提出的贪婪算法, 为解决这类优化问题提供了有力保障。

1 感知矩阵互相关性

Candes^[3,12]等人证明满足约束等距性(RIP)即:

$$(1 - \delta) \|x\|_2^2 \leq \|Ax\|_2^2 \leq (1 + \delta) \|x\|_2^2 \quad (2)$$

的感知矩阵是信号能够重建的理论保证。

然而实际中很难去验证 RIP 性质。可以预见, 投

影矩阵 Φ 应该与稀疏变换矩阵 Ψ 高度不相关,即 Φ 的行在 Ψ 基下不能有任何稀疏表示。

定义 1:感知矩阵的互相关性^[13]可以用

$$\mu(A) = \max_{1 \leq i, j \leq n, i \neq j} \frac{|a_i^T a_j|}{\|a_i\| \cdot \|a_j\|} \quad (3)$$

来表示。可以看出互相关性表示了字典最坏时的情况,并不具有代表性。针对这个问题,学者们提出了新的表示互相关性的方法。

1.1 t -平均互相关性

为了方便表示,定义格拉姆矩阵^[14] (Gram Matrix)

$G = A^T A$,其中 A 为感知矩阵 A 列归一化后的矩阵。

定义 2:对于字典 A 的 t -平均互相关性定义为

$$\mu_t\{A\} = \frac{\sum_{1 \leq i, j \leq n, i \neq j} (|g_{ij}| \geq t) \cdot |g_{ij}|}{\sum_{1 \leq i, j \leq n, i \neq j} (|g_{ij}| \geq t)} \quad (4)$$

其中, t 为 0 到 1 之间的一个阈值。当 $t=0$ 时, $\mu_t\{A\}$ 即为 G 中非主对角元素绝对值的算术平均;随着 t 增大, $\mu_t\{A\}$ 的值逐渐逼近 $\mu(A)$ 。Elad 在文献 [14] 中提出的优化投影方法就是通过迭代,逐渐减小格拉姆矩阵 G 中绝对值大于 t 的那些非主对角线元素的绝对值,来达到降低 $\mu_t\{A\}$ 的目的。其中 Elad 给出的迭代收缩算子为:

$$g_{ij} = \begin{cases} \gamma g_{ij}, & |g_{ij}| \geq t \\ \gamma t \cdot \text{sign}(g_{ij}), & \gamma t < |g_{ij}| < t \\ g_{ij}, & \gamma t > |g_{ij}| \end{cases} \quad (5)$$

其中, $\lambda \in (0, 1)$, 称为收缩因子。

1.2 k -累积互相关性

Wang 和 Kwon^[13] 等人提出,约束等距常数 (RIC)

满足 $\delta_k < \frac{1}{1 + \sqrt{k}}$, 则 OMP (正交匹配追踪) 算法能够恢复出 k -稀疏信号 x 。但由于 RIC 的计算复杂性,人们提出 k -累积互相关性来取代约束等距性判据。

定义 3: k -累积互相关性:

$$\mu_1(k) = \max_{|A|=k} \max_{i \notin A} \sum_{j \in A} | \langle a_i, a_j \rangle | \quad (6)$$

其中, a_i, a_j 为 A 列归一化后的列向量; $|A| = k$ 表示集合 A 的势为稀疏值 k 。

Tropp 和 Schnass 等人^[11,15] 指出,当 A 的累积互相关性满足 $\mu_1(k) < \frac{1}{2}$ 时,OMP 算法能够恢复出 k 稀疏信号。

2 OMP 重建算法

由于接下来的仿真实验对比中用到的 CS 重建恢复算法都是 OMP^[16] 算法,所以本节将对 OMP 算法思

想和流程做简要介绍。

OMP 算法主要分为三个步骤:识别、更新、重建。

设初始值为 $y_r = y, A = \emptyset, \hat{x} = 0$ 。对如下步骤进行最多 k 次迭代:

$$i = \arg \max_{1 \leq j \leq n} | \langle a_j, y_r \rangle | ;$$

$$A = A \cup \{i\}, y_r = y - A_i A_i^+ y ;$$

(3) 如果 $\|y_r\| > 0$, 返回步骤 (1)。

重建信号: $\hat{x} = A_i^+ y$ 。其中, A_i^+ 代表广义逆。

由第一节分析可知,降低感知矩阵的互相关性,可以提高 OMP 算法的重建表现。所以,接下来着重介绍如何优化投影矩阵,提高 OMP 重建表现。

3 投影矩阵的优化算法

文献 [17] 并不能保证信号在优化过后的变换矩阵 Ψ 下依然是 k 稀疏的。所以文中只对 Φ 进行优化,而 Ψ 保持不变。文中方法的思想主要分为两个方面:

(1) 利用收缩算子,在迭代的过程中减小格拉姆矩阵 G 的非主对角线元素的绝对值;

(2) 由新得出的格拉姆矩阵 G 和原稀疏变换矩阵 Ψ 求得更新后的投影矩阵 Φ 。

3.1 对随机投影矩阵的分析

目前压缩感知领域常用的随机投影矩阵^[18] 有高斯随机矩阵、伯努利随机矩阵、部分傅里叶变换矩阵等。文中取规格为 80×256 的高斯随机矩阵作为投影矩阵,稀疏变换矩阵选用规格为 256×256 的 DCT 框架。依此求得的格拉姆矩阵的非主对角线元素绝对值分布情况如图 1 所示。横坐标表示格拉姆矩阵非主对角线元素绝对值,纵坐标表示相应区间内元素个数。

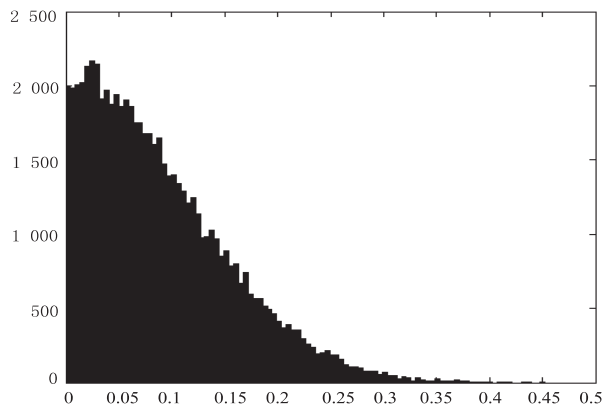


图 1 格拉姆矩阵中非主对角线元素绝对值分布直方图

由图 1 可以看出,高斯随机矩阵下的感知矩阵互相关性还是比较大的,可以通过收缩算子进一步压缩互相关性大小。

高斯随机感知矩阵的 k -累积互相关性如表 1 所示。

表1 高斯随机感知矩阵的 k -累积互相关性

稀疏水平	k 累积互相关性
2	1.42
4	2.35
6	3.02
8	3.98
10	4.37
12	5.10
14	5.83
16	6.31

由表1可知,随着稀疏度 k 值不断增加, k -累积互相关性也不停地增加,并且 k -累积互相关性远大于0.5,CS重建信号的效果不好。

3.2 投影矩阵优化算法步骤及分析

投影矩阵优化算法迭代步骤:

输入:高斯随机矩阵 Φ ;稀疏变换矩阵 Ψ ;相干度阈值 t ;收缩因子 γ ;稀疏度 k ;终止条件 ε 和 η 。

初始化: $A = \Phi\Psi$ 。

循环:第 r 次迭代。

(1)对 A 按列归一化,求格拉姆矩阵 $G = A^T A$;

(2)求 A 的 t -平均互相关性

$$\mu_t^{(r)}\{A\} = \frac{\sum_{1 \leq i, j \leq n, i \neq j} (|g_{ij}| \geq t) \cdot |g_{ij}|}{\sum_{1 \leq i, j \leq n, i \neq j} (|g_{ij}| \geq t)}$$

求 A 的 k -累积互相关性

$$\mu_1^{(r)}(k) = \max_{|A|=k} \max_{i \notin A} \sum_{j \in A} |\langle a_i, a_j \rangle|$$

(3)对 G 按收缩算子

$$g_{ij} = \begin{cases} \gamma g_{ij}, & |g_{ij}| \geq t \\ \gamma t \cdot \text{sign}(g_{ij}), & \gamma t < |g_{ij}| < t \text{ 进行更新} \\ g_{ij}, & \gamma t > |g_{ij}| \end{cases}$$

(4) $A = \min_A \|A^T A - G\|_F$

s. t. $A \in R^{m \times n}, G \in R^{n \times n}$

(5) $\Phi = \min_{\Phi} \|\Phi\Psi - A\|_F$

s. t. $\Phi \in R^{m \times n}$

(6)计算 $A = \Phi\Psi$,其中 Φ 是每次迭代得到的投影矩阵;

(7)如果 $|\mu_t^{(r)}\{A\} - \mu_t^{(r-1)}\{A\}| \leq \varepsilon$ 或者 $|\mu_1^{(r)}(k) - \mu_1^{(r-1)}(k)| \leq \eta$,迭代终止;否则置 $r = r + 1$,返回步骤(1)。

输出:投影矩阵 Φ 。

关于上述最小化 F 范数问题,设 $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ 是 $m \times n$ 的矩阵, $G = (g_1, g_2, \dots, g_n)$ 是 $n \times n$ 的方阵。记 $A^T = Q$,利用最小二乘法思想,最小化 F 范数问题转化为下面的形式^[17]:

$$\min_A \|A^T A - G\|_F = \min_A \|QA - G\|_F = \min_A \|G -$$

$$QA\|_F = \min_{a_i} \left(\sum_{i=1}^n \|g_i - Qa_i\|_2^2 \right)^{1/2} \quad (7)$$

s. t. $a_i \in R^{m \times 1}$

所以最小化 F 范数问题被拆分成 n 个独立的最小化问题:

$$\min_{a_i} \|g_i - Qa_i\|_2^2 \quad (8)$$

s. t. $a_i \in R^{m \times 1}, 1 \leq i \leq n$

式(8)问题转化为最小二乘误差问题^[19-20],感兴趣的读者可以参考文献[19-20]。

在迭代过程中计算更新后的投影矩阵 Φ 问题,即 $\Phi = \min_{\Phi} \|\Phi\Psi - A\|_F$,可以使用投影的方法来解决。

4 仿真结果

本节通过三个仿真实验,验证文中所提投影优化方法的可行性和优势。

实验一:对格拉姆矩阵进行迭代收缩,比较高斯随机投影矩阵、DC优化投影矩阵和文中优化的投影矩阵在不同稀疏度下的累积互相关性。

实验初始投影矩阵 Φ 取 80×256 的高斯随机矩阵,稀疏变换矩阵 Ψ 选择 256×256 的DCT框架。随机信号分量服从标准正态分布。

由图2可以看出,经过优化的感知矩阵的 k -累积互相关性较优化前明显减小。文中提出的方法,较Li等人的DC方法,在减小 k -累积互相关性方面更占优势。

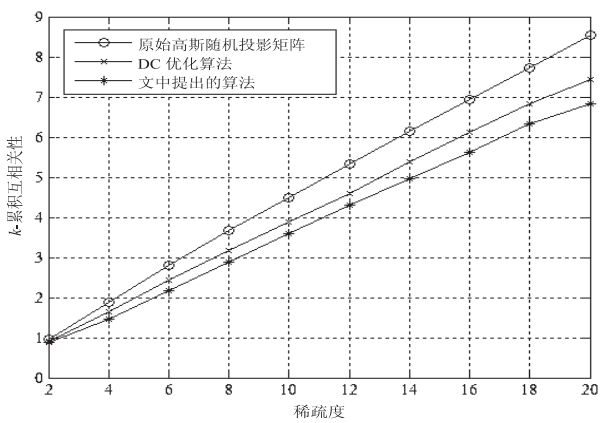


图2 不同投影矩阵下的 k -累积互相关性

实验二:比较高斯随机投影矩阵、Elad优化投影矩阵、文中优化投影矩阵,在不同观测维数情况下,OMP算法重构误差的大小(两种优化方法采用相同的压缩因子和阈值)。

实验选择的三种投影矩阵 Φ 维数从20变化到40,步长为1。信号稀疏度固定为10。稀疏变换矩阵 Ψ 依然选取 256×256 的DCT框架。重建信号误差小于 10^{-5} 时,忽略不计。实验统计500次信号重构误差,如图3所示。

实验二表明,采用优化投影方法所得的投影矩阵能大幅提高 OMP 重建算法的表现。随着观测维数的提高,优化的投影矩阵能始终改善 OMP 算法性能。相对于 Elad 提出的优化投影方法,文中提出的优化方法,在降低重建信号相对误差上性能相仿。

实验三:OMP 算法分别采用高斯随机投影矩阵、DC 投影矩阵、文中优化投影矩阵,比较在不同稀疏度水平情况下的信号精确重建概率,实验统计 500 次重建过程。

实验 Φ 取大小为 80×256 的矩阵, Ψ 选择 256×256 的 DCT 框架。

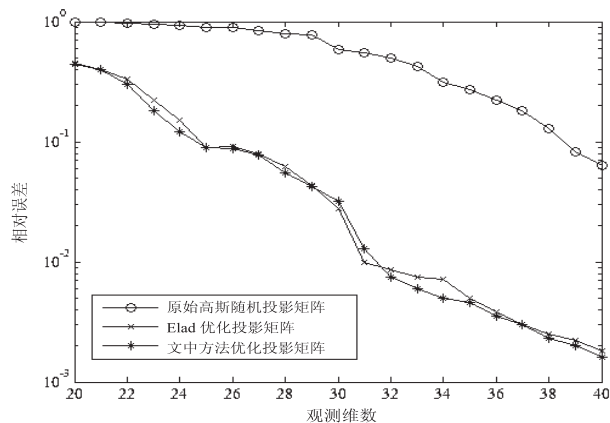


图 3 不同投影矩阵下的信号重建误差

从图 4 可以看出,采用文中提出的优化投影矩阵,可以明显提高信号精确重建概率。

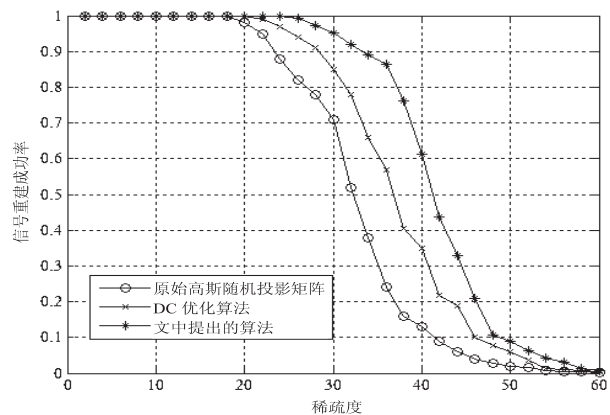


图 4 信号精确重建概率

5 结束语

文中利用式(5)的收缩算子,对格拉姆矩阵进行迭代收缩,优化投影矩阵。通过几组实验数据比较,可以看出,文中所提出的投影矩阵优化算法,能够有效地降低 t -平均互相关性和 k -累积互相关性两个指标,最终达到了提高 OMP 算法重建性能的目的。


参考文献:

[1] Donoho D L. Compressed sensing[J]. IEEE Trans on Informa-

tion Theory, 2006, 52(4): 1289-1306.

- [2] Baraniuk R G. Compressive sensing[J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2007, 24(4): 118-121.
- [3] Candes E J, Tao T. Decoding by linear programming[J]. IEEE Trans on Information Theory, 2005, 51(12): 4203-4215.
- [4] 焦李成, 杨淑媛, 刘芳, 等. 压缩感知回顾与展望[J]. 电子学报, 2011, 39(7): 1651-1662.
- [5] 戴琼海, 付长军, 季向阳. 压缩感知研究[J]. 计算机学报, 2011, 34(3): 425-434.
- [6] 朱丰, 张群, 顾福飞, 等. 基于压缩感知的 SAR 图像压缩与重构方法[J]. 现代雷达, 2012, 34(5): 46-52.
- [7] 焦李成, 谭山. 图像的多尺度几何分析: 回顾和展望[J]. 电子学报, 2003, 31(12A): 1975-1981.
- [8] 高明生, 谢海滨, 严序, 等. 选择性双向顺序压缩感知重建动态核磁共振成像[J]. 波谱学杂志, 2013, 30(2): 194-203.
- [9] 王郁雨, 杨晓梅, 胡学妹. 基于奇异值分解的压缩感知核磁共振图像重构算法[J]. 计算机应用研究, 2013, 30(4): 1247-1249.
- [10] Mallat S, Zhang Z. Matching pursuit in a time-frequency dictionary[J]. IEEE Trans on Signal Processing, 1993, 41(12): 3397-3415.
- [11] Tropp J A. Greed is good: algorithmic results for sparse approximation[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2004, 50(10): 2231-2242.
- [12] Candes E J. The restricted isometry property and its implications for compressed sensing[J]. C R Acad Sci Paris, 2008, 346(9-10): 589-592.
- [13] Wang Jian, Kown S, Shim B. Near optimal bound of orthogonal matching pursuit using restricted isometric constant[J]. Journal on Advances in Signal Processing, 2012(1): 1-8.
- [14] Elad M. Optimized projections for compressed sensing[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2007, 55(12): 5695-5702.
- [15] Schnass K, Vandergheynst P. Dictionary preconditioning for greedy algorithms[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2008, 56(5): 1994-2002.
- [16] Tropp J A, Gilbert A C. Signal recovery from random measurements via orthogonal matching pursuit[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2007, 53(12): 4655-4666.
- [17] Li Bo, Shen Yi, Li Jia. Dictionaries construction using alternating projection method in compressive sensing[J]. IEEE Signal Processing, 2011, 18(11): 663-665.
- [18] Rauhut H, Schnass K, Vandergheynst P. Compressed sensing and redundant dictionaries[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2008, 54(5): 2210-2219.
- [19] Gill P E, Murray W, Wright M H. Practical optimization[M]. London: Academic Press, 1981.
- [20] 杨卓, 郭黎利, 刘巍. 基于压缩感知和递归最小二乘的 IR_UWB 信道估计算法[J]. 系统工程与电子技术, 2012, 34(7): 1474-1478.

压缩感知中的投影矩阵优化算法

作者: [柯家龙](#), [李继楼](#), [KE Jia-long](#), [LI Ji-lou](#)
作者单位: [南京邮电大学 通信与信息工程学院, 江苏 南京, 210003](#)
刊名: [计算机技术与发展](#) 
英文刊名: [Computer Technology and Development](#)
年, 卷(期): 2015(3)

引用本文格式: [柯家龙](#), [李继楼](#), [KE Jia-long](#), [LI Ji-lou](#) [压缩感知中的投影矩阵优化算法](#)[期刊论文]-[计算机技术与发展](#) 2015(3)