第 25 卷 第 2 期
2015 年 2 月

计 算 机 技 术 与 发 展
COMPUTER TECHNOLOGY AND DEVELOPMENT

Vol. 25 No. 2
Feb. 2015

求解多集合分裂可行问题的不精确投影算法

王前芬,张九玲,罗 俊

(南京邮电大学 理学院,江苏 南京 210003)

摘 要:文中基于求解分裂可行问题的不精确投影算法,推广到求解多集合分裂可行问题。首先,用到包含给定闭凸集的半空间上的投影代替原来到闭凸集上的投影,投影更容易计算。其次,用类-Armijo 搜索获取步长代替恒定步长,并且利用得到的迭代步作为一个预测步,再进行一次校正,提出了预测校正不精确投影算法。该算法不需要计算矩阵的范数和最大特征值。文中还证明了预测校正算法的全局收敛性,最后给出了算法的数值实验结果,表明不精确投影算法是可行稳定的,且预测校正算法具有更快的收敛速度。

关键词:多集合分裂可行问题;不精确投影;全局收敛性;类-Armijo 搜索

中图分类号:TP301.6 **文献标识码**:A **文章编号**:1673-629X(2015)02-0090-03

doi:10.3969/j.issn.1673-629X.2015.02.021

Inexact Projection Methods for Solving Multiple-sets Split Feasibility Problem

WANG Qian-fen,ZHANG Jiu-ling,LUO Jun

(School of Science,Nanjing University of Posts & Telecommunications,
Nanjing 210003,China)

Abstract:Based on the inexact projection-type method for solving the split feasibility problem,present the inexact projection methods to solve the multiple-sets split feasibility problem. Firstly,each iteration of the first proposed algorithm consists of a projection onto a half-space which includes the given non-empty closed convex set. The new algorithm is easy to implement. Secondly,modification of the inexact projection method is presented with constant stepsize by adopting Armijo-like searches which does not require the computation of the matrix norm and the largest eigenvalue,and make another correction by using iteration as a predicting step. It has also proved the global convergence of the predictor-corrector algorithm,and given the numerical experiment results which show that the inexact projection algorithm is feasible and stable,the predictor-corrector algorithm has a faster convergence rate.

Key words:multiple-sets split feasibility problem;inexact projection;global convergence;Armijo-like searches

0 引 言

设 $A \in R^{m\times n}$ 是实矩阵,$C_i(i=1,2,\cdots,t)$,$Q_j(j=1,2,\cdots,r)$ 分别是 R^n,R^m 中非空闭凸子集,多集合分裂可行问题(MSSFP)[1]就是寻找元素 x^*(如果这样的 x^* 存在)

$$x^* \in C=\bigcap_{i=1}^{t} C_i \ \text{s.t.}\ \boldsymbol{A}x^* \in Q=\bigcap_{j=1}^{r} Q_j \tag{1}$$

MSSFP 源于工程实际问题[2],在信号处理[3]与图像重建[4-5]等领域中应用广泛[6-8]。Xu 将 CQ 算法[9]推广到解决 MSSFP,提出了求解 MSSFP 的算法[1]。CQ 算法假设投影容易计算,但很多实际问题中,计算精确投影需要消耗大量的时间,有时甚至无法计算。为了克服这个不足,杨庆之提出了松驰 CQ 算法[10],他用到半空间的投影代替到全空间的投影。基于以上研究成果,文中首先给出了一种求解 MSSFP 的不精确投影算法。其次,利用类-Armijo 搜索对其中的步长加以修正,并利用不精确算法得到的迭代步作为预测步,再进行一次校正,得到预测校正不精确投影算法。预测校正算法不需要计算矩阵的最大特征值,且使得目标函数在每一步迭代中充分地减小。

1 预备知识

定义[11]:对给定的 $\Omega \in R^n$,$v \in R^n$,问题:min{ ‖ u

收稿日期:2014-03-01 **修回日期**:2014-06-03 **网络出版时间**:2014-12-27

基金项目:国家自然科学基金资助项目(51107010,11202107)

作者简介:王前芬(1988-),女,硕士研究生,研究方向为数值方法与应用。

网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/61.1450.TP.20141227.1341.017.html

$-v\|\mid u\in\Omega\}$ 的解称为 v 到 Ω 的投影,记作 $P_\Omega(v)$。可以写成 $P_\Omega(v)=\operatorname{argmin}\{\|u-v\|\mid u\in\Omega\}$。

关于多集合分裂可行问题,首先作假设:

(T1) MSSFP 的解集非空;

(T2)非空闭凸集 $C_i=\{x\in R^N\mid c_i(x)\leqslant 0\}$,其中 $c_i:R^N\to R$ 是凸函数[12],非空闭凸集 $Q_j=\{y\in R^M\mid q_j(y)\leqslant 0\}$,其中 $q_j:R^M\to R$ 是凸函数;

(T3)对 $\forall x\in R^N,y\in R^M$,至少存在一个 $\xi\in\partial c_i(x),\eta\in\partial q_j(y)$,其中,$\partial c_i(x)=\{\xi\in R^N\mid c_i(z)\geqslant c_i(x)+\langle\xi,z-x\rangle,\ \forall z\in R^N\}$;$\partial q_j(y)=\{\eta\in R^M\mid q_j(u)\geqslant q_j(y)+\langle\eta,u-y\rangle,\ \forall u\in R^M\}$。

2　算法及收敛性分析

为了求解 MSSFP,对任意的 $1\leqslant j\leqslant r,\beta_j>0$,定义逼近函数:

$f(x)=\dfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{r}\beta_j\|P_{Q_j}(\boldsymbol{A}x)-\boldsymbol{A}x\|^2$,梯度 $\nabla f(x)=\sum_{j=1}^{r}\beta_j\boldsymbol{A}^{\mathrm T}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}_{Q_j})\boldsymbol{A}x$。那么寻找约束 MSSFP 的一个解,就可以转化为求解最小值问题:

$\min\{f(x)\mid x\in C\}$。

2.1　不精确投影算法

文中首先将杨庆之的算法推广到 MSSFP 得到如下算法 1。

算法 1:对任意的 $i,j,\alpha_i>0,\beta_j>0,\sum_{i=1}^{t}\alpha_i=1,0<\lambda<2/L,L=\|\boldsymbol{A}\|^2\sum_{j=1}^{r}\beta_j,k\geqslant 0$,有

$$x^{k+1}=\sum_{i=1}^{t}\alpha_i\boldsymbol{P}_{C_{i,k}}(x^k-\lambda\sum_{j=1}^{r}\beta_j\boldsymbol{A}^{\mathrm T}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}_{C_{i,k}})\boldsymbol{A}x^k)$$

其中,$C_{i,k}=\{x\in R^N\mid c_i(x^k)+\langle\xi^k,x-x^k\rangle\leqslant 0\}$,$\xi^k\in\partial c_i(x^k)$;$Q_{j,k}=\{y\in R^M\mid q_j(\boldsymbol{A}x^k)+\langle\eta^k,y-\boldsymbol{A}x^k\rangle\leqslant 0\}$,$\eta^k\in\partial q_j(\boldsymbol{A}x^k)$。

注:由次梯度定义可知,半空间 $C_{i,k}$ 和 $Q_{j,k}$ 分别包含 C_i 和 Q_j,有时,到 $C_{i,k}$ 和 $Q_{j,k}$ 上的正交投影可以直接计算(见参考文献[13])。

2.2　预测校正算法及收敛性分析

算法 1 中步长选取固定值,这将影响收敛速度。下面首先利用类-Armijo 搜索对算法 1 的步长加以修正,其次利用算法 1 得到的迭代步作为一个预测步,再进行一次校正,得到如下的预测校正算法。

算法 2:对任意的 $i,j,\alpha_i>0,\beta_j>0,\sum_{i=1}^{t}\alpha_i=1$,常数 $\gamma>0,l\in(0,1),\mu\in(0,1),k\geqslant 0$,有

$$x^{k+1}=\sum_{i=1}^{t}\alpha_i\boldsymbol{P}_{C_{i,k}}(x^k-\lambda_k\sum_{j=1}^{r}\beta_j\boldsymbol{A}^{\mathrm T}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}_{Q_{j,k}})\boldsymbol{A}\bar{x}^k)$$

其中,$\bar{x}^k=\sum_{i=1}^{t}\alpha_i\boldsymbol{P}_{C_{i,k}}(x^k-\lambda_k\nabla f_k(x^k))$,$\nabla f_k(x)=\sum_{j=1}^{r}\beta_j\boldsymbol{A}^{\mathrm T}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}_{Q_{j,k}})\boldsymbol{A}x$;$\lambda_k=\gamma l^{m_k}$,$m_k$ 是使下列不等式成立的最小非负整数

$$\|\nabla f_k(x^k)-\nabla f_k(\bar{x}^k)\|_2\leqslant\mu\frac{\|x^k-\bar{x}^k\|_2}{\lambda_k}$$

引理 1:$\nabla f_k,k=0,1,2\cdots$ 在 R^N 上 Lipschitz 连续,其 Lipschitz 常数为 $L,L=\|\boldsymbol{A}\|^2\sum_{j=1}^{r}\beta_j$,此外,$\nabla f_k$ 在 R^N 上强单调[14],其系数为 $1/L$。

引理 2:$\underline{\lambda}<\lambda_k\leqslant\gamma,k=0,1\cdots,\underline{\lambda}=\min\{\gamma,\dfrac{\mu l}{L}\}$。

定理 1:设 $\{x^k\}$ 是算法 2 生成的序列,若(T1)~(T3)成立,则 $\{x^k\}$ 收敛到 MSSFP 的一个解。

证明:设 x^* 是 MSSFP 的一个解,则 $C_i\subseteq C_{i,k},Q_j\subseteq Q_{j,k},x^*\in C_{i,k},\boldsymbol{A}x^*\in Q_{j,k},\nabla f_k(x^*)=0$。由引理 2 知 ∇f_k 单调,所以 $\langle\nabla f_k(\bar{x}^k),x^k-x^*\rangle\geqslant\langle\nabla f_k(\bar{x}^k),x^k-\bar{x}^k\rangle$,于是

$$\begin{aligned}&\|x^{k+1}-x^*\|^2=\\&\|\sum_{i=1}^{t}\alpha_i\boldsymbol{P}_{C_{i,k}}(x^k-\lambda_k\nabla f_k(\bar{x}^k))-x^*\|^2=\\&\|\sum_{i=1}^{t}\alpha_i\boldsymbol{P}_{C_{i,k}}(x^k-\lambda_k\nabla f_k(\bar{x}^k))-\sum_{i=1}^{t}\alpha_i x^*\|^2\leqslant\\&\sum_{i=1}^{t}\alpha_i(\|x^k-\lambda_k\nabla f_k(\bar{x}^k)-x^*\|^2-\\&\|\boldsymbol{P}_{C_{i,k}}(x^k-\lambda_k\nabla f_k(\bar{x}^k))-x^k+\lambda_k\nabla f_k(\bar{x}^k)\|^2)\leqslant\\&\|x^k-\lambda_k\nabla f_k(\bar{x}^k)-x^*\|^2-\\&\|\sum_{i=1}^{t}\alpha_i\boldsymbol{P}_{C_{i,k}}(x^k-\lambda_k\nabla f_k(\bar{x}^k))-\sum_{i=1}^{t}\alpha_i x^k+\\&\sum_{i=1}^{t}\alpha_i\lambda_k\nabla f_k(\bar{x}^k)\|^2\leqslant\|x^k-x^*\|^2-\\&\|\bar{x}^k-x^k\|^2-\|x^{k+1}-\bar{x}^k\|^2+2\langle x^k-\bar{x}^k-\\&\lambda_k\nabla f_k(\bar{x}^k),x^{k+1}-\bar{x}^k\rangle\end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}&2\langle x^k-\bar{x}^k-\lambda_k\nabla f_k(\bar{x}^k),x^{k+1}-\bar{x}^k\rangle\leqslant 2\langle x^k-\bar{x}^k-\\&\lambda_k\nabla f_k(\bar{x}^k),x^{k+1}-\bar{x}^k\rangle+2\langle\bar{x}^k-x^k+\lambda_k\nabla f_k(\bar{x}^k),\\&x^{k+1}-\bar{x}^k\rangle\leqslant 2\lambda_k\|\nabla f_k(x^k)-\nabla f_k(\bar{x}^k)\|\|x^{k+1}-\\&\bar{x}^k\|\leqslant\mu^2\|x^k-\bar{x}^k\|^2+\|x^{k+1}-\bar{x}^k\|^2\end{aligned}$$

于是,对一切 $k=0,1,2\cdots$

$$\begin{aligned}&\|x^{k+1}-x^*\|^2\leqslant\|x^k-x^*\|^2-\|x^k-\bar{x}^k\|^2-\\&\mu^2\|x^k-\bar{x}^k\|^2=\|x^k-x^*\|^2-(1-\\&\mu^2)\|x^k-\bar{x}^k\|^2\end{aligned}$$

这表明序列 $\{\|x^k-x^*\|^2\}$ 单调递减,且

$\{x^k\}$ 有界,因此 $\lim\limits_{k\to\infty}\|x^k-\bar{x}^k\|=0$。

另一方面,

$\|x^{k+1}-x^k\|\leqslant\|x^{k+1}-\bar{x}^k\|+\|x^k-\bar{x}^k\|\leqslant$

$\|x^k-\lambda_k\nabla f_k(\bar{x}^k)-x^k+\lambda_k\nabla f_k(x^k)\|+\|x^k-$

$\bar{x}^k\|=\lambda_k\|\nabla f_k(\bar{x}^k)-\nabla f_k(x^k)\|+\|x^k-\bar{x}^k\|\leqslant$

$(\mu+1)\|x^k-\bar{x}^k\|$

因此, $\lim\limits_{k\to\infty}\|x^{k+1}-x^k\|=0$。

设 $\tilde{x}$ 是 $\{x^k\}$ 的一聚点且 $x^{k_p}\to\tilde{x}$, $\{x^{k_p}\}_{p=1}^{\infty}$ 是 $\{x^k\}$ 的一子序列。接下来证 $\tilde{x}$ 是 MSSFP 的一个解。定义 $e_k(x,\lambda)=x-\sum\limits_{i=1}^{t}\alpha_i\boldsymbol{P}_{C_{i,k}}(x-\lambda\nabla f_k(x)),k=0,1,2,\cdots$ 则 $e_{k_p}(x^{k_p},\lambda_{k_p})=x^{k_p}-\bar{x}^{k_p}$。

根据引理 2 和参考文献[15]中引理 2.2 得到:

$$\lim_{k_p\to\infty}\|e_{k_p}(x^{k_p},1)\|\leqslant\lim_{k_p\to\infty}\frac{\|x^{k_p}-\bar{x}^{k_p}\|}{\min\{1,\lambda_{k_p}\}}\leqslant$$

$$\lim_{k_p\to\infty}\frac{\|x^{k_p}-\bar{x}^{k_p}\|}{\min\{1,\underline{\lambda}\}}=0$$

其中, $\underline{\lambda}=\dfrac{\mu l}{L}$

$\langle x^{k_p}-x^*,e_{k_p}(x^{k_p},1)\rangle\geqslant\|e_{k_p}(x^{k_p},1)\|^2-$
$\langle\nabla f_{k_p}(x^{k_p}),e_{k_p}(x^{k_p},1)\rangle+\langle\nabla f_{k_p}(x^{k_p})-$
$\nabla f_{k_p}(x^*),x^{k_p}-x^*\rangle=\|e_{k_p}(x^{k_p},1)\|^2-$
$\langle\nabla f_{k_p}(x^{k_p}),e_{k_p}(x^{k_p},1)\rangle+\sum\limits_{j=1}^{r}\beta_j\langle(\boldsymbol{I}-$
$\boldsymbol{P}_{Q_{j,k_p}})\boldsymbol{A}x^{k_p}-(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}_{Q_{j,k_p}})\boldsymbol{A}x^*,\boldsymbol{A}x^{k_p}-\boldsymbol{A}x^*\rangle\geqslant$
$\|e_{k_p}(x^{k_p},1)\|^2-\langle\nabla f_{k_p}(x^{k_p}),e_{k_p}(x^{k_p},1)\rangle+$
$\sum\limits_{j=1}^{r}\beta_j\|\boldsymbol{A}x^{k_p}-\boldsymbol{P}_{Q_{j,k_p}}(\boldsymbol{A}x^{k_p})\|^2$

由于 $\|\nabla f_{k_p}(x^{k_p})-\nabla f_{k_p}(x^*)\|\leqslant L\|x^{k_p}-x^*\|$,且 $\{x^{k_p}\}_{i=1}^{\infty}$ 有界,知 $\{\nabla f_{k_p}(x^{k_p})\}$ 有界。

因此,

$\lim\limits_{k_p\to\infty}\|x^{k_p}-\boldsymbol{P}_{C_{i,k_p}}(x^{k_p})\|=0,\lim\limits_{k_p\to\infty}\|\boldsymbol{A}x^{k_p}-$
$\boldsymbol{P}_{Q_{j,k_p}}(x^{k_p})\|=0$

所以

$c_i(x^{k_p})+\langle\xi_i^{k_p},\boldsymbol{P}_{C_{i,k_p}}(x^{k_p})-x^{k_p}\rangle\leqslant0,\ q_j(\boldsymbol{A}x^{k_p})+$
$\langle\boldsymbol{\eta}_j^{k_p},\boldsymbol{P}_{Q_{j,k_p}}(\boldsymbol{A}x^{k_p})-\boldsymbol{A}x^{k_p}\rangle\leqslant0$

于是 $c_i(\tilde{x})\leqslant0,q_j(\boldsymbol{A}\tilde{x})\leqslant0$,这表明 $\tilde{x}\in C=\bigcap\limits_{i=1}^{t}C_i$, $\boldsymbol{A}\tilde{x}\in Q=\bigcap\limits_{j=1}^{r}Q_j$。

因此, $\tilde{x}$ 是 MSSFP 的一个解。用 $\tilde{x}$ 代替 $\widetilde{x^*}$ 得到序列 $\{\|x^k-\tilde{x}\|\}$ 收敛。进一步由于 $\{x^k\}$ 的子序列 $\{x^{k_i}\}$ 收敛到 $\tilde{x}$,得到 $x^k\to\tilde{x}(k\to\infty)$。

证毕。

3 数值实验

这部分,通过数值仿真对算法 1 和算法 2 进行比较与验证。在数值仿真中,为了便于实现,仅就如下形式问题的求解进行讨论:

$x\in C=\bigcap\limits_{i=1}^{t}C_i$ 使得 $\boldsymbol{A}x=b,b\in Q=\bigcap\limits_{j=1}^{r}Q_j$

其中,

$C_i=\left\{x\in R^n\mid\sum\limits_{j=1}^{r}a_{ij}^{\mathrm{T}}x_j^2\leqslant g_i(i\leqslant1,2,\cdots,t)\right\}$;

$Q_j=\left\{y\in R^m\mid\sum\limits_{i=1}^{t}b_{ji}^{\mathrm{T}}y_i^2\leqslant h_j(j\leqslant1,2,\cdots,r)\right\}$,系数为 a_{ij},b_{ji},g_i,h_j;矩阵 $\boldsymbol{A}\in R^{m\times n}$;初始向量 $\boldsymbol{x}^0$ 是随机产生的。程序代码用 Matlab7.8 编写和执行,CPU 时间以秒记。表 1 给出了集合数量 t、r 取不同值情况下算法 1 和算法 2 在迭代步数(step)和运行时间(T)上的比较结果。终止准则为 $\|x^{k+1}-x^k\|\leqslant\varepsilon$,取 $\varepsilon=5\times10^{-5},\gamma=1,l=0.8,\mu=0.8$。在算法 1 的数值算例中,取 $\lambda=0.5/L$。

表 1 算法 1 和算法 2 在 t、r 取不同值下的实验结果比较

(t,r)	算法 1	算法 2
(8,10)	step=2 710 T=0.577	step=1 436 T=0.527
(40,40)	step=3 314 T=4.094	step=1 231 T=2.936
(50,100)	step=3 642 T=17.474	step=1 412 T=13.131
(80,60)	step=5 286 T=17.537	step=1 276 T=8.433
(100,100)	step=5 313 T=43.526	step=1 010 T=16.564

实验结果表明,算法 1 和算法 2 都是可行稳定的。对于同一问题,算法 2 相对于算法 1,减少了迭代次数和运行时间,加快了收敛速度。通过对不同维数进行实验可以发现,在问题规模较大的时候,算法 2 的优越性更为明显。因此,文中着重叙述算法 2,在实际应用中,推荐使用算法 2。

4 结束语

常见的求解 MSSFP 的投影算法存在很多的局限性,例如:投影计算困难,矩阵逆和最大特征值的计算需要花费大量的时间等。文中首先给出了求解 MSSFP 的不精确投影算法,算法更易于执行。在给出的不精确投影算法的基础上,还提出了一种预测校正算法。

(下转第 98 页)

scheduling under physical interference model[C]//Proceedings of IEEE INFOCOM. Shanghai:IEEE,2011:838-845.

[2] Cardieri P. Modeling interference in wireless ad hoc networks [J]. Communications Surveys & Tutorials,2010,12(4):551-572.

[3] Goussevskaia O,Oswald Y A,Wattenhofer R. Complexity in geometric SINR[C]//Proceedings of the 8th ACM international symposium on mobile ad hoc networking and computing. Montreal:ACM,2007:100-109.

[4] 路 纲,周明天,牛新征,等. 无线网络邻近图综述[J]. 软件学报,2008,19(4):888-911.

[5] Andrews M,Dinitz M. Maximizing capacity in arbitrary wireless networks in the SINR model:complexity and game theory [C]//Proceedings of IEEE INFOCOM. Rio de Janeiro:IEEE, 2009:1332-1340.

[6] Goussevskaia O,Wattenhofer R,Halldórsson M,et al. Capacity of arbitrary wireless networks[C]//Proceedings of IEEE INFOCOM. Rio de Janeiro:IEEE,2009:1872-1880.

[7] 申鹏飞,章 韵. 基于调度的无线传感器网络 MAC 协议研究[J]. 计算机技术与发展,2013,23(1):119-122.

[8] Wan Pengjun,Jia Xiaohua,Yao F. Maximum independent set of links under physical interference model[C]//Proceedings of WASA 2009. Boston:Springer,2009:169-178.

[9] 吕玉华,禹继国,王晨曦. WSN 最短链路调度问题的常数近似算法[J]. 计算机工程,2013,39(7):110-114.

[10] Kesselheim T. A constant-factor approximation for wireless capacity maximization with power control in the SINR model [C]//Proceedings of SODA 2011. [s. l.]:[s. n.],2011:1549-1559.

[11] 吕绍和,王晓东,周兴铭. 相继干扰消除的无线网络中的调度算法[J]. 软件学报,2012,23(4):941-951.

[12] Yang Dejun,Fang Xi,Xue Guoliang,et al. Simple and effective scheduling in wireless networks under the physical interference model[C]//Proceedings of global telecommunications conference. [s. l.]:[s. n.],2010:1-5.

[13] Xu Xiaohua,Tang Shaojie. A constant approximation algorithm for link scheduling in arbitrary networks under physical interference model[C]//Proceedings of the 2nd ACM international workshop on foundations of wireless ad hoc and sensor networking and computing. [s. l.]:[s. n.],2009:13-20.

[14] 蹇 强,桂春梅,龚正虎,等. 一种无线传感器网络链路调度模型与算法[J]. 计算机工程,2009,35(7):1-4.

[15] Xu Xiaohua,Tang Shaojie,Wan Pengjun. Maximum weighted independent set of links under physical interference model [C]//Proceedings of WASA 2010. [s. l.]:[s. n.],2010:68-74.

[16] Wang Lixin,Abubucker C P,Lawless W F,et al. A constant-approximation for maximum weight independent set of links under the SINR model[C]//Proceedings of MSN 2011. [s. l.]:[s. n.],2011:9-14.

[17] 吴乐意,马阳杨. 无线 ad hoc 网络中基于最坏干扰的最大网络容量研究[J]. 电子技术(上海),2012,39(8):96-98.

[18] Lam N X,An M K,Huynh D T,et al. Scheduling problems in interference-aware wireless sensor networks[C]//Proceedings of ICNC 2013. [s. l.]:[s. n.],2013:783-789.

(上接第 92 页)

预测校正算法不需要计算矩阵的逆和最大特征值,且目标函数在每一步迭代过程中充分地减小。给出了预测校正算法的收敛性分析。最后,文中给出了数值实验结果,表明新算法是可行稳定的。

参考文献:

[1] Xu Hongkun. A variable Krasnosel'ski-Mann algorithm and the multiple-set split feasibility problem[J]. Inverse Problems,2006,22:2021-2034.

[2] Censor Y,Elfving T. A multi-projection algorithm using Bregman projections in a product space[J]. Number Algorithms, 1994,8(2):221-239.

[3] Byrne C. A unified treatment of some iterative algorithms in signal processing and image reconstruction[J]. Inverse Problems,2004,20:103-120.

[4] Censor Y. Parallel application of block iterative methods in medical imaging and radiation therapy[J]. Mathematical Programming,1988,42(1):307-325.

[5] 李振坤. 求解多集合分裂可行性问题的新投影算法[D]. 南京:南京邮电大学,2013.

[6] 解可新,韩 健,林友联. 最优化方法[M]. 天津:天津大学出版社,1997.

[7] 丁昊鑫. 两类求解分裂可行问题的强收敛迭代算法及松弛算法[D]. 天津:南开大学,2011.

[8] 王新艳,屈 彪. 求解分裂可行问题逆问题的算法推广[J]. 泰山学院学报,2010,32(6):10-14.

[9] Byrne C. Iterative oblique projection onto convex sets and the split feasibility problem[J]. Inverse Problems,2002,18:441-453.

[10] Yang Qingzhi. The relaxed CQ algorithm solving the split feasibility problem[J]. Inverse Problems,2004,20:1261-1266.

[11] 何炳生. 论求解单调变分不等式的一些投影收缩算法[J]. 计算数学,1996(1):55-60.

[12] 徐成贤,陈志平,李乃成. 近代优化方法[M]. 北京:科学出版社,2002.

[13] Fukushima M. A relaxed projection method for variational inequalities[J]. Mathematical Programming,1986,35:58-70.

[14] 李 雷,吴从炘. 集值分析[M]. 北京:科学出版社,2003:15-36.

[15] Qu Biao,Xiu Naihua. A note on the CQ algorithm for the split feasibility problem[J]. Inverse Problems,2005,21(5):1655-1665.