

基于离散小波变换的信号分解与重构

邵婷婷,白宗文,周美丽

(延安大学 物理与电子信息学院,陕西 延安 716000)

摘要:为数值计算简化和理论分析简便,在实际信号处理应用中,需要对小波变换进行离散化处理。介绍了傅里叶变换与小波变换的基本理论,以及离散小波变换在信号分解和重构过程中的原理及方法。利用 MATLAB 小波工具箱中提供的函数分别对一维信号和语音信号进行分解与完全重构,并对结果进行分析比较。仿真结果表明,用离散小波变换进行一维和语音信号分解时均可有效地获取其平均相似信息和细节信息,重构信号与原始信号相比损失较少,分解和重构均得到了很好的效果。

关键词:离散小波变换;MATLAB;分解;重构

中图分类号:TP391

文献标识码:A

文章编号:1673-629X(2014)11-0159-03

doi:10.3969/j.issn.1673-629X.2014.11.040

Decomposition and Reconstruction of Signal Based on DWT

SHAO Ting-ting, BAI Zong-wen, ZHOU Mei-li

(College of Physical and Electronic Information, Yan'an University, Yan'an 716000, China)

Abstract: To simplify numerical calculation and theoretical analysis, wavelet transform needs to be discrete in practical application. The basic theory of Fourier transform and wavelet transform, the principle and method of signal decomposition and reconstruction based on Discrete Wavelet Transform (DWT) is introduced. Using the functions of MATLAB wavelet toolbox, the one-dimensional signal and speech signal are decomposed and perfectly reconstructed, and the analysis comparison is also made. The simulation results show that using DWT can gain good results, when to decompose, the average similarity and detail information can be acquired effectively, and the reconstructed signal loses little compared with the original signal.

Key words: Discrete Wavelet Transform (DWT); MATLAB; decomposition; reconstruction

0 引言

小波变换是继傅里叶变换后一种新的变换分析方法,经变换可以充分突出问题的某方面特征,享有“数字显微镜”之称,是目前国际上公认的最新时间频率分析工具^[1]。小波变换不但具有 Gabor 窗口 Fourier 变换对信号具有一定程度局域性分析的优点,而且通过对伸缩系数的改变实现了对窗口形状和大小的改变^[2]。小波变换由于具有良好的时频局部化性能,即在低频部分具有较高的频率分辨率和较低的时间分辨率,在高频部分具有较高的时间分辨率和较低的频率分辨率^[3],因而对信号在时频域都具有很强地表征信号局部特性的自适应性,被广泛应用于信号分析。

在小波变换的信号分析中,如果在每个可能的尺度下都计算小波系数,计算量会非常大,并产生惊人的

数据量^[4]。因此,在实际应用过程中,为了数值计算的简化和理论分析的简便,需要对小波变换进行离散化处理^[5]。采用离散小波变换,对尺度 a 和位移 b 进行离散化,即只在部分尺度和位移进行计算,使得分析十分有效,也是相当精确的。

在信号分析和处理过程中,常把复杂信号分成一些简单信号之和的形式,这个过程就是信号的分解,针对分解信号进行还原原始信号的过程叫做重构。文中基于离散小波变换,采用二进尺度和位移,分别对一维和语音信号进行分解和重构。实验仿真结果表明,该方法效果较好,计算量小且重构信号误差小。

1 小波变换信号分解与重构理论

1.1 傅里叶变换

傅里叶变换在一般的科学研究和工程技术的应用

研究中,均发挥着基本工具的作用^[6]。经典傅里叶变换是定义在函数空间或信号空间 $L^2(R)$ 上的连续线性算子,即对于空间 $L^2(R)$ 中的任何信号或函数 $f(t)$,它的傅里叶变换定义为

$$F(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \exp(-ivt) dt \quad (1)$$

$F(v)$ 也称为 $f(t)$ 的谱。从傅里叶变换发展到小波变换的中间阶段是 D. Gabor 变换,其基本形式为

$$G_f(b, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g_a(t - b) \exp(-ivt) dt \quad (2)$$

其中, $g_a(t) = \exp(-t^2/4a)/2\sqrt{a\pi}$ 称为“窗口函数”。对任何 $a > 0$, Gabor 变换可以理解 $f(t)$ “在时间点 $t = b$ 处,频率为 v 的频率成分”,即在时间点 $t = b$ 附近一定窗口范围内用傅里叶变换进行分析处理,体现了傅里叶变换的时频分析特点。傅里叶变换的深入研究和广泛应用,逐渐暴露了其在研究某些问题上的局限性,于是经过改进出现了小波变换^[7]。

1.2 小波变换与离散小波变换

小波变换是从经典傅里叶变换发展起来的,只是角度不同而已。小波变换也是定义在函数空间或信号空间 $L^2(R)$ 上的,但小波变换的变换因子不再是窗口傅里叶变换的积分因子 $g_a(t - b) \exp(-ivt)$,而是连续小波函数

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad (3)$$

如果 $C_\psi = \int_{R^+} \frac{|\Psi(v)|^2}{|v|} dv < +\infty$, 其中 $\Psi(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) \exp(-ivt) dt$ 是 $\psi(t)$ 的傅里叶变换,则称 $\psi(t)$ 为允许小波或小波母函数。

对于任意的函数或信号 $f(x)$, 其小波变换定义为

$$W_f(a, b) = \int_R f(x) \bar{\psi}_{a,b}(x) dx = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_R f(x) \bar{\psi}\left(\frac{x-b}{a}\right) dx \quad (4)$$

对任意的函数 $f(x)$, 其小波变换是一个二元函数。对于任意的参数对 (a, b) , 小波函数 $\psi_{a,b}(x)$ 在 $x = b$ 附近有明显波动,较远的地方则迅速地衰减到 0。可得,函数的小波变换 $W_f(a, b)$ 本质上是原信号 $f(x)$ 在 $x = b$ 点附近按 $\psi_{a,b}(x)$ 进行加权平均,所体现的是以 $\psi_{a,b}(x)$ 为标准快慢 $f(x)$ 的变化情况。如果时间中心参数 b 固定不变,小波变换 $W_f(a, b)$ 体现的则是原信号 $f(x)$ 在 $x = b$ 点附近随着分析范围逐渐变化时所表现出来的变化情况^[8]。

为了数值计算的简化和理论分析的简便,需要对小波变换进行离散化处理。对于小波变换而言,将其

参数对 (a, b) 离散化,可以分成两步实现。首先将尺度参数 a 按二进的方式离散化,得到著名的二进小波和二进小波变换,然后再将时间中心参数 b 按二进整数倍数的方式离散化,最后得到正交小波和函数的小波级数表达式,从而真正实现小波变换的连续形式和离散形式在普通函数形式上的完全统一^[9]。

1.3 信号分解与重构原理

对于许多信号、图像而言,低频成分常蕴含着信号的特征,对应大尺度分析;而对于高频成分,常对应信号的细节部分,对应的是小尺度分析^[10]。离散小波变换,其本质不需要知道尺度函数和小波函数的具体结构,根据系数即可以实现信号的分解和重构^[11]。因此,原信号通过两个互补滤波器产生两个信号,通过计算 DWT 系数可以得到原始信号的近似细节,这就是分解,其逆过程就是重构^[12]。

首先将需要处理的信号离散采样,得到 $x(z)$, 则信号的小波分解和重构可通过子带滤波的形式实现^[13],其分解和重构结构示意图如图 1 所示。

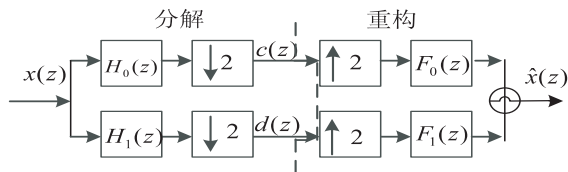


图 1 小波变换信号分解与重构示意图

图中 $F_0(z)$ 、 $F_1(z)$ 分别为低通滤波器和高通滤波器对应的滤波系数, $H_0(z)$ 、 $H_1(z)$ 分别为低通滤波器和高通滤波器的镜像滤波器对应的滤波系数,满足 $H_0(z) = F_0(-z)$, $H_1(z) = F_1(-z)$ 。信号的分解过程为:一方面,信号 $x(z)$ 经过低通滤波器后进行“下采样”(↓2),得到尺度和分辨率均减半的平均信号 $c(z)$,即低频成分;另一方面,信号 $x(z)$ 经过高通滤波器后进行“下采样”(↓2),得到尺度和分辨率均减半的细节信号 $d(z)$,即高频成分。信号分解的公式为

$$c_{j+1}(z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} c_j(m) F_0(m - 2z) \quad (5)$$

$$d_{j+1}(z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} c_j(m) F_1(m - 2z) \quad (6)$$

信号的重构过程为:信号平均经过 2 个样本之间插入零值进行拉伸,即“上采样”(↑2),再经过低通滤波器得到大尺度低分辨率的逼近,即低通输出;细节信号经过“上采样”(↑2)后,再经过高通滤波器,即可得到高通输出,两者相加即可得到重构的信号 $\hat{x}(z)$ 。信号重构的公式为

$$c_j(z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} c_{j+1}(m) F_0(z - 2m) + d_{j+1}(m) F_1(z - 2m) \quad (7)$$

由此可见,基于小波变换进行信号分解的实质是信号与滤波器组的互相关,重构则是分解信号与镜像

滤波器组的卷积。

2 信号分解与重构方法步骤

实验仿真采用 MATLAB7.0 编程实现,具体步骤归纳如下:

(1) 输入原始信号。

定义输入信号的长度,并对信号赋值。

(2) 对原始信号分解,获得信号的平均部分和细节部分。

采用 MATLAB 提供的 DWT 函数对原始信号进行低通、高通滤波,对低通输出通过下采样获得信号的平均部分,高通输出通过下采样获得信号的细节部分。为使小波变换后的能量更集中,减少计算量,选择 db3 小波作为原始信号分解的小波基。

(3) 对分解的信号进行重构。

采用 MATLAB 提供的 IDWT 函数对获得的信号平均部分、细节部分的系数分别进行上采样后,经过低通、高通滤波,两者相加即可得原始信号的重构信号。

3 仿真结果与分析

文中利用以上小波算法分别对一维信号和语音信号进行分解和重构,其分解重构图如图 2 和图 3 所示。

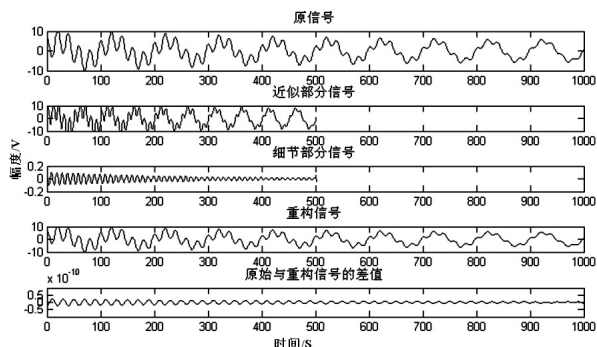


图 2 一维信号的分解与重构图

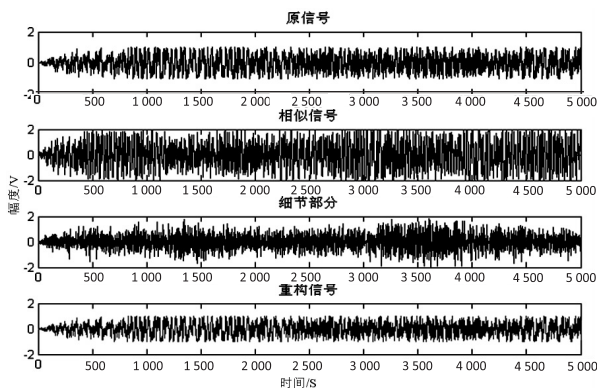


图 3 语音信号的分解与重构图

从仿真结果图中可以看出,使用该离散小波变换算法,无论是对一维信号还是语音信号分解时均可有效地获取其平均相似信息和细节信息,重构信号与原

始信号相比,损失较少,误差在数量级 10^{-10} 。


4 结束语

小波变换因为具有良好的时频局部化性能,可以突显信号的趋势、间断点和自相似等性质,已在信号分析、语音合成、图像处理等领域取得了广泛的应用^[14]。小波变换因窗口可变,具有局部分析和细化功能,可在没有明显损失的情况下,对原始信号进行重构。文中介绍了傅里叶变换与小波变换的基本理论,以及利用离散小波变换进行信号分解和重构的原理及步骤,分别对一维信号和语音信号采用离散小波变换进行分解和重构。仿真结果表明,采用离散小波变换可有效获取原始信号的近似、细节部分,重构信号没有明显损失,效果较好。

参考文献:

- [1] Burrus C S. Introduction to wavelets and wavelet transforms: a primer[M]. USA: Prentice Hall/Pearson, 2005.
- [2] 杜云峰,黄琦,蔡明山. 小波分析在信号处理中的应用[J]. 机电产品开发与创新, 2010, 23(3): 144-146.
- [3] 宗常进,毕军涛,董军宇. 基于离散小波变换的信号分解算法研究[J]. 计算机工程与应用, 2009, 45(8): 165-167.
- [4] 孙汝科. 小波变换在声发射信号处理中的应用[D]. 镇江: 江苏大学, 2009.
- [5] 黄廷飞. 小波变换在医学图像压缩中的应用研究[D]. 武汉: 华中科技大学, 2006.
- [6] 何鹏,薛之昕,江顺亮. 基于四元数的局部傅里叶变换[J]. 计算机技术与发展, 2012, 22(1): 53-58.
- [7] Boggess A, Narcowich F J. A first course in wavelets with Fourier analysis[M]. 2nd ed. Canada: John Wiley & Sons, Inc, 2009.
- [8] 孙延奎. 小波变换与图像、图形处理技术[M]. 北京: 清华大学出版社, 2012.
- [9] 冉启文. 小波变换与分数傅里叶变换理论及应用[M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2001.
- [10] Cade I S, Keogh P S, Sahinkaya M N. Fault identification in rotor/magnetic bearing systems using discrete time wavelet coefficients[J]. IEEE/ASME Transactions on Mechatronics, 2005, 10(6): 648-657.
- [11] 虞湘宾,董涛. 一种离散小波变换的快速分解和重构算法[J]. 东南大学学报: 自然科学版, 2002, 32(4): 564-568.
- [12] 李传伟,李安宗. 一种小波变换信号处理方法[J]. 西安电子科技大学学报, 2009, 36(4): 751-755.
- [13] Mallat S. A wavelet tour of signal processing[M]. San Diego: Academic Press, 1998.
- [14] 马婷婷,郭迎清. 基于离散小波变换的某型航空发动机故障诊断研究[J]. 计算机测量与控制, 2010, 18(2): 272-275.

基于离散小波变换的信号分解与重构

作者: [邵婷婷](#), [白宗文](#), [周美丽](#), [SHAO Ting-ting](#), [BAI Zong-wen](#), [ZHOU Mei-li](#)
作者单位: [延安大学 物理与电子信息学院, 陕西 延安, 716000](#)
刊名: [计算机技术与发展](#) 
英文刊名: [Computer Technology and Development](#)
年, 卷(期): 2014(11)

本文链接: http://d.g.wanfangdata.com.cn/Periodical_wjtz201411040.aspx