

图像修复 TV 模型的快速算法研究

孙向荣, 刘芳芳

(南京邮电大学 理学院, 江苏 南京 210046)

摘要:关于图像修复的全变分(TV)模型的求解有很多方法。在图像修复的全变分(TV)模型中,文中针对含有非光滑项的凸优化问题提出了一种基于交替方向乘子法(ADMM)的快速求解算法。ADMM方法对迭代公式中具体的子问题求解过程一般采用 Gauss-Seidel 方法,文中通过分析 TV 修复模型的性质,对 ADMM 算法进行了相应的改进,使得具体的数值求解可以用快速傅里叶变换方法,并证明了该算法的收敛性。实验结果表明,文中所提出的新算法与采用 Gauss-Seidel 迭代的方法相比较,不但修复效果更好,而且修复速度更快。

关键词:变分方法;偏微分方程;图像修复;交替方向乘子算法;快速傅里叶变换

中图分类号:TP301.6

文献标识码:A

文章编号:1673-629X(2014)11-0144-04

doi:10.3969/j.issn.1673-629X.2014.11.036

Research on Fast Algorithm of Image Inpainting Total Variational Model

SUN Xiang-rong, LIU Fang-fang

(College of Science, Nanjing University of Posts and Telecommunications, Nanjing 210046, China)

Abstract: There are many ways in solving the Total Variation (TV) model for image inpainting. For total variation model of image inpainting which contains non-smooth convex optimization problems, a fast solving algorithm on Alternating Direction Method of Multipliers (ADMM) is presented. Generally, the Gauss-Seidel method is usually used for iterative formula in specific sub-problems. In this paper, by analyzing the feature of TV model, improve the ADMM, so that can use the fast Fourier transform methods to solve specific problems. Then the convergence of the algorithm is proved. Experimental results show that the new algorithm presented in this paper is not only better in inpainting, but also faster.

Key words: variation approach; PDEs; image inpainting; alternating direction method of multipliers; fast Fourier transform

0 引言

图像是人类从事活动的主要信息来源,在人类获取和交换信息中起着重要的作用。因此,图像处理的应用领域必然涉及到人类工作和生活的方方面面。图像处理从大量的应用中产生的主要4类处理任务有图像去噪、图像去模糊、图像修复和图像分割。而数字图像修复技术作为当前数字图像处理和计算机图形学中的一个热点问题,其在实际应用中发挥了巨大作用,比方说在影视特技制作,旧照片中丢失信息修复,古代字画的修复,图像中多余物体的去除,特技制作文物保护,虚拟现实以及修复网络传输中丢失或损坏的视频信息等方面都有很高的应用价值。

图像修复就是要根据待修复区域周围的已知信息将图像填充到待修复区域中。它作为一种修复图像缺失或损坏的信息技术成为一个新的研究热点。现在大部分的非纹理图像修复方法都是基于偏微分方程^[1-4](Partial Differential Equation, PDE)方法。基于 PDE 的图像修复在修复较小面积的图像受损区域方面取得了很好的效果,它主要是利用物理学中热扩散的原理将待修复信息周围的已知有效信息延伸对待修复区域,把修复问题转化成建立能量泛函的问题,通过变分法求解最小化能量泛函方程,得到图像的近似解,从而达到图像修复的效果。

文中主要针对 TV 修复模型的数值求解^[5-6],在分

收稿日期:2013-12-07

修回日期:2014-03-13

网络出版时间:2014-07-28

基金项目:国家自然科学基金资助项目(10926104)

作者简介:孙向荣(1976-),男,江苏扬州人,副教授,硕士研究生导师,研究方向为格上拓扑学、图像处理;刘芳芳(1989-),女,安徽安庆人,硕士研究生,研究方向为图像处理。

网络出版地址: <http://www.cnki.net/kcms/detail/61.1450.TP.20140728.1228.043.html>

析交替方向乘法^[7-8] (Alternating Direction Method of Multipliers, ADMM) 的基础上, 针对保真项前面的正则化参数在修复区域里和修复区域外面取值的不同^[9-11]做了改进, 以简化模型, 并使求解过程更为快速简洁和精确。

1 TV 修复模型

T. Chan 等人在整体变分 (Total Variation, TV) 模型去噪的基础上, 提出了基于 TV 模型的修复方案, 即提出的图像修复的 TV 模型为

$$E[u] = \int_{\Omega} |\nabla u| dx + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega/D} (u - f)^2 dx \quad (1)$$

其中, 第一项是正则化项, 也称为先验模型, 是利用贝叶斯理论^[12] 估计图像修复中破损区域数据的依据; 第二项为保真项, 它的作用是提供有效的边界数据, 并对修复过程试图改变原有有效的数据作出约束。 Ω 表示整个图像空间, D 表示图像缺失的区域, Ω/D 表示 f 已知信息区域, $\lambda > 0$ 是权重系数。用 λ_D 区分已知信息区域与待修复区域, 将 λ_D 用一个分段函数表示, λ 表示已知信息区域, 0 表示待修复区域, 得到

$$\lambda_D = \begin{cases} 0, & x \in D \\ \lambda, & x \in \Omega/D \end{cases}$$

λ 由图像受损程度与噪声水平决定, TV 模型可改写为

$$E[u] = \int_{\Omega} |\nabla u| dx + \frac{\lambda_D}{2} \int_{\Omega} (u - f)^2 dx \quad (2)$$

TV 模型的 Euler-Lagrange 方程如下:

$$\lambda_D(u - f) - \operatorname{div}(\nabla u / |\nabla u|) = 0 \quad (3)$$

其梯度下降流为:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(\nabla u / |\nabla u|) + \lambda_D(u - f) \quad (4)$$

随着时间 t 的演化, 若第 n 步时, $\frac{\partial u}{\partial t} \rightarrow 0$, 即 $|u^{n+1} - u^n| < \varepsilon$, 得到所要求的 u 。

该模型最终归结为求解一个二阶的非线性偏微分方程, 由于含有 $\operatorname{div}(\nabla u / |\nabla u|)$ 这一项, 使得数值求解过程复杂, 从而影响修复的速度。

2 ADMM 算法与数值计算

2.1 ADMM 算法求解 TV 模型

ADMM 算法是由文献^[13]提出的一种快速的数值方法, 常用于求解带有非光滑的正则项的优化问题。该算法在图像修复过程中大大简化了模型, 提高了计算效率。并且它具有编程简单、得到的数值结果稳定等优势。因此, 该方法广泛地运用于图像处理领域。

针对模型(1), 考虑下面的约束优化问题

$$\min_u \left\{ E[u] = \int_{\Omega} |\nabla u| dx + \frac{\lambda_D}{2} \int_{\Omega} (u - f)^2 dx \right\} \quad (5)$$

$$\text{s. t. } \vec{d} = \nabla u$$

显然, 问题(5)可转化成下面的无约束优化问题

$$\min_{u, \vec{d}} \left\{ L_{\lambda}(u, \vec{d}, \lambda_1) = \int_{\Omega} |\vec{d}| dx + \frac{\lambda_D}{2} \int_{\Omega} (u - f)^2 dx + \lambda_1(\vec{d} - \nabla u) + \gamma_1 \|\vec{d} - \nabla u\|_2^2 \right\} \quad (6)$$

式中, $\|\cdot\|_2$ 表示 L_2 范数; λ_1 是拉格朗日乘子; $\gamma_1 > 0$, 为惩罚参数。

由 ADMM 方法, 求解式(6)的迭代公式如下:

$$\begin{cases} (u^{k+1}, \vec{d}^{k+1}) = \operatorname{argmin}_{u, \vec{d}} L_{\lambda}(u, \vec{d}, \lambda_1) \\ \lambda^{k+1} = \lambda^k + \lambda(\vec{d}^{k+1} - \nabla u^{k+1}) \end{cases} \quad (7)$$

式(7)的第一个子问题为多变量优化问题, 利用交替迭代的思想, 固定其他变量来对某一变量求最小极值, 可以得到以下的迭代公式:

$$\begin{aligned} \vec{d}^{k+1} &= \operatorname{argmin}_{\vec{d}} \left\{ \int_{\Omega} |\vec{d}| dx + \lambda_1(\vec{d} - \nabla u) + \gamma_1 \|\vec{d} - \nabla u\|_2^2 \right\} \\ u^{k+1} &= \operatorname{argmin}_u \left\{ \frac{\lambda_D}{2} \int_{\Omega} (u - f)^2 dx + \lambda_1(\vec{d} - \nabla u) + \gamma_1 \|\vec{d} - \nabla u\|_2^2 \right\} \\ \lambda^{k+1} &= \lambda^k + \lambda(\vec{d}^{k+1} - \nabla u^{k+1}) \end{aligned} \quad (8)$$

式(8)不仅包含变量 \vec{d} 的可分离优化问题和关于变量 u 的二次规划, 还包含对拉格朗日乘子 λ_1 的更新过程。 λ_1 的更新可以固定惩罚参数, 避免了数值不稳定性。式(8)由于 λ 在待修复区域 D 和有效信息部分

为 Ω/D 取值的不同, 即 $\lambda_D = \begin{cases} 0, & x \in D \\ \lambda, & x \in \Omega/D \end{cases}$ 。求解的过程是把 λ_D 看成一个分段函数, 这样在求 u 的子问题时, 由于 λ_D 是一个分段函数, 那么在计算过程中就不能用快速傅里叶变换来求 u 的精确解。

2.2 算法的改进及收敛性分析

针对上面不能用快速傅里叶变换来求 u 的精确解这个问题, 文中利用文献^[8], 考虑再引入一个辅助变量 $z, z = u$, 并加入限制条件, 最小化能量泛函转变为

$$\begin{aligned} \min_{u, \vec{d}, z} \left\{ L_{\lambda}(u, \vec{d}, z, \lambda_1) = \int_{\Omega} |\vec{d}| dx + \frac{\lambda_D}{2} \int_{\Omega} (z - f)^2 dx + \lambda_1(\vec{d} - \nabla u) + \lambda_2(z - u) + \frac{\gamma_1}{2} \|\vec{d} - \nabla u\|_2^2 + \frac{\gamma_2}{2} \|z - u\|_2^2 \right\} \end{aligned} \quad (9)$$

式中, λ_1, λ_2 是拉格朗日乘子; $\gamma_1, \gamma_2 > 0$, 为惩罚参数。

利用交替迭代的思想,固定其他变量来对某一变量求最小极值,对每一个子问题的具体求解策略如下:

(1) \vec{d} 的子问题:固定 z, u , 最小化能量泛函为:

$$\min_{u, \vec{d}, z} \left\{ \int_{\Omega} |\vec{d}| dx + \lambda_1 (\vec{d} - \nabla u) + \frac{\gamma_1}{2} \|\vec{d} - \nabla u\|_2^2 \right\} \quad (10)$$

即求

$$\min_{\vec{d}} \left\{ \int_{\Omega} |\vec{d}| dx + \frac{\gamma_1}{2} \|\vec{d} - \nabla u + \frac{\lambda_1}{\gamma_1}\|_2^2 \right\} \quad (11)$$

式(10)和式(11)是等价的,根据式(11)求解 \vec{d} , 利用广义软阈值公式,得到

$$\vec{d} = \frac{\nabla u - \frac{\lambda_1}{\gamma_1}}{\left| \nabla u - \frac{\lambda_1}{\gamma_1} \right|} \max \left\{ \left| \nabla u - \frac{\lambda_1}{\gamma_1} \right| - \frac{1}{\gamma_1}, 0 \right\}$$

(2) z 的子问题:固定 \vec{d}, u , 最小化能量泛函为

$$\min_z \left\{ \frac{\lambda_D}{2} \int_{\Omega} (z - f)^2 dx + \lambda_2 (z - u) + \frac{\gamma_2}{2} \|z - u\|_2^2 \right\} \quad (12)$$

即

$$\begin{aligned} \min_z \left\{ \frac{\lambda_D}{2} \int_{\Omega} (z - f)^2 dx + \frac{\gamma_2}{2} \|z - u + \frac{\lambda_2}{\gamma_2}\|_2^2 \right\} = \\ \min_z \left\{ \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega \setminus D} (z - f)^2 dx + \frac{\gamma_2}{2} \int_{\Omega \setminus D} \left(z - u + \frac{\lambda_2}{\gamma_2} \right)^2 dx + \right. \\ \left. \frac{\gamma_2}{2} \int_D \left(z - u + \frac{\lambda_2}{\gamma_2} \right)^2 dx \right\} \quad (13) \end{aligned}$$

当 $x \in \Omega/D$ 时,能量泛函 z 取极值的 Euler-Lagrange 方程为

$$\begin{cases} \lambda(z - f) + \gamma_2 \left(z - u + \frac{\lambda_2}{\gamma_2} \right) = 0 \Rightarrow \\ z(x) = \frac{\frac{\lambda}{\gamma_2} f(x) + u(x) - \frac{\lambda_2(x)}{\gamma_2}}{1 + \frac{\lambda}{\gamma_2}}, \text{ in } \Omega/D \\ \left(z - u + \frac{\lambda_2}{\gamma_2} \right) \vec{n} = 0, \text{ on } \partial\Omega \end{cases}$$

$$\text{当 } x \in D \text{ 时, } z(x) = u(x) - \frac{\lambda_2(x)}{\gamma_2}.$$

(3) u 的子问题:固定 \vec{d}, z , 最小化能量泛函为

$$\min_u \left\{ \lambda_1 (\vec{d} - \nabla u) + \lambda_2 (z - u) + \frac{\gamma_1}{2} \|\vec{d} - \nabla u\|_2^2 + \frac{\gamma_2}{2} \|z - u\|_2^2 \right\}$$

能量泛函 u 取极值的 Euler-Lagrange 方程为

$$\frac{\lambda_2}{\gamma_1} u - \Delta u = \frac{\lambda_2}{\gamma_1} + \frac{\gamma_2}{\gamma_1} z - \operatorname{div} \left(\vec{d} + \frac{\lambda_1}{\gamma_1} \right)$$

可以用快速傅里叶变换求解 u 。

$$\hat{u} = \frac{\frac{\lambda_2}{\gamma_1} + \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \hat{z} - \left(\operatorname{div} \left(\vec{d} + \frac{\lambda_1}{\gamma_1} \right) \right)^{\wedge}}{\frac{\lambda_2}{\gamma_1} - \Delta}$$

其中,“ \wedge ”表示傅里叶变换。

ADMM 算法求解模型(9)的迭代过程如下:

(1) $k = 0, u^0 = z^0 = 0, \vec{d}^0 = \lambda_1 = \lambda_2 = 0$;

(2) $\vec{d}^{k+1} = \operatorname{argmin}_d \{ L_{\lambda}(u^k, \vec{d}^k, z^k, \lambda_1^k, \lambda_2^k) \} =$

$$\operatorname{shrink} \left(\nabla u^k - \frac{\lambda_1^k}{\gamma_1}, \frac{1}{\gamma_1} \right)$$

$$z^{k+1} = \operatorname{argmin}_z L_{\lambda}(u^k, \vec{d}^{k+1}, z^k, \lambda_1^k, \lambda_2^k)$$

$$u^{k+1} = \operatorname{argmin}_u L_{\lambda}(u^k, \vec{d}^{k+1}, z^{k+1}, \lambda_1^k, \lambda_2^k)$$

$$\lambda_1^{k+1} = \lambda_1^k + \gamma_1 (\vec{d}^{k+1} - \nabla u^{k+1})$$

$$\lambda_2^{k+1} = \lambda_2^k + \gamma_2 (z^{k+1} - u^{k+1})$$

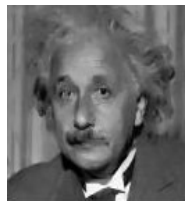
最后,当 $\|u^{k+1} - u^k\|_2 < \varepsilon$, 得到最小化能量泛函的解 u 。

由于算法添加了两个程序变量 \vec{d}, z , 是 ADMM 在图像修复的一个应用,其收敛性是由 ADMM 相关文献的结果保证的^[14-16]。下面总结一下文中 ADMM 算法的收敛性。

定理 1:对于 $\gamma_1, \gamma_2 > 0$, ADMM 算法产生的数列 $\{(\vec{d}^k, z^k, u^k, \lambda_1^k, \lambda_2^k)\}$ 从初始点 $(u^0, \lambda_1^0, \lambda_2^0)$ 收敛到 $(u^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*)$, 这里 $(u^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*)$ 是式(1)的解。

3 实验结果和分析

本节对 TV 模型及其 ADMM 算法进行了实验,并对结果进行分析。下面的图均为在 Matlab7.9.0, Inter Core i5, 2.4 GHz 的环境下进行的仿真实验。选用常用的“Einstein”图像,实验中取 $\lambda = 100, \gamma_1 = 5, \gamma_2 = 8, \varepsilon = 0.001$ 。并且对全图进行了去噪处理,使得基于 TV 模型的恢复算法得到更加充分的应用。通过与用高斯赛德尔迭代进行数值求解的模型修复效果进行对比,说明文中所提方法的可行性,实验对比图像如图 1 和图 2 所示。



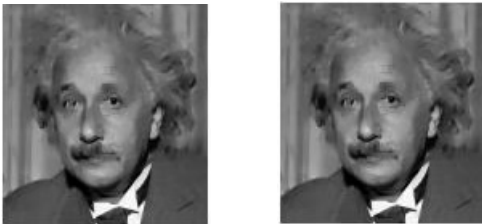
(a) 原图像

(b) Gauss-Seidel 迭代

(c) 快速傅里叶变换

图 1 损坏图像、ADMM 方法和改进方法的修复图像(迭代 20 次)

图 1 为 Einstein 脸部照片图像上的刻痕去除,其中(a)为原图像,(b)为 ADMM 算法中采用高斯赛德尔方法进行数值求解迭代 20 次的计算结果图像,(c)为 ADMM 算法中采用快速傅里叶变换求解迭代 20 次的计算结果。



(a) Gauss-Seidel 迭代 (b) 快速傅里叶变换

图 2 ADMM 方法和改进方法的修复图像(迭代 50 次)

图 2(a)为高斯赛德尔方法进行数值求解迭代 50 次的计算结果图像,(b)为采用快速傅里叶变换求解迭代 50 次的计算结果。

通过视觉观察可以看出文中方法用于图像修复的效果更好,更符合视觉要求。

表 1 给出了两种方法在进行相同迭代次数下的耗时比较。

表 1 耗时比较

方法	迭代次数	耗时/s
Gauss-Seidel	20	0.187 2
	50	0.563 5
快速傅里叶变换	20	0.147 2
	50	0.346 8

4 结束语

由于图像修复 TV 模型中正则项的不可微性,因此提出一种基于变量分离的交替方向乘子法应用于 TV 修复模型中。从文中可以看出,该算法具有以下优势:

- (1)简化了模型,降低了运算的复杂度。
- (2)在文中的交替方向迭代过程中,为了避免迭代过程中不断增加惩罚参数的取值,导致数值结果的不稳定,包含了对拉格朗日乘子 λ_i 的更新过程,使得惩罚参数可保持不变,从而提高了子问题的数值算法的收敛速度,同时在迭代过程的数值求解中采用了傅里叶变换方法,代替了以前的 Gauss-Seidel 方法,使得图像修复的结果更为快速精确。

参考文献:

[1] Bertalmio M,Sapiro G,Caselles V,et al. Image inpainting

[C]//Proceedings of SIGGRAPH 2000. New Orleans:[s. n.],2000:417-424.

[2] Rudin L I,Osher S,Fatemi E. Nonlinear total variation based noise removal algorithms[J]. Physica D,1992,60:259-268.

[3] Chan T F,Shen J. Mathematical models for local deterministic inpaintings[R]. Los Angeles:UCLA,2000.

[4] Chan T F,Shen J. Non-texture inpainting by curvature-driven diffusions (CDD)[J]. Journal of Visual Communication and Image Representation,2001,12(4):436-449.

[5] 袁亚湘,孙文瑜. 最优化理论与方法[M]. 北京:科学出版社,2005.

[6] 李董辉,童小娇,万 中. 数值最优化[M]. 北京:科学出版社,2005.

[7] Tai Xuecheng,Wu Chunlin. Augmented Lagrangian method, dual methods and split Bregman iteration for ROF model [C]//Proc of second international conference on scale space and variational methods in computer vision. Voss:[s. n.], 2009:502-513.

[8] 张峥嵘,孙玉宝,黄丽丽,等. 全变差图像恢复的交替方向乘子法[J]. 计算机工程与应用,2010,46(14):8-11.

[9] 郝 岩,冯象初,许建楼. 交替迭代的变分修复模型及其分裂 Bregman 算法[J]. 系统工程与电子技术,2011,33(12):2749-2754.

[10] 庞志峰,杨余飞,林 玲. 图像去噪 LOT 模型的分裂 Bregman 方法[J]. 湖南大学学报(自然科学版),2010,37(9):83-87.

[11] 李亚峰,冯象初. L1 投影问题的分裂 Bregman 方法[J]. 电子学报,2010,38(11):2471-2475.

[12] 张 亘,陈 刚. 基于偏微分方程的图像处理[M]. 北京:高等教育出版社,2004.

[13] Yang Junfeng,Zhang Yin,Yin Wotao. An efficient TV-L1 algorithm for deblurring multichannel images corrupted by impulsive noise [J]. SIAM Journal on Scientific Computing, 2009,31(4):2842-2865.

[14] Gabay D,Mercier B. A dual algorithm for the solution of nonlinear variational problems via finite-element approximations [J]. Computers and Mathematics with Application, 1976,2(1):17-40.


[15] Glowinski R,Marrocco A. Sur l'approximation par elements finis d'ordre un, et la resolution par penalisation-dualite d'une classe de problemes de dirichlet nonlineaires[J]. Rev Francaise d'Aut Inf Rech Oper,1975,2:41-76.

[16] Boyd S,Parikh N,Chu E,et al. Distributed optimization and statistical learning via the alternating direction method of multipliers[J]. Foundation and Trends in Machine Learning, 2010,3(1):1-122.

图像修复TV模型的快速算法研究

作者：[孙向荣](#)，[刘芳芳](#)，[SUN Xiang-rong](#)，[LIU Fang-fang](#)

作者单位：[南京邮电大学 理学院, 江苏 南京, 210046](#)

刊名：[计算机技术与发展](#)

英文刊名：[Computer Technology and Development](#)

年，卷(期)：2014(11)

本文链接：http://d.wanfangdata.com.cn/Periodical_wjfz201411036.aspx