

一种基于偏微分方程变分去噪模型

张 哲, 张化朋

(南京邮电大学 理学院, 江苏 南京 210046)

摘 要:近年来,国内外学者对于泊松噪声的研究越来越多,在 TV 模型的基础上提出了不少二阶去噪模型,它们在有效去除噪声的同时,很好地保护了图像边缘细节,但是共同的缺点是产生了“块效应”。针对这一不足,文中提出了一种四阶去噪模型,运用变分原理得到了其相应的欧拉拉格朗日方程,并用梯度下降法求解拉格朗日方程。文中运用差分法对该模型进行了数值求解与仿真,实验结果表明,提出的方法不仅去噪效果良好,而且有效改善了二阶去噪模型中出现的“块效应”,同时有效保护了边缘细节。

关键词:变分方法;偏微分方程;图像去噪;泊松噪声;四阶模型;块效应

中图分类号:TP31

文献标识码:A

文章编号:1673-629X(2014)11-0103-04

doi:10.3969/j.issn.1673-629X.2014.11.026

An Denoising Model of Variation Based on PDE

ZHANG Zhe, ZHANG Hua-peng

(College of Science, Nanjing University of Posts and Telecommunications,
Nanjing 210046, China)

Abstract: In recent years, there are more and more studies on Poisson noise by domestic and foreign scholars, they have proposed several second-order derivative denoising models based on TV model, which are able to remove the noise effectively, and at the same time, protect the image edge detail well, but have a common drawback called "block effect". In response to this deficiency, propose a fourth-order denoising model in this paper, and use the variational principle to get its corresponding Euler Lagrange equation and apply the gradient descent method to solve the equation. In this paper, use the differentiated method for numerical solution of the model and simulation, the results show that the proposed method not only removes the noise effectively, but also improve the block effect while protecting the edge detail.

Key words: variation approach; PDE; image denoising; Poisson noise; fourth-order model; block effect

1 概 述

基于偏微分方程(PDE)的图像去噪是图像处理中一个崭新的研究方向,近些年来不断引起国内外学者的广泛关注。图像去噪是整个图像处理过程的最初阶段,是进行图像修复和图像增强等后续处理的关键环节,在图像处理中占有举足轻重的地位,因此具有非常重要的意义。

图像去噪的目的是处理受到噪声干扰的图像,改善图像的质量。传统的图像去噪方法主要是通过滤除图像的高频部分来达到去噪的目的,然而图像的细节如边缘也分布在高频区域,因此在去噪的同时也模糊了图像的边缘细节^[1]。然而基于偏微分方程的图像处

理优势在于可以有效地保留图像边缘细节部分,很好解决了去噪和保留图像细节之间的矛盾。

噪声主要分为加性噪声和乘性噪声两种形式^[2]。到目前为止,人们对于加性噪声的研究相对较多,并取得了很好的效果,如 Rudin L 等^[3]在 1992 年提出一种经典的去噪方法—ROF 模型。乘性噪声不同于加性噪声,其与图像不是相对独立的且大多数情况下并不服从于高斯分布,因此乘性噪声的研究相比于加性噪声也更为复杂。乘性噪声主要存在于 SAR 图像、显微图像、医学等图像中。

设图像灰度函数 $u: \Omega \rightarrow R$, 开集 $\Omega \subset R^2$ 是一个矩形区域。一般的,若记 u 为清晰未受噪声污染的图像,

收稿日期:2013-12-05

修回日期:2014-03-13

网络出版时间:2014-07-28

基金项目:国家自然科学基金资助项目(11301281)

作者简介:张 哲(1989-),男,安徽芜湖人,硕士研究生,研究方向为图像处理;张化朋,副教授,硕士研究生导师,研究方向为模糊数学、图像处理。

网络出版地址: <http://www.cnki.net/kcms/detail/61.1450.TP.20140728.1226.036.html>

n 为乘性噪声, f 为观测到的受污染的图像, 则乘性噪声模型可以表示为:

$$f = un \quad (1)$$

关于乘性噪声的研究, 目前有两种经典的去噪模型。一种是由 Rudin 等^[4]在 2003 年提出的 RLO 模型。另一种是由 Aubert 和 Aujol^[5]在 2008 年提出的 AA 模型。在文献[4]中, 假设噪声的期望值为 1, 方差已知, 作者提出了下面的去噪模型

$$\min \left\{ J(u) + \lambda_1 \int_{\Omega} \frac{f}{u} + \lambda_2 \int_{\Omega} \left(\frac{f}{u} - 1 \right)^2 \right\} \quad (2)$$

其中, $J(u) = \int_{\Omega} |\nabla u|$ 为正项; 后两项为光滑项; λ_1 和 λ_2 为权重系数; Ω 为图像区域。

通过实验验证, RLO 模型在处理服从高斯分布的乘性噪声时效果显著。在文献[5]中, 基于 MAP 方法, Aubert 和 Aujol 利用 gamma 噪声的数学特性, 得到了一个保真项 $\int_{\Omega} (\log u + \frac{f}{u})$, 由此构造了如下的 AA 模型:

$$\min \left\{ J(u) + \lambda \int_{\Omega} (\log u + \frac{f}{u}) \right\} \quad (3)$$

其中, $J(u) = \int_{\Omega} |\nabla u|$ 。

由变分原理, 得到关于式(3)的一个引入时间变量 t 的方程:

$$u_t = \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) + \lambda \frac{f - u}{u^2} \quad (4)$$

近来, Huang 等人^[6]改进了 AA 模型, 用 e^{-u} 代替光滑项中的 u , 避免了 $u=0$ 时出现病态的情形, 并提出了以下模型:

$$\min \left\{ \int_{\Omega} (u + f e^{-u}) + \lambda_1 \int_{\Omega} |u - \omega|^2 + \lambda_2 J(\omega) \right\} \quad (5)$$

其中, λ_1, λ_2 是权重系数; $\omega = \log u$ 。

在光量子计数成像系统中, 如 CCD 固态光电检测器阵列、天文成像、荧光共焦显微成像等获取的图像往往出现泊松噪声, Triet Le 等^[7]针对泊松噪声提出一种变分模型:

$$\min \left\{ \int_{\Omega} (u - f \log u) + \lambda \int_{\Omega} |\nabla u| \right\} \quad (6)$$

在文献[8]中, 针对泊松噪声, Guo 等人提出了一种二阶去噪模型, 噪声模型如下:

$$\min \left\{ \int_{\Omega} \alpha(x) |Du| + \lambda \int_{\Omega} (u + f \log \frac{1}{u}) \right\} \quad (7)$$

由变分原理得到式(6)的一个引入时间变量 t 的方程:

$$u_t = \operatorname{div} \left(\alpha(x) \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) - \lambda \left(1 - \frac{f}{u} \right) \quad (8)$$

这些经典模型对于噪声的研究意义重大, 它们不仅具有良好的去噪效果, 而且较好地保留了图像的边缘细节, 但是缺陷是产生了“块效应”, 这与二阶偏微分方程的属性有关^[9-11]。

为了克服文献[7]中存在的缺陷, 受文献[8, 12]的启发, 文中采用一种四阶偏微分方程去除噪声。仿真实验结果表明, 该方法不仅具有良好的去噪效果, 而且有效地避免了“块效应”的产生, 同时有效保护了图像边缘细节。

2 基于偏微分方程的变分去噪模型

文中用 Ω 表示图像所在区域, Ω 为 R^n 中有界开子集。设 f 为观测到受 Poisson 噪声污染的图像, u 为原始图像。由文献[8], 以 $H(u, f) = u + f \log \frac{1}{u}$ 为光滑项, 令 $h(u) = u + f \log \frac{1}{u}$, 则 $h'(u) = 1 - \frac{f}{u} = \frac{u-f}{u}$, $h''(u) = \frac{f}{u^2} > 0$, 因此, $H(u, f)$ 为严格凸函数。

取能量函数为:

$$\min \left\{ \int_{\Omega} F(|\nabla^2 u|) + \lambda \int_{\Omega} (u + f \log \frac{1}{u}) \right\} \quad (9)$$

其中, ∇^2 为拉普拉斯算子; $F(\cdot)$ 为非负非减函数。

由变分原理, 能量泛函取得极小值的必要条件是满足 Euler—Lagrange 方程, 即:

$$\nabla^2 (F'(|\nabla^2 u|) \operatorname{sign}(|\nabla^2 u|)) + \lambda (1 - \frac{f}{u}) = 0 \quad (10)$$

其中, sign 表示符号函数。

于是有:

$$\nabla^2 \frac{F'(|\nabla^2 u|) \nabla^2 u}{|\nabla^2 u|} + \lambda (1 - \frac{f}{u}) = 0 \quad (11)$$

引入记号 $c(s) = \frac{F'(s)}{s}$, 则式(11)变分得:

$$\nabla^2 (c(|\nabla^2 u|) \nabla^2 u) + \lambda (1 - \frac{f}{u}) = 0 \quad (12)$$

引入时间变量 t , 应用梯度下降法求解上述 Euler—Lagrange 方程得到扩散方程为:

$$\begin{cases} u_t = -\nabla^2 (c(|\nabla^2 u|) \nabla^2 u) - \lambda (1 - \frac{f}{u}) \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad (13)$$

由文献[12], 取 $c(s) = \frac{1}{1 + (\frac{s}{k})^2}$, k 为阈值。

含有噪声的图像经过新模型去噪后的图像不仅有效消除了泊松噪声, 而且避免了“块现象”的产生, 得到的图像具有良好的视觉效果。

3 新模型求解

参考文献[12]的方法,文中采用差分法求解上节得到的新模型。假设 Δt 为离散化时间步长,离散化空间步长为 h ,因此有:

$t = n\Delta t, n = 0, 1, 2 \cdots$ (14)

$x = ih, i = 0, 1, 2 \cdots$ (15)

$y = jh, j = 0, 1, 2 \cdots$ (16)

应用差分格式,有:

$\nabla^2 u_{i,j}^n = \frac{u_{i+1,j}^n + u_{i-1,j}^n + u_{i,j+1}^n + u_{i,j-1}^n - 4u_{i,j}^n}{h^2}$ (17)

且有:

$u_{-1,j}^n = u_{0,j}^n, u_{I+1,j}^n = u_{I,j}^n, j = 0, 1, \cdots, J$ (18)

$u_{i,-1}^n = u_{i,0}^n, u_{i,J+1}^n = u_{i,J}^n, i = 0, 1, \cdots, I$ (19)

令 $g(\nabla^2 u) = F'(|\nabla^2 u|) \frac{\nabla^2 u}{|\nabla^2 u|} = c(|\nabla^2 u|) \nabla^2 u,$

即: $g_{i,j}^n = g(\nabla^2 u_{i,j}^n)$, 则有:

$\nabla^2 g_{i,j}^n = \frac{g_{i+1,j}^n + g_{i-1,j}^n + g_{i,j+1}^n + g_{i,j-1}^n - 4g_{i,j}^n}{h^2}$ (20)

且

$g_{-1,j}^n = g_{0,j}^n, g_{I+1,j}^n = g_{I,j}^n, j = 0, 1, \cdots, J$ (21)

$g_{i,-1}^n = g_{i,0}^n, g_{i,J+1}^n = g_{i,J}^n, i = 0, 1, \cdots, I$ (22)

综合后有:

$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} = -\nabla^2 g_{i,j}^n - \lambda^n (1 - \frac{f}{u_{i,j}^n})$ (23)

文中取 $dt=0.2, h=1$ 。

4 实验结果分析

评判图像质量的好坏有主观和客观两种方法。主观即是通过眼睛直接观察去噪后的图像,判断图像的清晰程度。客观评价标准主要有均方差(MSE)和峰值信噪比(PSNR),其中峰值信噪比最为常用^[13-16]。去噪后峰值信噪比越大说明去噪效果越好。文中给出主观图像以及 PSNR 来说明新模型的可行性。其中, PSNR 的计算公式如下:

$PSNR = 10\lg(\frac{255^2}{MSE})$ (24)

$MSE = \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (A_{i,j} - B_{i,j})^2}{mn}$ (25)

其中, A 和 B 分别表示原始无噪图像和去噪后的图像; m, n 分别表示图像的行数和列数。

文中是在 Matlab7.9.0, Inter Core i5, 2.4 GHz 的环境下进行的仿真实验。选用常用的“Lena”图像,人为加入泊松噪声,实验中取 $k=15$ 。通过与二阶噪声模型去噪效果对比说明作者所提模型的可行性,实验对比图像如图 1 所示。



图 1 Lena 图像去噪对比

通过视觉观察可以看出同一幅受泊松噪声污染的图像(b)、(c)去除了噪点,但是在平坦区域有明显的成块现象;图(d)新模型在去噪取得不错效果的同时有效地克服了“块现象”的产生,同时也保护了图像边缘细节。

从以上图像对比可以很清楚地看出,新模型不但在去噪效果上优于二阶模型,而且克服了二阶模型产生的“块现象”。

下面给出模型的 PSNR 数值对比,如表 1 所示。

表 1 Lena 图像的 PSNR 对比

模型	加噪的 PSNR	去噪后的 PSNR	迭代时间/s
二阶模型	13.960 2	28.436 5	2.546 1
四阶新模型	14.949 2	30.143 7	3.452 8

通过数值对比可以看出,新模型 PSNR 值明显高于二阶模型,但是迭代时间长,这也是高阶模型的缺点,也是今后需要改进的地方。通过这些足以说明新模型的可行性。综合以上两方面的比较,新模型在去除泊松噪声上取得了不错的效果,有效保护了图像边缘,同时克服了“块效应”的产生。

5 结束语

文中是在 PDE 的基础上,运用变分原理,提出一种四阶去噪模型,旨在去除噪声,保护边缘的同时,克服二阶模型容易产生的“块效应”。从理论上给出解的存在性,并且通过 Matlab7.9.0 仿真实验,从主观视觉和客观数值上给出模型的可行性。实验结果表明,新模型不仅能够有效去除噪声,很好地保留图像边缘信息,同时明显改善了二阶模型在平坦区域的“块效应”。

参考文献:

- [1] Tang Chen, Han Lin, Ren Hongwei, et al. Second-order oriented partial-differential equations for denoising in electronic-speckle-pattern interferometry fringes[J]. Optics Letters, 2008, 33(19): 2197-2181.
- [2] Jin Zhengmeng, Yang Xiaoping. Analysis of a new variational model for multiplicative noise removal[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2010, 362(2): 415-426.
- [3] Rudin L I, Osher S, Fatemi E. Nonlinear total variation based noise removal algorithms[J]. Physica D, 1992, 60: 259-268.
- [4] Rudin L I, Lions P L, Osher S. Multiplicative denoising and deblurring: theory and algorithms[M]//Geometric level set methods in imaging, vision, and graphics. [s. l.]: [s. n.], 2003: 103-119.
- [5] Aubert G, Aujol J F. A variational approach to removing multiplicative noise[J]. SIAM Journal on Applied Mathematics, 2008, 68(4): 925-946.
- [6] Huang Y M, Ng M K, Wen Y W. A new total variation method for multiplicative noise removal[J]. SIAM Journal on Imaging Sciences, 2009, 2(1): 20-40.
- [7] Le T, Chartrand R, Asaki T J. A variational approach to reconstructing images corrupted by Poisson noise[J]. Journal of Mathematical Imaging and Vision, 2007, 27(3): 257-263.
- [8] Dong Gang, Guo Zhichang, Wu Boying. A convex adaptive total variation model based on the gray level indicator for multiplicative noise removal[J]. Abstract and Applied Analysis, 2013, 2013: 912373.
- [9] Landi G, Piccolomini E L. An efficient method for nonnegatively constrained total variation-based denoising of medical images corrupted by Poisson noise[J]. Computerized Medical Imaging and Graphics, 2012, 36(1): 38-46.
- [10] Huang Y M, Ng M K, Wen Y W. A fast total variation minimization method for image restoration[J]. Multiscale Modeling & Simulation, 2008, 7(2): 774-795.
- [11] Lü Xiaoguang, Le Jiang, Huang Jin, et al. A fast high-order total variation minimization method for multiplicative noise removal[J]. Mathematical Problems in Engineering, 2013, 2013: 834035.
- [12] You Yuli, Kaveh M. Fourth-order partial differential equations for noise removal[J]. IEEE Trans on Image Processing, 2000, 9(10): 1723-1730.
- [13] Hardt R, Zhou X. An evolution problem for linear growth functional[J]. Communications in Partial Differential Equations, 1994, 19(11-12): 1879-1907.
- [14] Giusti E. Minimal surfaces and functions of bounded variation[M]. [s. l.]: Birkhauser, 1994.
- [15] Abramowitz M, Irene A. Handbook of mathematical functions[M]. New York, NY, USA: Dover, 1972.
- [16] Shi Jianing, Osher S. A nonlinear inverse scale space method for a convex multiplicative noise model[J]. SIAM Journal on Imaging Sciences, 2008, 1(3): 294-321.

+++++
(上接第 102 页)

4 结束语


针对软、硬阈值函数的缺点,文中提出一种新的阈值函数,该函数最大的优越性是连续且减小了估计系数的误差。与传统方法相比,新阈值函数无论在视觉上还是通过客观评价标准 PSNR 和 RMSE 来评判都是有所提升的,且改进的阈值函数可以针对不同的图像择优选择控制变量 α 和 r 的值,从而提升去噪效果。

小波阈值去噪法的重点和难点仍然是阈值的选取和阈值函数的构造,而且没有哪一种方法对所有图片去噪效果都是最佳的。因此,小波阈值去噪法还有很大的发展空间,阈值的选取和阈值函数的构造也是今后研究的重点内容。

参考文献:

- [1] 谢杰成,张大力,徐文立. 小波图象去噪综述[J]. 中国图象图形学报, 2002, 7(3): 209-217.
- [2] Donoho D L, Johnstone I M. Ideal spatial adaptation via wavelet shrinkage[J]. Biometrika, 1994, 81(12): 425-455.
- [3] Donoho D L, Johnstone I M. De-noising by soft thresholding[J]. IEEE Trans on IT, 1995, 41(3): 613-627.
- [4] Donoho D L, Johnstone I M. Adapting to unknown smoothness via wavelet shrinkage[J]. Journal of American Statistical Association, 1995, 90(432): 1200-1224.
- [5] Gao Hongye, Bruce A G. Waveshrink with firm shrinkage[J]. Statistica Sinica, 1997, 7(4): 855-874.
- [6] 任 重,刘 莹,刘国栋,等. 改进的小波双阈值双因子函数去噪[J]. 计算机应用, 2013, 33(9): 2595-2598.
- [7] 刘卫东,刘尚合,胡小锋,等. 小波阈值去噪函数的改进方法分析[J]. 高电压技术, 2007, 33(10): 59-63.
- [8] 田 沛,李庆周,马 平,等. 一种基于小波变换的图像去噪新方法[J]. 中国图像图形学报, 2008, 13(3): 394-399.
- [9] 曲天书,戴逸松,王树勋. 基于 SURE 无偏估计的自适应小波阈值去噪[J]. 电子学报, 2002, 30(2): 266-268.
- [10] 张维强,宋国乡. 基于一种新的阈值函数的小波域信号去噪[J]. 西安电子科技大学学报, 2004, 31(2): 296-299.
- [11] 付 炜,许山川. 一种改进的小波域阈值去噪算法[J]. 传感技术学报, 2006, 19(2): 534-536.
- [12] 蔡德尊. 基于小波变换的图像去噪算法研究[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2011.
- [13] 倪 林. 小波变换与图像处理[M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2010.
- [14] 郑 钧,侯锐锋. 小波去噪中小波基的选择[J]. 沈阳大学学报, 2009, 21(2): 108-110.

一种基于偏微分方程变分去噪模型

作者：[张哲](#)，[张化朋](#)，[ZHANG Zhe](#)，[ZHANG Hua-peng](#)
作者单位：[南京邮电大学 理学院, 江苏 南京, 210046](#)
刊名：[计算机技术与发展](#)
英文刊名：[Computer Technology and Development](#)
年，卷(期)：2014(11)

引用本文格式：[张哲](#). [张化朋](#). [ZHANG Zhe](#). [ZHANG Hua-peng](#) 一种基于偏微分方程变分去噪模型[期刊论文]-[计算机技术与发展](#) 2014(11)