

# 基于一种新的阈值函数的小波图像去噪

李 智,张根耀,王 蓓

(延安大学 计算机学院,陕西 延安 716000)

**摘 要:**文中在 D. L. Donoho 和 I. M. Johnstone 提出的小波阈值去噪基础上,提出了一种改进的阈值函数。该阈值函数采用双阈值模式,通过逐渐增大对小波系数的缩减力度来处理双阈值之间的小波系数,尽可能多地保留有用信息,直至小波系数缩减为零。在这里引入了一个控制变量来调节系数的缩减幅度。与传统的软、硬阈值方法相比,改进的阈值函数最大的优点是函数连续且减小了估计系数的误差。通过仿真实验,从视觉和客观评价标准(峰值信噪比和均方根误差)上验证了新阈值函数去噪的有效性。

**关键词:**图像去噪;小波变换;阈值函数;峰值信噪比;均方根误差

中图分类号:TN911

文献标识码:A

文章编号:1673-629X(2014)11-0100-03

doi:10.3969/j.issn.1673-629X.2014.11.025

## Wavelet Image Denoising Based on a New Threshold Function

LI Zhi,ZHANG Gen-yao,WANG Bei

(School of Computer,Yan'an University,Yan'an 716000,China)

**Abstract:**An improved threshold function is presented based on the wavelet shrinkage put forward by D. L. Donoho and I. M. Johnstone. This function has two thresholds,it retains the useful information as much as possible by gradually increasing the shrink of wavelet coefficients between the two thresholds,until the coefficients are reduced to zero. In this paper,introduce a control variable to adjust the shrink. Compared with the traditional soft and hard threshold methods,the greatest superiority of this new function is continuous and reducing the error of estimated coefficient. Finally,demonstrate and validate the denoising effect of this new threshold function by simulation experiment from vision and objective evaluation standards (Peak Signal to Noise Ratio and Root-Mean-Square Error).

**Key words:**image denoising;wavelet transform;threshold function;Peak Signal to Noise Ratio;Root-Mean-Square Error

## 0 引 言

为了将现实生活中的含噪图像用于后续的图像处理,有必要对图像进行去噪处理。近年来,小波变换由于具备良好的时频局部化性质,因而被人们广泛应用于图像去噪处理<sup>[1]</sup>。目前去噪方法有:模极大值去噪法、基于小波系数相关性去噪法和小波阈值去噪法,其中小波阈值去噪法在图像的去噪领域取得了较好的效果。1994年,Donoho和Johnstone在小波变换的基础上提出了小波阈值去噪概念,并且证明此方法在Besov空间上可得到最佳估计值,而任何其他显性估计都达不到这样的结果<sup>[2-4]</sup>。因此,小波阈值去噪法引起了国内外学者的研究,文献[5-11]对此方法做了进一步的研究,分别提出改进的阈值函数。常用的软、硬阈值函数存在一些缺点,比如硬阈值函数在阈值处

不连续,而软阈值函数估计的小波系数与图像的系数之间存在较大偏差等。

针对这些问题,文中提出一种改进的阈值函数,引入双阈值以及控制变量,在保证连续性的同时减小了估计系数的误差,改善了去噪效果,并且对实际应用更具有灵活性。最后通过仿真实验验证了新阈值函数去噪的有效性。

## 1 小波阈值去噪

### 1.1 阈值化方法

Donoho和Johnstone提出的小波阈值去噪方法的基本思想是,较大的小波系数主要是实际信号,而那些比较小的系数在很大程度上是噪声。因此,可以设定一个阈值,对于大于阈值的小波系数,把它们阈值化处

收稿日期:2013-11-27

修回日期:2014-03-05

网络出版时间:2014-07-28

基金项目:陕西省教育教改项目(2013JK1124);2013年延安大学研究生教育创新计划项目

作者简介:李 智(1989-),男,硕士研究生,研究方向为计算机图形图像处理;张根耀,教授,博士,硕士生导师,研究方向为计算机软件与理论及图像处理应用。

网络出版地址: <http://www.cnki.net/kcms/detail/61.1450.TP.20140728.1224.022.html>

理后得到新的估计系数;而小于阈值的小波系数,把它们的值记为零。这种方法可以将部分噪声滤除,然后经小波逆变换得到所需要的信号。使用阈值对图像进行去噪的过程如下<sup>[12]</sup>:

(1) 选定一个小波基对一幅图像进行  $n$  层小波分解,分解后的尺度系数和小波系数组成一个系数向量  $\mathbf{W}$ 。

(2) 对系数向量  $\mathbf{W}$  进行阈值化处理,得到新的系数向量  $\tilde{\mathbf{W}}$ ,使得  $\|\tilde{\mathbf{W}} - \mathbf{W}\|$  尽量小。

(3) 利用新的系数向量  $\tilde{\mathbf{W}}$  进行小波重构,得到去噪后的图像。

## 1.2 阈值化处理

阈值的选取是阈值化处理中最重要的部分。Donoho 和 Johnstone 提出一种选取方法,并在理论上证明了阈值与噪声的方差成正比。阈值大小为

$$\lambda = \sigma \sqrt{2 \ln(M \times N)} \quad (1)$$

其中,  $\sigma$  为噪声的标准方差;  $M \times N$  为图片的尺寸。阈值化改造最常用的软、硬阈值函数如下:

软阈值函数为

$$\tilde{\mathbf{W}} = \begin{cases} \text{sgn}(\mathbf{W}) (|\mathbf{W}| - \lambda), & |\mathbf{W}| \geq \lambda \\ 0, & |\mathbf{W}| < \lambda \end{cases} \quad (2)$$

硬阈值函数为

$$\tilde{\mathbf{W}} = \begin{cases} \mathbf{W}, & |\mathbf{W}| \geq \lambda \\ 0, & |\mathbf{W}| < \lambda \end{cases} \quad (3)$$

两种阈值方法各有利弊,硬阈值函数处理后,图像能很好地保留边缘信息,但是噪声没有得到完全抑制;而软阈值函数处理后,图像的边缘信息模糊,但是去噪效果较好。

$$\tilde{\mathbf{W}} = \begin{cases} \text{sgn}(\mathbf{W}) \left( |\mathbf{W}| - \lambda_1 + \frac{\sqrt{2}r}{2} - \sqrt{r^2 - \left[ (1-\alpha)\lambda_1 + \frac{\sqrt{2}r}{2} \right]^2} \right), & |\mathbf{W}| > \lambda_1 \\ \text{sgn}(\mathbf{W}) \left( \sqrt{r^2 - \left( |\mathbf{W}| - \lambda_1 - \frac{\sqrt{2}r}{2} \right)^2} - \sqrt{r^2 - \left[ (1-\alpha)\lambda_1 + \frac{\sqrt{2}r}{2} \right]^2} \right), & \lambda_2 \leq |\mathbf{W}| \leq \lambda_1 \\ 0, & |\mathbf{W}| < \lambda_2 \end{cases} \quad (7)$$

其中,  $\lambda_1$  是通用阈值;  $\lambda_2 = \alpha\lambda_1$  ( $0 < \alpha \leq 1$ )。

且根据  $\alpha$  的取值不同,对应  $r$  的取值范围如下:

$$\begin{cases} r \geq \frac{2(1-\alpha)\lambda_1}{2-\sqrt{2}}, & 2-\sqrt{2} < \alpha \leq 1 \\ r \geq \frac{\lambda_1(1-\alpha)^2 + \lambda_1}{\sqrt{2}\alpha}, & 0 < \alpha \leq 2-\sqrt{2} \end{cases} \quad (8)$$

连续性证明:

当  $|\mathbf{W}| \rightarrow \lambda_1$  时,由式(7)中的 1 式可得到式(9):

$$\lim_{|\mathbf{W}| \rightarrow \lambda_1} \text{sgn}(\mathbf{W}) \cdot \left( |\mathbf{W}| - \lambda_1 + \frac{\sqrt{2}r}{2} - \sqrt{r^2 - \left[ (1-\alpha)\lambda_1 + \frac{\sqrt{2}r}{2} \right]^2} \right) =$$

## 1.3 去噪性能的评价

设图像  $f(x, y)$  的大小为  $M \times N$ , 去噪后的图像记为  $\tilde{f}(x, y)$ 。比较常用的图像客观质量评价标准主要有:

最小均方误差 (Mean Square Error, MSE) 定义为:

$$\text{MSE} = \frac{1}{M \times N} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} (f(x, y) - \tilde{f}(x, y))^2 \quad (4)$$

峰值信噪比 (Peak Signal to Noise Ratio, PSNR) 定义为:

$$\text{PSNR} = 10 \times \log_{10} \left( \frac{255^2}{\text{MSE}} \right) \quad (5)$$

均方根误差 (Root-Mean-Square Error, RMSE) 定义为:

$$\text{RMSE} = \sqrt{\text{MSE}} \quad (6)$$

## 2 改进的阈值函数

尽管软、硬阈值函数有一定的去噪效果,但是它们存在各自的缺点。硬阈值函数在阈值处不连续,因此处理后图像会出现振铃、伪吉布斯效应等视觉失真现象;而软阈值函数相对平滑得多,但是滤除噪声的同时也使得估计系数的误差增大,因而造成重构图像的边缘模糊<sup>[13]</sup>。文中构造出一种新的双阈值函数,有效地弥补了软、硬阈值方法的不足。新的阈值函数采用双阈值  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$ 。将分解的小波系数记为  $\mathbf{W}$ , 对于  $\lambda_2 \leq |\mathbf{W}| \leq \lambda_1$  时的处理,引入一个控制变量  $r$ ,通过构造半径为  $r$  的圆弧的方式使得小波系数的缩减幅度逐渐增大,直到为 0。记估计出的小波系数为  $\tilde{\mathbf{W}}$ ,新的阈值函数如下所示:

$$\text{sgn}(\mathbf{W}) \left( \frac{\sqrt{2}r}{2} - \sqrt{r^2 - \left[ (1-\alpha)\lambda_1 + \frac{\sqrt{2}r}{2} \right]^2} \right) \quad (9)$$

当  $|\mathbf{W}| \rightarrow \lambda_1$  时,由式(7)中的 2 式可得到式(10):

$$\lim_{|\mathbf{W}| \rightarrow \lambda_1} \text{sgn}(\mathbf{W}) \cdot \left( \sqrt{r^2 - \left( |\mathbf{W}| - \lambda_1 - \frac{\sqrt{2}r}{2} \right)^2} - \sqrt{r^2 - \left[ (1-\alpha)\lambda_1 + \frac{\sqrt{2}r}{2} \right]^2} \right) =$$

$$\text{sgn}(\mathbf{W}) \left( \frac{\sqrt{2}r}{2} - \sqrt{r^2 - \left[ (1-\alpha)\lambda_1 + \frac{\sqrt{2}r}{2} \right]^2} \right) \quad (10)$$

当  $|\mathbf{W}| \rightarrow \lambda_2$  时,由式(7)中的 2 式可得到式(11):

$$\lim_{|W| \rightarrow \lambda_2} \operatorname{sgn}(\mathbf{W}) \cdot \left( \sqrt{r^2 - \left( |\mathbf{W}| - \lambda_1 - \frac{\sqrt{2}r}{2} \right)^2} - \sqrt{r^2 - \left[ (1 - \alpha)\lambda_1 + \frac{\sqrt{2}r}{2} \right]^2} \right) = 0 \tag{11}$$

由式(9)和式(10)可知  $\tilde{\mathbf{W}}$  在  $\pm\lambda_1$  处是连续的;由式(11)可知  $\tilde{\mathbf{W}}$  在  $\pm\lambda_2$  处也是连续的;因此,该阈值函数在 4 个阈值点处( $\pm\lambda_1, \pm\lambda_2$ )都是连续的。

误差分析:

分析式(7)中 1 式可知,在  $\alpha$  一定的情况下,随着  $r$  的增大,函数的值会减小,因此:

当  $0 < \alpha \leq 2 - \sqrt{2}$  时,将  $\alpha$  对应的  $r$  的最小值带入式(7)中 1 式:

$$\operatorname{sgn}(\mathbf{W}) \cdot \left( |\mathbf{W}| - \lambda_1 + \frac{\sqrt{2}r}{2} - \sqrt{r^2 - \left[ (1 - \alpha)\lambda_1 + \frac{\sqrt{2}r}{2} \right]^2} \right) = \mathbf{W} \tag{12}$$

当  $2 - \sqrt{2} < \alpha < 1$  时,将  $\alpha$  对应的  $r$  的最小值带入式(7)中 1 式:

$$\operatorname{sgn}(\mathbf{W}) \cdot \left( |\mathbf{W}| - \lambda_1 + \frac{\sqrt{2}r}{2} - \sqrt{r^2 - \left[ (1 - \alpha)\lambda_1 + \frac{\sqrt{2}r}{2} \right]^2} \right) = \operatorname{sgn}(\mathbf{W}) (|\mathbf{W}| - \lambda_1 + (\sqrt{2} + 1)(1 - \alpha)\lambda_1) < |\mathbf{W}| \tag{13}$$

当  $\alpha = 1$  时,则式(7)中 1 式为:

$$\operatorname{sgn}(\mathbf{W}) \cdot \left( |\mathbf{W}| - \lambda_1 + \frac{\sqrt{2}r}{2} - \sqrt{r^2 - \left[ (1 - \alpha)\lambda_1 + \frac{\sqrt{2}r}{2} \right]^2} \right) = \operatorname{sgn}(\mathbf{W}) (|\mathbf{W}| - \lambda_1) \tag{14}$$

可以看出,式(12)与式(14)分别和硬阈值函数、软阈值函数相同。

通过以上分析,改进的阈值函数对系数的处理是介于硬阈值和软阈值函数之间,一方面很好地克服了硬阈值函数不连续的问题;另一方面克服了软阈值函数处理后估计系数与图像系数之间误差大的问题。另外,控制变量  $\alpha$  和  $r$  的引入可以让阈值函数的取值更灵活,提高了对不同图片的适应性。

取  $\alpha = 0.4, r = 1.6$  时改进的阈值函数与软、硬阈值函数的模型对比如图 1 所示。

3 仿真实验

为了说明改进的阈值函数的有效性和优越性,进行了大量仿真实验。实验是基于 Matlab R2012b 平台

进行编程实现,文中选用 512×512 大小的 Lena 灰度图像,加入方差为 0.01 的高斯噪声进行测试。经大量测试,选用去噪效果较好的小波基 *coif4*<sup>[14]</sup>,小波分解层数为 3 层,阈值由式(1)求出。对于文中改进的阈值函数,取  $\alpha = 0.4, r = 1.6$  进行实验。实验结果见图 2。

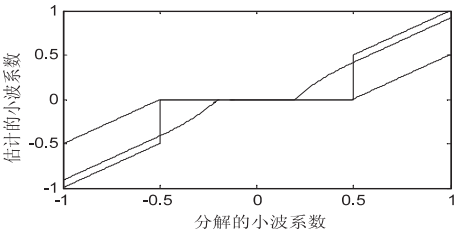


图 1 改进的阈值函数与软、硬阈值函数对比图形



图 2 不同方法处理后的结果图

从图像上看,文中改进的方法取得了不错的去噪效果,图像显得更平滑而且边缘信息保留较好。为了进一步说明文中改进的阈值函数去噪效果优于其他方法,通过计算去噪后图像的峰值信噪比(PSNR)和均方根误差(RMSE)来进行客观评价。

表 1 给出了 4 种不同方法处理后的 PSNR 和 RMSE 的比较。

表 1 不同方法处理后的 PSNR 和 RMSE 对比

去噪方法	PSNR/dB	RMSE
硬阈值方法	27.373 0	119.062 9
软阈值方法	26.260 3	153.833 6
文献[6]方法	27.400 9	118.302 2
文中方法	28.409 2	93.791 8

从数据上可以看出,文中阈值函数处理后 PSNR 值最高且 RMSE 值最低。因此,文中方法优于传统的软、硬阈值函数以及文献[6]中提出的阈值函数。

(下转第 106 页)

## 参考文献:

- [1] Tang Chen, Han Lin, Ren Hongwei, et al. Second-order oriented partial-differential equations for denoising in electronic-speckle-pattern interferometry fringes[J]. Optics Letters, 2008, 33(19): 2197-2181.
- [2] Jin Zhengmeng, Yang Xiaoping. Analysis of a new variational model for multiplicative noise removal[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2010, 362(2): 415-426.
- [3] Rudin L I, Osher S, Fatemi E. Nonlinear total variation based noise removal algorithms[J]. Physica D, 1992, 60: 259-268.
- [4] Rudin L I, Lions P L, Osher S. Multiplicative denoising and deblurring: theory and algorithms[M]//Geometric level set methods in imaging, vision, and graphics. [s. l.]: [s. n.], 2003: 103-119.
- [5] Aubert G, Aujol J F. A variational approach to removing multiplicative noise[J]. SIAM Journal on Applied Mathematics, 2008, 68(4): 925-946.
- [6] Huang Y M, Ng M K, Wen Y W. A new total variation method for multiplicative noise removal[J]. SIAM Journal on Imaging Sciences, 2009, 2(1): 20-40.
- [7] Le T, Chartrand R, Asaki T J. A variational approach to reconstructing images corrupted by Poisson noise[J]. Journal of Mathematical Imaging and Vision, 2007, 27(3): 257-263.
- [8] Dong Gang, Guo Zhichang, Wu Boying. A convex adaptive total variation model based on the gray level indicator for multiplicative noise removal[J]. Abstract and Applied Analysis, 2013, 2013: 912373.
- [9] Landi G, Piccolomini E L. An efficient method for nonnegatively constrained total variation-based denoising of medical images corrupted by Poisson noise[J]. Computerized Medical Imaging and Graphics, 2012, 36(1): 38-46.
- [10] Huang Y M, Ng M K, Wen Y W. A fast total variation minimization method for image restoration[J]. Multiscale Modeling & Simulation, 2008, 7(2): 774-795.
- [11] Lü Xiaoguang, Le Jiang, Huang Jin, et al. A fast high-order total variation minimization method for multiplicative noise removal[J]. Mathematical Problems in Engineering, 2013, 2013: 834035.
- [12] You Yuli, Kaveh M. Fourth-order partial differential equations for noise removal[J]. IEEE Trans on Image Processing, 2000, 9(10): 1723-1730.
- [13] Hardt R, Zhou X. An evolution problem for linear growth functional[J]. Communications in Partial Differential Equations, 1994, 19(11-12): 1879-1907.
- [14] Giusti E. Minimal surfaces and functions of bounded variation[M]. [s. l.]: Birkhauser, 1994.
- [15] Abramowitz M, Irene A. Handbook of mathematical functions[M]. New York, NY, USA: Dover, 1972.
- [16] Shi Jianing, Osher S. A nonlinear inverse scale space method for a convex multiplicative noise model[J]. SIAM Journal on Imaging Sciences, 2008, 1(3): 294-321.

+++++  
(上接第 102 页)

## 4 结束语

针对软、硬阈值函数的缺点,文中提出一种新的阈值函数,该函数最大的优越性是连续且减小了估计系数的误差。与传统方法相比,新阈值函数无论在视觉上还是通过客观评价标准 PSNR 和 RMSE 来评判都是有所提升的,且改进的阈值函数可以针对不同的图像择优选择控制变量  $\alpha$  和  $r$  的值,从而提升去噪效果。

小波阈值去噪法的重点和难点仍然是阈值的选取和阈值函数的构造,而且没有哪一种方法对所有图片去噪效果都是最佳的。因此,小波阈值去噪法还有很大的发展空间,阈值的选取和阈值函数的构造也是今后研究的重点内容。

## 参考文献:

- [1] 谢杰成,张大力,徐文立. 小波图象去噪综述[J]. 中国图象图形学报, 2002, 7(3): 209-217.
- [2] Donoho D L, Johnstone I M. Ideal spatial adaptation via wavelet shrinkage[J]. Biometrika, 1994, 81(12): 425-455.
- [3] Donoho D L, Johnstone I M. De-noising by soft thresholding[J]. IEEE Trans on IT, 1995, 41(3): 613-627.
- [4] Donoho D L, Johnstone I M. Adapting to unknown smoothness via wavelet shrinkage[J]. Journal of American Statistical Association, 1995, 90(432): 1200-1224.
- [5] Gao Hongye, Bruce A G. Waveshrink with firm shrinkage[J]. Statistica Sinica, 1997, 7(4): 855-874.
- [6] 任重,刘莹,刘国栋,等. 改进的小波双阈值双因子函数去噪[J]. 计算机应用, 2013, 33(9): 2595-2598.
- [7] 刘卫东,刘尚合,胡小锋,等. 小波阈值去噪函数的改进方法分析[J]. 高电压技术, 2007, 33(10): 59-63.
- [8] 田沛,李庆周,马平,等. 一种基于小波变换的图像去噪新方法[J]. 中国图像图形学报, 2008, 13(3): 394-399.
- [9] 曲天书,戴逸松,王树勋. 基于 SURE 无偏估计的自适应小波阈值去噪[J]. 电子学报, 2002, 30(2): 266-268.
- [10] 张维强,宋国乡. 基于一种新的阈值函数的小波域信号去噪[J]. 西安电子科技大学学报, 2004, 31(2): 296-299.
- [11] 付炜,许山川. 一种改进的小波域阈值去噪算法[J]. 传感技术学报, 2006, 19(2): 534-536.
- [12] 蔡德尊. 基于小波变换的图像去噪算法研究[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2011.
- [13] 倪林. 小波变换与图像处理[M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2010.
- [14] 郑钧,侯锐锋. 小波去噪中小波基的选择[J]. 沈阳大学学报, 2009, 21(2): 108-110.

# 基于一种新的阈值函数的小波图像去噪

作者:

李智, 张根耀, 王蓓, [LI Zhi](#), [ZHANG Gen-yao](#), [WANG Bei](#)

作者单位:

[延安大学 计算机学院, 陕西 延安, 716000](#)

刊名:

[计算机技术与发展](#) 

英文刊名:

[Computer Technology and Development](#)

年, 卷(期):

2014(11)

本文链接: [http://d.wanfangdata.com.cn/Periodical\\_wjfz201411025.aspx](http://d.wanfangdata.com.cn/Periodical_wjfz201411025.aspx)