

# 网络最大流问题的改进算法

赵礼峰, 陶晓莉

(南京邮电大学 理学院, 江苏 南京 210023)

**摘要:**网络最大流问题是图论中的经典问题之一,对于最大流问题有很多经典的算法,但这些经典算法皆有不足之处。针对其不足,文中通过引入容量差的概念,对算法进行了一些改进。改进算法的原则是优先选择路径最短且容量差最大的路径进行增广,若当路径长度一样并且容量差也一样时就要对其修正,然后选择修正后的路径,这样每次增广至少使一条弧达到饱和。通过实例说明了改进算法的可行性,整个运算过程可以在一个图上完成,直观性强并且方便计算,较传统算法更为有效。

**关键词:**最大流;容量差;增广链;最短路径

中图分类号:TP301.6

文献标识码:A

文章编号:1673-629X(2014)11-0054-03

doi:10.3969/j.issn.1673-629X.2014.11.014

## An Improved Algorithm for Solving Problem of Network Maximum Flow

ZHAO Li-feng, TAO Xiao-li

(College of Science, Nanjing University of Posts and Telecommunications, Nanjing 210023, China)

**Abstract:** The maximum network flow problem is one of the classical problems in graph theory, there are many classical algorithms for them, but all theories have shortcomings. For the shortcomings, the algorithm is improved by introducing the concept of differential capacity. The principle of improved algorithm is that the shortest path and maximum differential capacity is priority selection. When the length of path and differential capacity are the same, can choose the revised path, so that each augmentation can make an arc reach saturation at least. An practical example is given to demonstrate the feasibility, all of the procedure can be completed in one diagram, the intuition is strong and easy to calculate, the new algorithm is more effective than the traditional algorithm.

**Key words:** maximum flow; differential capacity; augmenting path; shortest path

## 0 引言

网络最大流问题已经有 50 多年的研究历史,在这 50 多年里,人们建立了较为完善的理论,同时开发了大量的算法<sup>[1-4]</sup>。经典的最大流算法有, Ford-Fulkerson 算法, Dinic (1970), Edmonds 和 Karp (1972) 独立提出的最短增广链算法<sup>[5]</sup>, 预流推进算法<sup>[5]</sup>, Dinic 算法<sup>[6]</sup>, 这些经典的算法都有其自身的缺陷。近年来很多学者对这些算法进行了改进,比如,引入极大一致链的“消链”法<sup>[7]</sup>,对顶点容差进行判定的容差修正网络最大流 2F 算法<sup>[8]</sup>和对顶点容差进行改进的新算法<sup>[9]</sup>,改进的 Ford-Fulkerson 算法<sup>[10]</sup>,新的标号法<sup>[11]</sup>等。

文中通过引入容量差概念,依据网络流的基本定理,提出一种计算网络最大流的新算法。

## 1 理论基础

### 1.1 基本概念

定义 1: 有向网络  $D = (V, A, C)$ , 顶点集用  $V$  表示, 有向边集用  $A$  表示, 弧上的容量用  $C$  表示。

定义 2: 容量差。在路径  $P$  上, 弧的最大容量与最小容量的差值称为容量差, 记作  $\tilde{c}$ , 即  $\forall (v_i, v_j) \in P, \tilde{c} = c_{\max} - c_{\min}$ 。

定义 3: 流量。设  $f$  是容量网络  $D$  的弧集  $A$  上的一个实函数,  $\forall a = (v_i, v_j) \in A$ , 如果函数  $f = \{f_{ij} \mid (v_i, v_j) \in A\}$  满足守恒条件:

$$\sum_{v_j \in N^+(v_i)} f_{ij} - \sum_{v_j \in N^-(v_i)} f_{ji} = 0, \forall v_i \in V \setminus \{v_s, v_t\}$$

则称  $f$  是  $D$  上的一个  $f(a) = f_{ij}$  流, 此时  $f_{ij}$  称为  $f$  通

收稿日期: 2013-10-16

修回日期: 2014-02-25

网络出版时间: 2014-05-21

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (GZ210039)

作者简介: 赵礼峰 (1959-), 男, 安徽淮北人, 教授, 研究方向为图论及其在通信中的应用; 陶晓莉 (1988-), 女, 安徽合肥人, 硕士研究生, 通信作者, 研究方向为图论及其在通信中的应用。

网络出版地址: <http://www.cnki.net/kcms/detail/61.1450.TP.20140524.2150.028.html>

过弧  $(v_i, v_j)$  上的流量。

定义 4:弧集。给定一个带发点  $v_s$  和收点  $v_t$  的容量网络  $D = (V, A, C)$  及  $D$  上的可行流  $f$  后,定义

$A^+(f) = \{(v_i, v_j) \mid (v_i, v_j) \in A, f_{ij} < c_{ij}\}$

$A^-(f) = \{(v_i, v_j) \mid (v_i, v_j) \in A, f_{ji} > 0\}$

定义 5: 剩余容量。令

$$c_{ij}(f) = \begin{cases} c_{ij} - f_{ij}, & (v_i, v_j) \in A^+(f) \\ f_{ji}, & (v_i, v_j) \in A^-(f) \end{cases}$$

称  $c_{ij}(f)$  为弧  $(v_i, v_j)$  关于  $f$  的剩余容量。

定义 6:容量和。路径  $P$  上所有弧容量的总和即为容量和,记作  $\sum_{(v_i, v_j) \in P} c_{ij}$ 。

1.2 基本定理

定理 1:设  $f$  是容量网络  $D$  中可行流,则  $f$  是  $D$  的最大流当且仅当  $D$  中不存在  $f$  增广链。

2 新算法思想及步骤

2.1 算法思想

文中提出的算法是基于网络流的基本定理 1 给出的,算法思想为找到从发点到收点的路径,优先选择路径最短且容量差最大的路径进行增广,当容量差相同时就进行修正,当某些弧达到饱和时则画上终止符“||”。修正的原则是优先选择路径上剩余弧的容量和最大的路径进行增广,而当剩余弧的容量和也相同时就优先选择弧的容量和最大的路径,对其进行增广。

2.2 算法步骤

Step0: 初始化有向网络并使初始的可行流  $f$  为 0。

Step1: 从起点  $v_s$  出发,判断是否存在一条到终点  $v_t$  的增广链,如若存在则转 Step2,否则就转 Step3。

Step2: 寻找一条从  $v_s$  到  $v_t$  的最短增广链  $P$  (即路径经过的弧数最少),若增广链的长度相同时优先选择容量差最大的那条链;若容量差也相同时则根据修正原则选择路径。可增广的流量是:  $\sigma = \min_{(v_i, v_j) \in P} \{c_{ij}\}$ 。这样就可确保每次增广至少使一条弧达到饱和,并在饱和弧上标上终止符号:“||”。如此再转 Step1。

Step3: 当前不存在  $(v_s, v_t)$  路,即不存在从  $v_s$  到  $v_t$  的增广链时终止,求得网络的最大流:  $f_{\max} = \sum \sigma$ 。

3 算 例

求图 1 中从  $v_s$  到  $v_t$  的网络最大流。

(1) 根据新算法步骤,首先找出从  $v_s$  到  $v_t$  的最短路径,有:  $v_s v_1 v_5 v_{10} v_t, v_s v_2 v_5 v_{10} v_t, v_s v_2 v_6 v_{10} v_t$  三条路径。第一条的容量差是  $10-6=4$ ;第二条的容量差是  $10-6=4$ ;第三条的容量差是  $10-7=3$ 。那么根据修正原则选择容量和最大的第二条路径进行增广,增广的值  $\sigma$

$= \min_{(v_i, v_j) \in P} \{c_{ij}\} = 6$ , 增广后的图如图 2 所示。

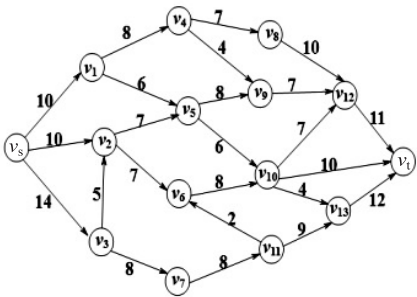


图 1 原始图

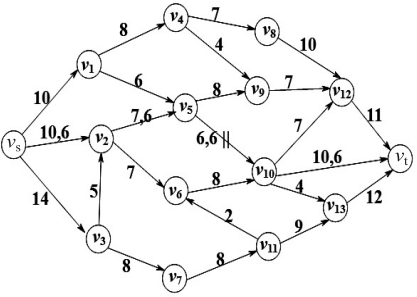


图 2 沿  $v_s v_2 v_5 v_{10} v_t$  增广后的图形

(2) 再按新算法步骤找路径最短且容量差最大的路径,有:  $v_s v_1 v_5 v_{10} v_t$  和  $v_s v_2 v_6 v_{10} v_t$ , 但是前者已经有一条弧达到饱和,所以选择  $v_s v_2 v_6 v_{10} v_t, \sigma_2 = 4$ , 增广后的图如图 3 所示。

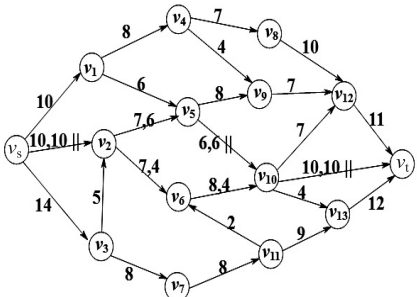


图 3 沿  $v_s v_2 v_6 v_{10} v_t$  增广后的图形

(3) 再按算法步骤找到的路径和容量差依次为:  $v_s v_1 v_4 v_9 v_{12} v_t, \sigma_3 = 4; v_s v_3 v_7 v_{11} v_{13} v_t, \sigma_4 = 8$ 。增广后的图如图 4 所示。

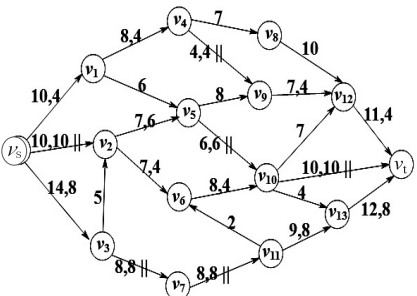


图 4 沿  $v_s v_1 v_4 v_9 v_{12} v_t$  和  $v_s v_3 v_7 v_{11} v_{13} v_t$  增广后的图形

(4) 按新算法步骤找到的路径为:  $v_s v_1 v_5 v_{10} v_t, \sigma_5$

$= 3, v_s v_1 v_4 v_8 v_{12} v_t, \sigma_6 = 3$ , 增广后的图形如图 5 所示。

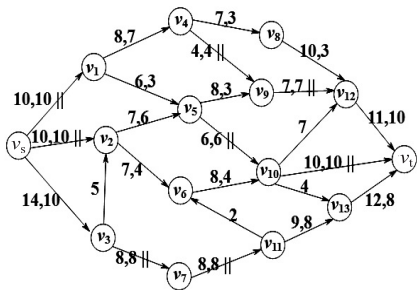


图 5 沿  $v_s v_1 v_5 v_9 v_{12} v_t$  和  $v_s v_1 v_4 v_8 v_{12} v_t$  增广后的图形

(5) 再按算法步骤继续找到所要求的路径:

$v_s v_3 v_2 v_6 v_{10} v_{13} v_t, \sigma_7 = 3$ , 增广后的图如图 6 所示。

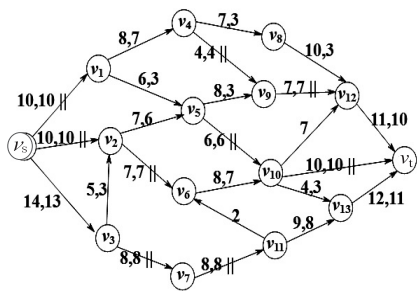


图 6 沿  $v_s v_3 v_2 v_6 v_{10} v_{13} v_t$  增广后的图形

此时发现从源点  $v_s$  到汇点  $v_t$  已经不存在可行路

径,即无增广链了,所以从  $v_s$  到  $v_t$  的最大流  $f = \sum_{i=1}^7 \sigma_i = 31$ 。

## 4 结束语

网络最大流问题的研究和应用对于当今社会是一项非常有意义的工作。文中通过对最大流问题的基本概念扩充,引入容量差的概念,提出了一种求解网络

最大流的新算法—容量差算法,给出了算法思想和详细的步骤。该算法在选择路径时优先选择路径最短且容量差最大的路径,当容量差相同时,就根据修正原则选择路径。这种算法避免了重复计算,把网络简单化,加快了整个算法的执行速度,所有的步骤均可在一个图上完成,直观性强。最后通过具体的算例验证了算法的效率和实用性。

## 参考文献:

- [1] Zhang Xianchao, Chen Guoliang, Wan Yingyu. Research on the maximum network flow problem[J]. Journal of Computer Research and Development, 2003, 40(9): 1281-1292.
- [2] Martens M, Skutella M. Flow on few paths: algorithm and lower bounds[J]. Network, 2006, 48(2): 68-76.
- [3] 徐翠霞. 基于层次网络的最大流求解方法[J]. 潍坊学院学报, 2010, 10(4): 42-45.
- [4] 库向阳. 基于栈的网络最大流算法[J]. 计算机工程与应用, 2009, 45(33): 13-15.
- [5] 谢 政. 网络算法与复杂性理论[M]. 长沙: 国防科技大学出版社, 2003.
- [6] 王桂平, 王 衍, 任嘉辰. 图论算法理论、实现及应用[M]. 北京: 北京大学出版社, 2011.
- [7] 王志强, 孙小军. 网络最大流的新算法[J]. 计算机工程与设计, 2009, 30(10): 2357-2359.
- [8] 陈 静, 单 锐. 容差修正网络最大流 2F 算法[J]. 长春工业大学学报(自然科学版), 2008, 29(6): 713-716.
- [9] 赵礼峰, 陈 华, 宋常城, 等. 基于一个网络图最大流算法的改进[J]. 计算机技术与发展, 2010, 20(12): 162-165.
- [10] 王建军. 改进的 Ford-Fulkerson 算法[J]. 绵阳师范学院学报, 2008, 27(2): 84-88.
- [11] 赵礼峰, 白 睿, 宋常城. 求解网络最大流问题的标号算法[J]. 计算机技术与发展, 2011, 21(12): 113-115.

(上接第 53 页)


splitz-matrix-based CG-FFT algorithm with an inexact sparse preconditioner for analysis of microstrip circuits[J]. Microwave and Optical Technology Letters, 2002, 34(5): 347-351.

- [7] Mautz J R, Harrington R F. Radiation and scattering from bodies of revolution[J]. Appl Sci Res, 1969, 20(1): 405-434.
- [8] Mautz J R, Harrington R F. Computer programs for H-Field, E-Field, and Combined-Field solutions for conducting bodies of revolution[R]. Syracuse: Syracuse University, 1977.
- [9] Mautz J R, Harrington R F. A combined-source solution for radiation and scattering from a perfectly conducting bodies[J]. IEEE Trans on Antennas and Propagation, 1979, 27(4): 445-454.
- [10] Mautz J R, Harrington R F. An H-field solution for electro-

magnetic scattering by a conducting bodies of revolution[J]. International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering, 1982, 1(3): 137-163.

- [11] Mautz J R, Harrington R F. Improved E-field for conducting bodies of revolution[R]. Syracuse: Syracuse University, 1980.
- [12] 包 伟. 旋转对称体的电磁散射研究[D]. 南京: 南京理工大学, 2007.
- [13] Chen M S, Wu X L, Huang Z X, et al. Chebyshev approximation for fast frequency-sweep analysis of electromagnetic scattering problems[J]. Chinese Journal of Electronics, 2006, 15(4): 736-738.
- [14] 杨 梅, 陈明生, 吴先良, 等. 基于最佳一致逼近的高阶矩量法及其应用[J]. 合肥工业大学学报(自然科学版), 2010, 33(4): 593-596.

# 网络最大流问题的改进算法

作者: [赵礼峰](#), [陶晓莉](#), [ZHAO Li-feng](#), [TAO Xiao-li](#)  
作者单位: [南京邮电大学 理学院, 江苏 南京, 210023](#)  
刊名: [计算机技术与发展](#)   
英文刊名: [Computer Technology and Development](#)  
年, 卷(期): 2014(11)

引用本文格式: [赵礼峰](#), [陶晓莉](#), [ZHAO Li-feng](#), [TAO Xiao-li](#) [网络最大流问题的改进算法](#)[期刊论文]-[计算机技术与发展](#) 2014(11)