

# 旋转对称矩量法高阶算法研究

朱治虹<sup>1</sup>, 陈明生<sup>2</sup>, 吴先良<sup>1,2</sup>, 杨梅<sup>1</sup>, 王时文<sup>1</sup>

(1. 安徽大学 电子信息工程学院, 安徽 合肥 230601;

2. 合肥师范学院 电子信息工程学院, 安徽 合肥 230601)

**摘要:** 直接应用三维矩量法求解旋转对称目标的电磁散射特性计算效率较低, 计算机内存耗费大, 利用其结构特点可降低获得一种更为有效的计算方式。然而对于电大目标, 这种改进依然是不够的。文中根据旋转对称目标矩量法 (BOR-MOM) 中电流的分解特征, 构建了一种基于切比雪夫近似的高阶基函数, 将电流的切向分量和方位角分量分别以该高阶基函数展开后应用矩量法求解。实验结果表明: 高阶 BOR-MOM 算法在低剖分下, 具有很高的计算精度, 计算效率和存储耗费得到了较大改善。

**关键词:** 矩量法; 旋转对称目标; 高阶基函数

**中图分类号:** TP301.6

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1673-629X(2014)11-0051-03

**doi:** 10.3969/j.issn.1673-629X.2014.11.013

## Research on High-order Method of Moments for Solving Bodies of Revolution

ZHU Zhi-hong<sup>1</sup>, CHEN Ming-sheng<sup>2</sup>, WU Xian-liang<sup>1,2</sup>, YANG Mei<sup>1</sup>, WANG Shi-wen<sup>1</sup>

(1. School of Electronics and Information Engineering, Anhui University,

Hefei 230601, China;

2. School of Electronics and Information Engineering, Hefei Normal University,

Hefei 230601, China)

**Abstract:** It is inefficient that the Method Of Moments (MOM) is applied to solve a three-dimensional (3-D) scattering problem of Bodies Of Revolution (BOR). A more efficient low dimensional way has been proposed based on the structural characteristics of BOR. However, this improvement is still not enough for analysis of electrically large objects. According to the decomposition property of the current on the surface of BOR, a high-order basis of function is constructed by the Chebyshev series, in which the current tangent and azimuth components are expanded into high-order basis functions. Experimental results show that the high-order BOR-MOM can get higher computational precision with lower discretization, it can greatly improve the computational efficiency and storage consumption.

**Key words:** method of moments; bodies of revolution; high-order basis of function

## 0 引言

矩量法 (Method Of Moments, MOM)<sup>[1]</sup> 是求解电磁散射问题的常用数值算法, 已被广泛用于很多电磁场工程领域。基本思路是将泛函方程通过基函数展开、检验函数测试后转化为矩阵方程进行求解, 该方法具有很高的计算精度。然而由于是一种全耦合方法, 其生成的阻抗矩阵为一稠密矩阵, 在分析电大目标时计算效率往往较低。近年来, 围绕改进矩量法而产生

的快速计算方法迅速发展, 其中具有代表性的有快速多极子技术 (FMM)<sup>[2-3]</sup>、自适应积分算法 (AIM)<sup>[4]</sup>、共轭梯度快速傅里叶变换法 (CG-FFT)<sup>[5-6]</sup> 以及小波稀疏变换方法。

旋转对称目标 (BOR)<sup>[7-12]</sup>, 亦称二维半目标, 指的是几何形状及本构关系参数分布具有旋转对称特性的目标, 很多实际目标如导弹、火箭等均可近似认为是二维半目标。如用传统三维矩量法来求旋转对称体的电磁散射问题, 随着目标尺寸的增加, 其计算效率是十

收稿日期: 2013-12-25

修回日期: 2014-03-28

网络出版时间: 2014-09-11

**基金项目:** 国家自然科学基金重点项目 (60931002); 国家自然科学基金资助项目 (61001033); 教育部科学技术研究重点项目 (212081); 安徽省学术技术带头人活动经费资助项目

**作者简介:** 朱治虹 (1989-), 女, 硕士研究生, 研究方向为电磁散射计算; 吴先良, 教授, 博士生导师, 研究方向为计算电磁学、微波器件设计。

**网络出版地址:** <http://www.cnki.net/kcms/detail/61.1450.TP.20140911.1005.036.html>

分低的。旋转对称目标矩量法则是利用其结构特点获得的一种降维计算方式,可有效提高计算效率,但在分析电大尺寸的旋转对称目标时,大尺度阻抗矩阵的填充和求解仍需要很长的时间。

为了解决这一问题,文中首先构建了一种基于切比雪夫近似的高阶基函数,同时将 BOR-MOM 中电流的切向分量和方位角分量分别以该高阶基函数展开后应用矩量法求解。最后应用所提方法分析了典型旋转对称目标的电磁散射特性,并将计算结果与传统 BOR-MOM 进行了比较。结果表明:高阶 BOR-MOM 能够在保持精度的前提下大幅减少未知量的数目,从而较大幅度地降低内存的存储量、提高计算精度。

## 1 旋转对称目标的积分方程及其矩量法解法

旋转对称体(BOR)是一种特殊的形体,其几何形状及本构关系参数分布具有旋转对称的性质,又可称为二维半物体。根据旋转对称体的旋转对称性,构建积分方程算法能够较大幅度地降低未知量的个数。

设在入射场  $\mathbf{H}^i$  激发下导体表面的感应电流为  $\mathbf{J}$ , 在目标表面可建立如下磁场积分方程:

$$\mathbf{J} - \mathbf{n} \times \mathbf{K}(\mathbf{J}) = \mathbf{n} \times \mathbf{H}^i \quad (1)$$

其中,  $\mathbf{K}(\mathbf{X}) = - \int \mathbf{X} \times \nabla G d\mathbf{S}'$ ,  $G$  为格林函数;  $\mathbf{n}$  为目标表面单位外法矢。

由于旋转对称性,可将电流  $\mathbf{J}$  按切向方向(即  $t$  方向)和方位角方向(即  $\varphi$  方向)通过傅里叶级数展开为带有  $e^{-jn\varphi_i}$  的叠加项。

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}^t + \mathbf{J}^\varphi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{j=1}^{N_t} \mathbf{I}_{nj}^t \mathbf{J}_{nj}^t + \sum_{j=1}^{N_\varphi} \mathbf{I}_{nj}^\varphi \mathbf{J}_{nj}^\varphi \right\} e^{-jn\varphi_i} \quad (2)$$

代入(1)式,应用矩量法离散后,可得矩阵方程:

$$\mathbf{Z}\mathbf{I} = \mathbf{V} \quad (3)$$

其中,  $\mathbf{Z}$  为阻抗矩阵;  $\mathbf{I}$  为导体的电流;  $\mathbf{V}$  为激励。

在传统 BOR-MOM 中,基函数一般选择三角基函数,按照伽略金法,权函数与基函数相同,只是  $e$  的指数相反,可得阻抗矩阵:

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}^{tt} & \mathbf{Z}^{t\varphi} \\ \mathbf{Z}^{\varphi t} & \mathbf{Z}^{\varphi\varphi} \end{bmatrix} \quad (4)$$

其中,阻抗矩阵元素:

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_{ij}^{tt} &= \frac{1}{2} \int_{t_i} \int_0^{2\pi} T(t) \frac{T(t')}{\rho} e^{j(n\varphi - m\varphi')} d\varphi dt + \\ &\frac{1}{4\pi} \int_{t_i} \int_{t_j} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} T(t) T(t') e^{j(n\varphi - m\varphi')} \{ [(\rho' - \rho) \cos\gamma' - (z' - z) \sin\gamma'] \cos(\varphi' - \varphi) - \\ &2\rho \cos\gamma' \sin^2(\frac{\varphi' - \varphi}{2}) \} (1 + \end{aligned}$$

$$jkr) \frac{e^{-jkr}}{r^3} d\varphi d\varphi' dt dt' \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_{ij}^{t\varphi} &= \frac{1}{4\pi} \int_{t_i} \int_{t_j} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} T(t) T(t') e^{j(n\varphi - m\varphi')} (z' - z) \sin(\varphi' - \varphi) (1 + jkr) \frac{e^{-jkr}}{r^3} d\varphi d\varphi' dt dt' \quad (6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_{ij}^{\varphi t} &= \frac{1}{4\pi} \int_{t_i} \int_{t_j} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} T(t) T(t') e^{j(n\varphi - m\varphi')} [\rho' \cos\gamma' \sin\gamma - \rho \cos\gamma \sin\gamma' - (z' - z) \sin\gamma \sin\gamma'] \sin(\varphi' - \varphi) (1 + jkr) \frac{e^{-jkr}}{r^3} d\varphi d\varphi' dt dt' \quad (7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_{ij}^{\varphi\varphi} &= \frac{1}{2} \int_{t_i} \int_0^{2\pi} T(t) \frac{T(t')}{\rho} e^{j(n\varphi - m\varphi')} d\varphi dt + \\ &\frac{1}{4\pi} \int_{t_i} \int_{t_j} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} T(t) T(t') e^{j(n\varphi - m\varphi')} \{ [(\rho' - \rho) \cos\gamma - (z' - z) \sin\gamma] \cos(\varphi' - \varphi) - \\ &2\rho' \cos\gamma' \sin^2(\frac{\varphi' - \varphi}{2}) \} (1 + jkr) \frac{e^{-jkr}}{r^3} d\varphi d\varphi' dt dt' \quad (8) \end{aligned}$$

## 2 高阶基函数算法

鉴于 BOR-MOM 中,旋转对称目标表面感应电流已分解成两个独立的方向进行求解,各分量的电流可以用标量基函数展开。为进一步提高计算效率,此处选择了一种基于切比雪夫多项式<sup>[13]</sup>的高阶基函数。切比雪夫多项式由俄国数学家切比雪夫提出,以递归方式定义的一系列正交多项式序列,又称为最佳一致逼近<sup>[14]</sup>。

分析目标的电磁散射特性时,需对未知电流  $\mathbf{J}$  用高阶基函数进行展开,并对导体散射目标的边界进行剖分。设边界共划分为  $N$  个小段,将第  $i$  个小段记为  $[l_i, l_{i+1}]$ 。  $f_q(x)$  ( $q = 0, 1, \dots, n$ ) 为  $q$  阶的切比雪夫多项式,则

$$\begin{aligned} f_0(x) &= 1 \\ f_1(x) &= x \end{aligned} \quad (9)$$

$$f_2(x) = 2x^2 - 1$$

其具有递推关系:

$$f_{q+1}(x) = 2xf_q(x) - f_{q-1}(x) \quad (1 \leq q \leq n-1) \quad (10)$$

将(9)式带入(10)式,即可推导出任意阶的切比雪夫多项式。

在计算旋转对称目标电磁散射问题时,由(2)式,未知电流  $\mathbf{J}$  展开为切向分量  $\mathbf{J}^t$  和方位角分量  $\mathbf{J}^\varphi$ 。分别对各分量电流按 3 阶切比雪夫基函数进行展开得:

$$\mathbf{J}^t = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^N [a_{nj}^t \frac{J_j}{\rho} e^{jn\varphi}] \quad (11)$$

$$\boldsymbol{J}^\varphi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^N \left[ a_{nj}^\varphi \frac{J_j}{\rho} e^{jn\varphi} \right] \quad (12)$$

其中

$$J_j = \begin{cases} a_j f_0(l) + b_j f_1(l) + c_j f_2(l) + d_j f_3(l) \\ 0 \end{cases}$$

$l \in [l_i, l_{i+1}]$

$l \notin [l_i, l_{i+1}]$

(13)

将式(11)~式(13)代入式(1),并由矩量法离散,选用点匹配法即可得阻抗矩阵 $\boldsymbol{Z}$ 进一步求逆运算后,可得电流 $\boldsymbol{J}$ 。

3 计算实例比较

用磁场积分方程计算散射体半径 $R=1\text{ m}$ 的理想导体圆球,在垂直入射下,入射平面波频率为 $300\text{ MHz}$ 的未知电流解,在普通基函数下,采样的整个剖分为 $400$ 个点;在高阶基函数下,采样的整个剖分为 $50$ 个点,通过编程得出的电流图如下:

(1)当 $\varphi=0$ 时,平面上只有切向方向的电流解,对比图如图 1 所示。

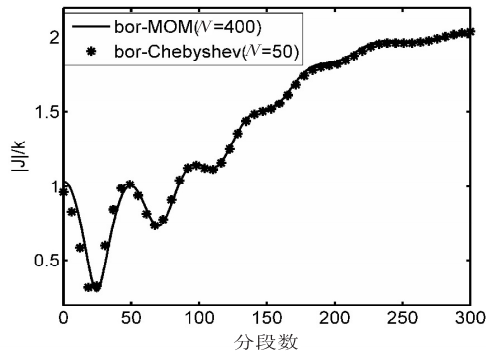


图 1 高阶与低阶 BOR 切向方向电流对比图

(2)当 $\varphi=\frac{\pi}{2}$ 时,平面上只有方位角方向的电流解,对比图如图 2 所示。

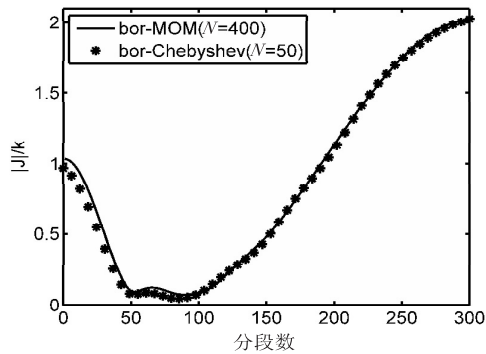


图 2 高阶与低阶 BOR 方位角方向电流对比图

由图 1 和图 2 可看出高阶矩量法在剖分点 $N=50$ 时的电流对低阶矩量法在剖分点 $N=400$ 时的电流有很高的近似。可知高阶矩量法在处理旋转对称体问题

的高效性,两种方法计算时间、存储量和计算量的比较分别如表 1 和表 2 所示。

表 1 计算时间的比较

算法	剖分点数	程序运行时间/s	
		$\varphi=0$	$\varphi=\frac{p_i}{2}$
传统矩量法	400	3 275.941	211.463
高阶矩量法	50	7.441	6.470

表 2 存储量和计算量的比较

算法	阻抗矩阵存储量/B	阻抗矩阵计算量
传统矩量法	$799 \times 799 \times 8$	$799 \times 799$
高阶矩量法	$100 \times 400 \times 8$	$100 \times 400$

由表 1,表 2 可看出,旋转对称目标高阶矩量法的运算时间、存储量和计算量要远小于低阶的传统矩量法,且高阶矩量法在低剖分点下的电流对传统的低阶矩量法在较高剖分点下的电流有很高的近似。

4 结束语

文中引入了一种基于切比雪夫基函数的高阶矩量算法,用于求解旋转对称体的电磁散射特性;用此高阶矩量算法来求旋转对称体的散射问题,并通过实例编程计算,与传统矩量法进行比较,该高阶矩量法在较低的剖分点下,对传统矩量法有较好的近似结果,验证了该算法的高效性。同样,该方法也适用于分析其他电大尺寸旋转对称目标的电磁散射特性。

参考文献:

[1] Harrington R F. Field computation by moment methods[M]. New York:IEEE Press,1993.

[2] Ding D Z,Chen R S,Rui P L,et al. A novel hierarchical two-level spectral preconditioning technique for multilevel fast multiple analysis of electromagnetic wave scattering[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2008, 56(4):1122-1132.

[3] Hu Jun,Nie Zaiping,Lei Lin,et al. Solving 3D electromagnetic scattering and radiation by local multilevel fast multiple algorithm[J]. Chinese Journal of Electronics,2007, 16(2): 366-369.

[4] Kim O S,Meincke P. Adaptive integral method for higher order method of moment[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation,2008, 56(8):2298-2305.

[5] Sarkar T,Arvas E,Rao S. Application of FFT and the conjugate gradient method for the solution of electromagnetic radiation from electrically large and small conducting bodies[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation,1986, 34(5):635-640.

[6] Chen R S,Yung E K N,Tsang K F,et al. The block-To-

$= 3, v_s v_1 v_4 v_8 v_{12} v_t, \sigma_6 = 3$ , 增广后的图形如图 5 所示。

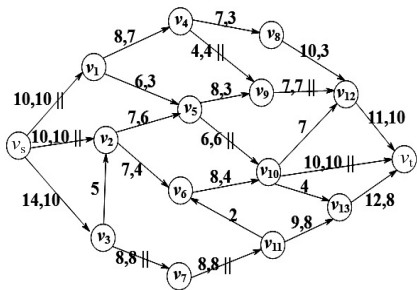


图 5 沿  $v_s v_1 v_5 v_9 v_{12} v_t$  和  $v_s v_1 v_4 v_8 v_{12} v_t$  增广后的图形

(5) 再按算法步骤继续找到所要求的路径:

$v_s v_3 v_2 v_6 v_{10} v_{13} v_t, \sigma_7 = 3$ , 增广后的图如图 6 所示。

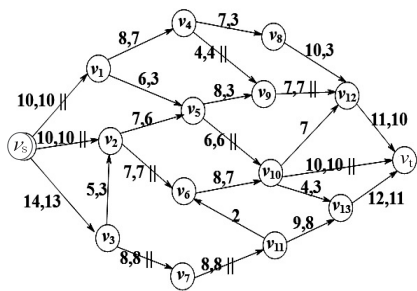


图 6 沿  $v_s v_3 v_2 v_6 v_{10} v_{13} v_t$  增广后的图形

此时发现从源点  $v_s$  到汇点  $v_t$  已经不存在可行路

径,即无增广链了,所以从  $v_s$  到  $v_t$  的最大流  $f = \sum_{i=1}^7 \sigma_i = 31$ 。

## 4 结束语

网络最大流问题的研究和应用对于当今社会是一项非常有意义的工作。文中通过对最大流问题的基本概念扩充,引入容量差的概念,提出了一种求解网络

最大流的新算法—容量差算法,给出了算法思想和详细的步骤。该算法在选择路径时优先选择路径最短且容量差最大的路径,当容量差相同时,就根据修正原则选择路径。这种算法避免了重复计算,把网络简单化,加快了整个算法的执行速度,所有的步骤均可在一个图上完成,直观性强。最后通过具体的算例验证了算法的效率和实用性。

## 参考文献:

- [1] Zhang Xianchao, Chen Guoliang, Wan Yingyu. Research on the maximum network flow problem[J]. Journal of Computer Research and Development, 2003, 40(9): 1281-1292.
- [2] Martens M, Skutella M. Flow on few paths: algorithm and lower bounds[J]. Network, 2006, 48(2): 68-76.
- [3] 徐翠霞. 基于层次网络的最大流求解方法[J]. 潍坊学院学报, 2010, 10(4): 42-45.
- [4] 库向阳. 基于栈的网络最大流算法[J]. 计算机工程与应用, 2009, 45(33): 13-15.
- [5] 谢 政. 网络算法与复杂性理论[M]. 长沙: 国防科技大学出版社, 2003.
- [6] 王桂平, 王 衍, 任嘉辰. 图论算法理论、实现及应用[M]. 北京: 北京大学出版社, 2011.
- [7] 王志强, 孙小军. 网络最大流的新算法[J]. 计算机工程与设计, 2009, 30(10): 2357-2359.
- [8] 陈 静, 单 锐. 容差修正网络最大流 2F 算法[J]. 长春工业大学学报(自然科学版), 2008, 29(6): 713-716.
- [9] 赵礼峰, 陈 华, 宋常城, 等. 基于一个网络图最大流算法的改进[J]. 计算机技术与发展, 2010, 20(12): 162-165.
- [10] 王建军. 改进的 Ford-Fulkerson 算法[J]. 绵阳师范学院学报, 2008, 27(2): 84-88.
- [11] 赵礼峰, 白 睿, 宋常城. 求解网络最大流问题的标号算法[J]. 计算机技术与发展, 2011, 21(12): 113-115.

(上接第 53 页)

- [6] eplitz-matrix-based CG-FFT algorithm with an inexact sparse preconditioner for analysis of microstrip circuits[J]. Microwave and Optical Technology Letters, 2002, 34(5): 347-351.
- [7] Mautz J R, Harrington R F. Radiation and scattering from bodies of revolution[J]. Appl Sci Res, 1969, 20(1): 405-434.
- [8] Mautz J R, Harrington R F. Computer programs for H-Field, E-Field, and Combined-Field solutions for conducting bodies of revolution[R]. Syracuse: Syracuse University, 1977.
- [9] Mautz J R, Harrington R F. A combined-source solution for radiation and scattering from a perfectly conducting bodies[J]. IEEE Trans on Antennas and Propagation, 1979, 27(4): 445-454.
- [10] Mautz J R, Harrington R F. An H-field solution for electro-

- magnetic scattering by a conducting bodies of revolution[J]. International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering, 1982, 1(3): 137-163.
- [11] Mautz J R, Harrington R F. Improved E-field for conducting bodies of revolution[R]. Syracuse: Syracuse University, 1980.
- [12] 包 伟. 旋转对称体的电磁散射研究[D]. 南京: 南京理工大学, 2007.
- [13] Chen M S, Wu X L, Huang Z X, et al. Chebyshev approximation for fast frequency-sweep analysis of electromagnetic scattering problems[J]. Chinese Journal of Electronics, 2006, 15(4): 736-738.
- [14] 杨 梅, 陈明生, 吴先良, 等. 基于最佳一致逼近的高阶矩量法及其应用[J]. 合肥工业大学学报(自然科学版), 2010, 33(4): 593-596.

作者：[朱治虹](#)，[陈明生](#)，[吴先良](#)，[杨梅](#)，[王时文](#)，[ZHU Zhi-hong](#)，[CHEN Ming-sheng](#)，[WU Xian-liang](#)，[YANG Mei](#)，[WANG Shi-wen](#)

作者单位：[朱治虹, 杨梅, 王时文, ZHU Zhi-hong, YANG Mei, WANG Shi-wen\(安徽大学 电子信息工程学院, 安徽 合肥, 230601\)](#)，[陈明生, CHEN Ming-sheng\(合肥师范学院 电子信息工程学院, 安徽 合肥, 230601\)](#)，[吴先良, WU Xian-liang\(安徽大学 电子信息工程学院, 安徽 合肥 230601; 合肥师范学院 电子信息工程学院, 安徽 合肥 230601\)](#)

刊名：[计算机技术与发展](#)

英文刊名：[Computer Technology and Development](#)

年，卷(期)：2014(11)

本文链接：[http://d.g.wanfangdata.com.cn/Periodical\\_wjtz201411013.aspx](http://d.g.wanfangdata.com.cn/Periodical_wjtz201411013.aspx)