

# 一类非线性网络系统中噪声改善信号的相关性

王友国, 郑克, 陆望

(南京邮电大学理学院, 江苏南京 210023)

**摘要:**基于相关系数研究了在一类非线性神经网络系统中加性和乘性噪声作用下的阈上随机共振现象。仅在加性噪声或者乘性噪声的作用下,对每一个固定的系统阈值,加性噪声下的阈上随机共振比乘性噪声下的阈上随机共振更容易发生,且相关系数所达到的峰值也比在乘性噪声下的峰值大,这说明加性噪声更有利于改善信号的相关性。系统阈值的增加会降低阈上随机共振的功效;而阈值单元数目的增多,会提高阈上随机共振的功效。加性和乘性噪声共同作用下的阈上随机共振现象同样存在,对系统阈值进行恰当选取和增加系统阈值单元数目使得阈上随机共振现象更加明显;给定乘性噪声而改变加性噪声比固定加性噪声而改变乘性噪声阈上随机共振更容易发生,且功效更好。

**关键词:**阈上随机共振;相关系数;噪声

**中图分类号:**TP31

**文献标识码:**A

**文章编号:**1673-629X(2014)05-0095-05

**doi:**10.3969/j.issn.1673-629X.2014.05.023

## Noise-improved Signal Correlation in a Nonlinear Network System

WANG You-guo, ZHENG Ke, LU Wang

(College of Science, Nanjing University of Posts and Telecommunications, Nanjing 210023, China)

**Abstract:** Based on correlation coefficient the Suprathreshold Stochastic Resonance (SSR) phenomenon under additive and multiplicative noise in a nonlinear neural network system is studied. When the system is only affected by one kind of noise, e. g. the additive noise or multiplicative noise, under different system threshold, additive noise is easier for SSR phenomenon to occur than multiplicative noise. For a fixed threshold, the additive noise is superior to multiplicative noise for signal transmission since the resonance peak value under the additive noise is larger than that under the multiplicative noise. The increase of network threshold cuts down the efficiency of SSR, while the increase of unit number plays a positive role in the emergence and effect of SSR. The composing noise mixed by additive noise and multiplicative noise can also arouse SSR in such a system. A reasonable threshold value and a larger unit number would lead to a more significant SSR. Fixing multiplicative noise and changing additive noise, the SSR phenomenon is more likely to happen and gets a better effect than under the contrary operation. It is an extension of noise benefits in signal processing.

**Key words:** suprathreshold stochastic resonance; correlation coefficient; noise

## 0 引言

噪声时常与有用信号共存,严重影响信号的检测、估计和传输,降低系统的性能。但在一些非线性系统中,加入噪声反而会改善系统的性能,这种现象被称为随机共振(Stochastic Resonance, SR)。

自从意大利物理学家 R. Benzi 等人<sup>[1-2]</sup>提出随机共振以来,人们对 SR 的研究给予了极大的关注<sup>[3-14]</sup>。最初研究随机共振,是在输入信号为周期信号时,通过双稳态系统内部噪声或外部加入的噪声来提高输出信

噪比并尽可能地增加信噪比增益。随后,许多学者在非周期信号的随机共振研究方面也取得了丰硕的成果<sup>[7-13]</sup>,随机共振不仅存在于双稳态系统,也存在于多稳态系统<sup>[8]</sup>、单稳态系统<sup>[9]</sup>、激发系统等系统中<sup>[10-11]</sup>,特别在物理和生物系统,包括神经元和神经元模型中,都大量观察到了 SR 现象<sup>[12-13]</sup>。

起初研究的 SR 往往发生在系统输入信号幅值小于系统阈值的情况(弱信号)。而在 2000 年,Stocks 等人研究神经网络模型时发现当信号幅值大于系统阈值

收稿日期:2013-07-03

修回日期:2013-10-16

网络出版时间:2014-02-11

基金项目:国家自然科学基金资助项目(61179027)

作者简介:王友国(1968-),男,江苏淮安人,教授,研究方向为信号与信息处理;郑克(1989-),男,河南南阳人,硕士研究生,研究方向为信息处理理论与应用。

网络出版地址: <http://www.cnki.net/kcms/detail/61.1450.TP.20140211.1448.006.html>

时,也可以观察到类似于随机共振的现象,这被称为阈上随机共振 (Supra-threshold Stochastic Resonance, SSR)<sup>[14]</sup>。人们研究阈上随机共振,往往考虑系统只受加性噪声或者乘性噪声的情形<sup>[15-18]</sup>。而在实际情况中,神经网络系统的每一个阈值单元时常会受到加性和乘性噪声的共同干扰。

文献[19]以互信息为测度考察了在加性和乘性噪声共同作用下一类非线性神经网络模型的阈上随机共振现象。文中基于相关系数,继续研究非线性神经网络模型中单独加性噪声或乘性噪声,以及加性噪声和乘性噪声共同作用下的阈上随机共振现象。

## 1 非线性神经网络模型

图1给出了一类非线性神经网络的模型<sup>[19]</sup>,该模型具有 $N$ 个阈值单元。

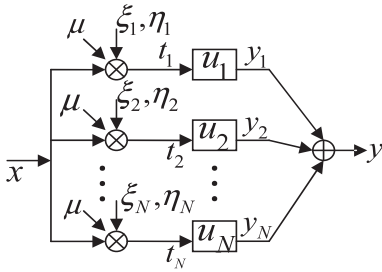


图1 非线性神经网络模型

上述模型中,系统输入信号 $x$ 服从高斯分布,概率密度函数为

$$p_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \quad (1)$$

$\mu$ 为输入信号 $x$ 在系统中的耦合强度, $\xi_i$ 是噪声强度为 $M$ 的高斯乘性噪声, $\eta_i$ 是噪声强度为 $A$ 的高斯加性噪声,它们相互独立,将 $\xi_i, \eta_i$ 归一化,则 $\xi_i', \eta_i'$ 服从标准高斯分布。

$$t_i = \mu x + M\xi_i' x + A\eta_i' \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2)$$

在 $M$ 趋向于0时,上述模型变为只含有加性噪声的情形<sup>[15-17]</sup>,在 $A$ 趋向于0时,模型变为只含有乘性噪声的情形<sup>[18]</sup>。

由公式(2)可知,给定输入信号 $x$ 时, $t_i$ 服从 $N(\mu x, M^2 x^2 + A^2)$ 的高斯分布,其条件概率密度函数为

$$P_{t_i|x}(t_i|x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(M^2 x^2 + A^2)}} \exp\left(-\frac{(t_i - \mu x)^2}{2(M^2 x^2 + A^2)}\right) \quad (3)$$

$u_i$ 为系统中阈值单元的阈值,同样设定它们大小相同,即 $u_1 = u_2 = \dots = u_N = U$ 。每个阈值单元的输出信号 $y_i$ 可由Heaviside函数表示

$$y_i = \begin{cases} 1 & t_i \geq u_i \\ 0 & t_i < u_i \end{cases} \quad (4)$$

因此,系统输出信号 $y$ 服从二项分布,当总量为 $n$ 时,它的概率为<sup>[19]</sup>

$$R_n = P\{y = n | x\} = P\left\{\sum_{i=1}^N y_i = n | x\right\} = C_N^n g_x^n (1 - g_x)^{N-n} \quad (5)$$

其中

$$C_N^n = \frac{N!}{n! (N - n)!} \quad (6)$$

$$g_x = P\{y_i = 1 | x\} = P\{t_i \geq U | x\} =$$

$$\int_U^\infty p_{t_i|x}(t_i|x) dt_i = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{U - \mu x}{\sqrt{2(M^2 x^2 + A^2)}}\right) \quad (7)$$

这里 $\operatorname{erf}(x)$ 为误差函数。

## 2 相关系数

相关系数 $\rho$ 可描述系统输出信号 $y$ 与输入信号 $x$ 之间的线性相关程度<sup>[20]</sup>。

$$\rho = \frac{E(xy) - E(x)E(y)}{\sqrt{\operatorname{Var}(x)} \sqrt{\operatorname{Var}(y)}} \quad (8)$$

其中, $E(\cdot)$ 是数学期望; $\operatorname{Var}(\cdot)$ 是方差。

当 $\rho = 0$ 时,输出信号 $y$ 与输入信号 $x$ 波形出入很大,它们几乎线性无关;当 $\rho = 1$ 时,输出信号 $y$ 与输入信号 $x$ 波形基本一致,它们几乎完全线性相关。由(1)知

$$E(x) = 0, \operatorname{Var}(x) = \sigma^2 = 1 \quad (9)$$

而

$$\begin{aligned} E(xy) &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^N x n p(x, y) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^N x n p_x(x) P\left(\sum_{i=1}^N y_i = n | x\right) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x p_x(x) \sum_{n=0}^N n R_n dx \end{aligned} \quad (10)$$

记 $S_n = P\{y = n\}$ ,则

$$\begin{aligned} S_n &= P\{y = n\} = P\left\{\sum_{i=1}^N y_i = n\right\} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} p_x(x) P\left\{\sum_{i=1}^N y_i = n | x\right\} dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} p_x(x) R_n dx \end{aligned} \quad (11)$$

$$\operatorname{Var}(y) = E(y^2) - E^2(y) =$$

$$\sum_{n=0}^N n^2 S_n - \left(\sum_{n=0}^N n S_n\right)^2 \quad (12)$$

将(9)~(12)式代入(8)式中,可得输出信号 $y$ 与输入信号 $x$ 间的相关系数为

$$\rho = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x p_x(x) \sum_{n=0}^N n R_n dx}{\sqrt{\sum_{n=0}^N n^2 S_n - \left(\sum_{n=0}^N n S_n\right)^2}} \quad (13)$$

3 噪声改善信号的相关性

3.1 加性噪声或者乘性噪声下的阈上随机共振现象

文中取 $\mu = 1$ ,图2和图3分别给出了相关系数 $\rho$ 作为 $M$ 或 $A$ 的函数在不同 $U$ 和 $N$ 下的变化曲线。图2(a)和图2(b)是在 $N = 8$ 下相关系数 $\rho$ 分别作为 $M$ 和 $A$ 的函数的变化曲线。

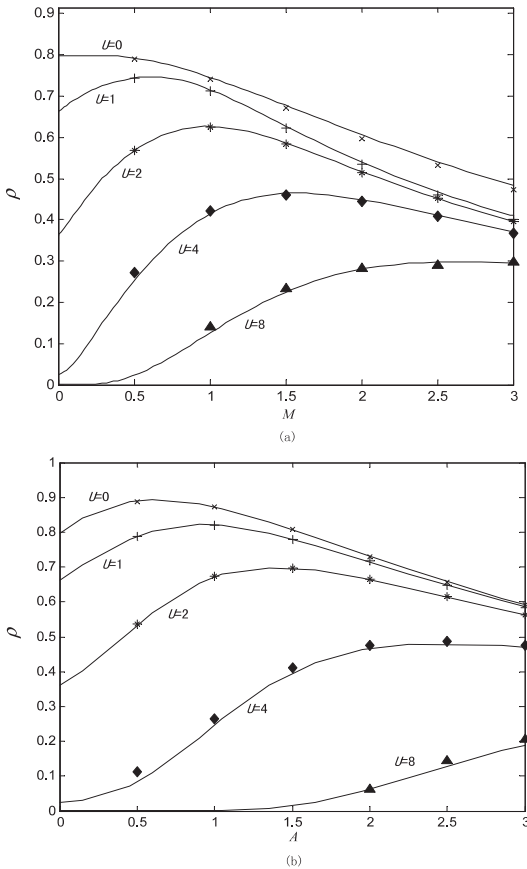


图2 相关系数 $\rho$ 作为 $M$ 或 $A$ 的函数在不同 $U$ 下的变化曲线

从图2(a)中可以看出,乘性噪声下, $U = 0$ 时,没有阈上随机共振现象发生,对其他系统阈值 $U$ ,相关系数 $\rho$ 随着噪声强度 $M$ 的增大先单调递增,达到一个最大值,然后单调递减,SSR现象存在,随着系统阈值 $U$ 的增大,曲线的峰值减小,阈上随机共振的功效降低。图2(b)显示,当噪声为加性噪声时,对于不同的系统阈值 $U$ ,SSR现象都发生了。

对比图2(a)和图2(b)发现,对每一个固定的系统阈值 $U$ ,单独加性噪声下比单独乘性噪声下SSR现象更容易发生,在加性噪声的作用下,相关系数所达到的峰值比在乘性噪声下的峰值大,因此,加性噪声更有利于改善信号的相关性;系统阈值的增大会降低阈上随机共振的功效。

图3(a)和图3(b)给出了相关系数 $\rho$ 分别作为 $M$ 和 $A$ 的函数在参数 $U = 0$ 和不同阈值单元数 $N$ 的变化曲线,图3(c)和图3(d)是相关系数 $\rho$ 分别作为 $M$ 和 $A$

的函数在参数 $U = 1$ 和不同阈值单元数 $N$ 的变化曲线。

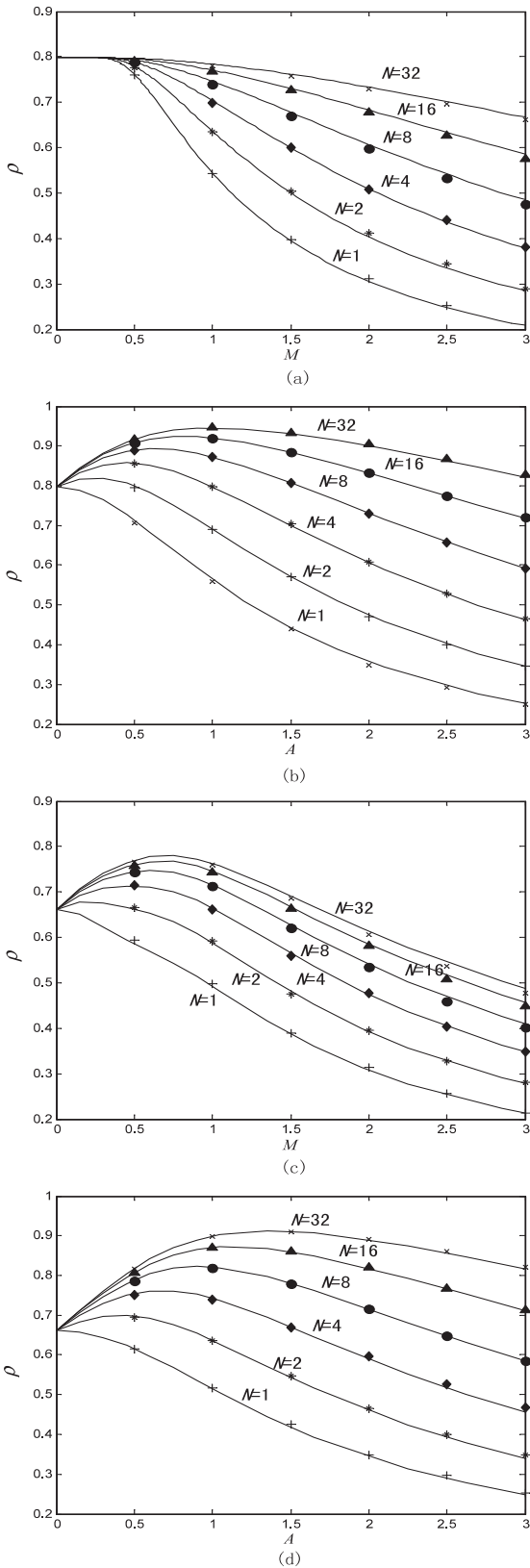


图3 相关系数 $\rho$ 分别作为 $M$ 和 $A$ 的函数在不同阈值单元数 $N$ 下的变化曲线

从图3(a)可以看出,单独乘性噪声作用下, $U = 0$ 时,无论 $N$ 取何值,SSR现象都没有发生。同在 $U = 0$

时,图3(b)显示,在加性噪声作用下, $N$ 取较大值时,SSR现象发生。图3(c)和图3(d)显示, $U=1$ 时,在乘性噪声 $M$ 或加性噪声 $A$ 的单独作用下, $N=1$ 时没有SSR现象发生,但当 $N>1$ 时,SSR现象都发生了,且随着阈值单元数 $N$ 的增大, $\rho$ 的峰值也增大。

对比图3(a)和图3(c)得到,要改善信号相关性,系统阈值的选择是非常重要的;对比图3(a)和图3(b)、图3(c)和图3(d)发现,在相同阈值的情况下,加性噪声作用下曲线的峰值比乘性噪声下的峰值大,加入加性噪声更有利于改善信号相关性。由图3(b)到图3(d)可知网络阈值单元数的增多,会对阈上随机共振的出现和功效起到积极的作用。

### 3.2 加性和乘性噪声共同作用下的阈上随机共振现象

图4和图5是在加性和乘性噪声的共同作用下,分别给出了相关系数 $\rho$ 作为 $M$ 以及 $A$ 的函数在不同 $U$ 和 $N$ 下的变化曲线。图4(a)是在 $N=8, A=0.5$ 时,相关系数 $\rho$ 作为 $M$ 的函数在不同 $U$ 下的变化曲线,图4(b)是在 $N=8, M=0.5$ 时,相关系数 $\rho$ 作为 $A$ 的函数在不同 $U$ 下的变化曲线。

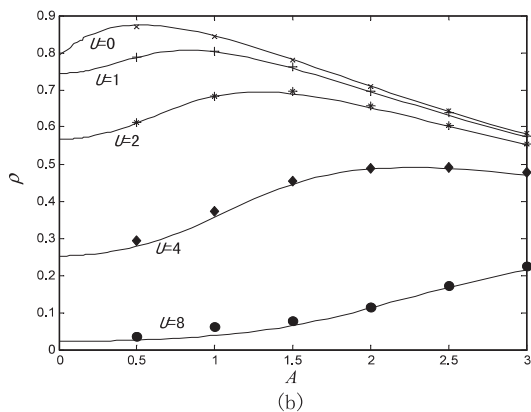
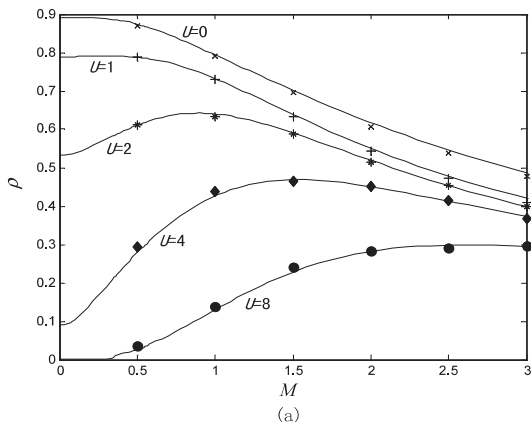


图4 加性和乘性噪声共同作用下,相关系数 $\rho$ 作为 $M$ 以及 $A$ 的函数在不同 $U$ 下的变化曲线

从图4(a)可以看出, $\rho$ 作为 $M$ 的函数,在 $U=0$ 时,没有SSR现象,随着 $U$ 的增大,SSR现象发生,且峰值随着 $U$ 的增大而减小。图4(b)显示, $\rho$ 作为 $A$ 的函

数,对不同的系统阈值 $U$ ,SSR都发生了。SSR现象分别与图2(a)和图2(b)类似。图4(a)和图4(b)也说明了,在加性和乘性噪声的共同作用下,改变加性噪声强度比改变乘性噪声更有利于改善信号相关性。

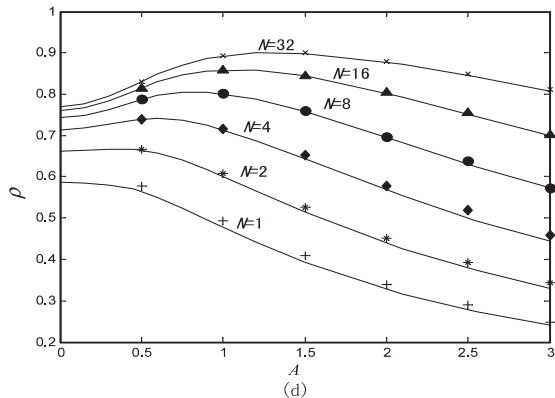
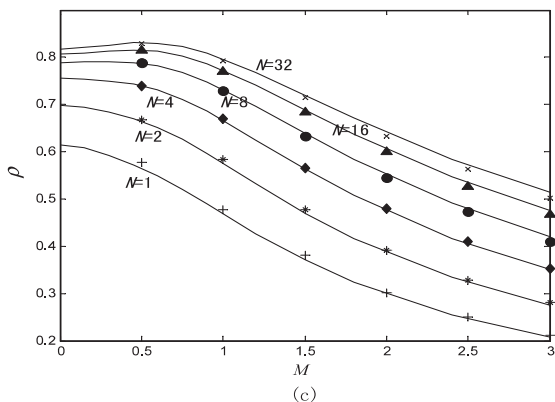
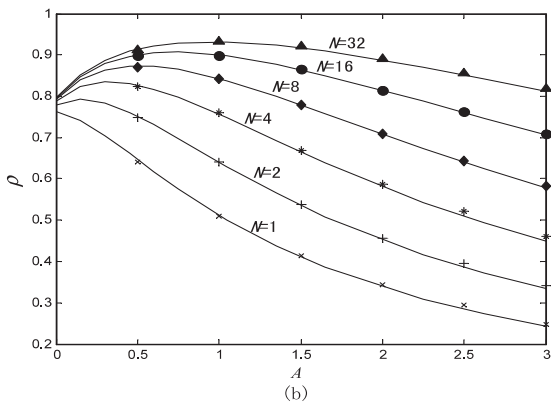
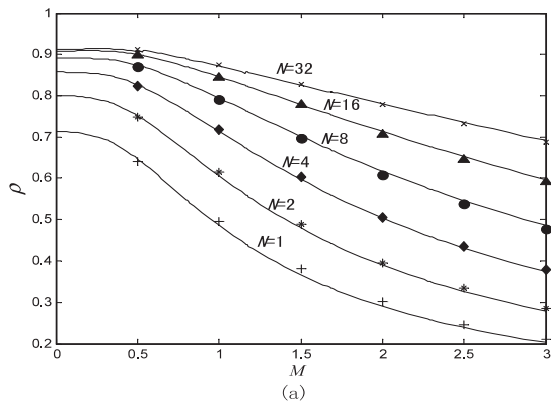


图5 加性和乘性噪声共同作用下, $\rho$ 作为 $M$ 以及 $A$ 的函数在不同 $N$ 下的变化曲线

图 5(a) 和图 5(c) 是相关系数  $\rho$  作为  $M$  的函数分别在  $A = 0.5, U = 0$  和  $A = 0.5, U = 1$  和不同阈值单元数  $N$  下的变化曲线; 图 5(b) 和图 5(d) 是相关系数  $\rho$  作为  $A$  的函数分别在  $M = 0.5, U = 0$  和  $M = 0.5, U = 1$  和不同阈值单元数  $N$  下的变化曲线。

图 5(a) 显示, 在  $U = 0$  时, 无论  $N$  取何值,  $\rho$  随  $M$  的增大总是单调递减, 没有 SSR 现象。图 5(b) 显示,  $U = 0$  时, 相关系数  $\rho$  作为加性噪声  $A$  的函数在  $N = 1$  时没有 SSR 现象,  $N > 1$  时出现了 SSR 现象, 与图 3(b) 单独加性噪声下的结论类似。图 5(c) 和图 5(d) 显示, 在  $U = 1$  时, 相关系数  $\rho$  作为乘性噪声  $M$  或者加性噪声  $A$  的函数, 当  $N$  取值较大时, SSR 现象才存在, 峰值随着  $N$  的增大而增大。

图 5(a) 到图 5(d) 再次说明阈值单元数的增加对改善信号相关性有积极的作用; 对比图 5(a) 和图 5(b)、图 5(c) 和图 5(d) 可以看出, 相对给定加性噪声改变乘性噪声强度而言, 给定乘性噪声改变加性噪声的强度会使得 SSR 现象更容易发生, SSR 功效更好。

#### 4 结束语

文中基于相关系数在一类非线性神经网络中分别研究了单独加性噪声、单独乘性噪声和加性噪声与乘性噪声共同作用下的 SSR 现象。通过数值计算和计算机仿真得到:

(a) 系统阈值单元数目的增多, 会对阈上随机共振的出现和功效起到积极的作用。

(b) 阈值的选取对单独加性噪声和单独乘性噪声作用下的影响是不同的, 系统阈值的增加会使得阈上随机共振的功效降低。

(c) 对于每一固定的系统阈值, 加性噪声下 SSR 现象更容易发生, 且共振峰值比乘性噪声下大, 加入加性噪声更有利于改善信号的相关性。

(d) 在加性和乘性噪声的共同作用下, 阈上随机共振现象同样存在, 对系统阈值进行恰当选取和增加系统阈值单元数目会更有利于阈上随机共振的发生, 改变加性噪声强度比改变乘性噪声强度对 SSR 出现的效果更加明显, 文章的结论拓展了阈上随机共振在信号处理中的应用。

#### 参考文献:

- [1] Benzi R, Parisi G, Stuerer A. A theory of stochastic resonance in climate change[J]. SIAM Journal on Applied Mathematics, 1983, 43(3): 565-578.
- [2] Benzi R, Stuerer A, Vulpiani A. The mechanism of stochastic resonance[J]. J Phys A, 1981, 14(5): 453-457.
- [3] Wiesenfeld K, Jaramillo F. Minireview of stochastic resonance[J]. Chaos, 1998, 8(3): 539-548.
- [4] Harmer G P, Davies B R, Abbott D. A review of stochastic resonance; Circuits and measurement[J]. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 2002, 51(2): 299-309.
- [5] Dykman M I, Luchinsky D G, Mannella R, et al. Stochastic resonance in perspective[J]. Nuovo Cimento D, 1995, 17(7-8): 661-683.
- [6] Bulsara A R, Zador A. Threshold detection of wideband signals; A noise-induced maximum in the mutual information[J]. Phys Rev E, 1996, 54(3): 2185-2188.
- [7] Collins J J, Chow C C, Imhoff T T. Stochastic resonance without tuning[J]. Nature, 1995, 376: 236-238.
- [8] McNamara B, Wiesenfeld K. Theory of stochastic resonance[J]. Phys Rev A, 1989, 39: 4854-4869.
- [9] Stocks N G, McClintock P V E, Stein N D. Stochastic resonance in monostable systems[J]. J Phys A, 1993, 26: 385-390.
- [10] Wiesenfeld K, Pierson D, Pantazelou E, et al. Stochastic resonance on a circle[J]. Phys Rev Lett, 1994, 72(14): 2125-2129.
- [11] Gammaitoni L. Stochastic resonance and the dithering effect in threshold physical systems[J]. Phys Rev E, 1995, 52(5): 4691-4698.
- [12] Chialvo D R, Longtin A, Muller-Gerking J. Stochastic resonance in models of neuronal ensembles[J]. Phys Rev E, 1997, 55(2): 1798-1808.
- [13] Godivier X, Chapeau-Blondeau F, Chambet N. Stochastic resonance in a neuron model that transmits spike trains[J]. Phys Rev E, 1996, 53(1): 1273-1275.
- [14] Stocks N G. Suprathreshold stochastic resonance in multilevel threshold systems[J]. Phys Rev Lett, 2000, 84(11): 2310-2313.
- [15] Stocks N G. Suprathreshold stochastic resonance; An exact result for uniformly distributed signal and noise[J]. Phys Lett A, 2001, 279(5-6): 308-312.
- [16] Stocks N G. Information transmission in parallel threshold arrays; Supra-threshold stochastic resonance[J]. Physical Review E, 2001, 63(4): 041114.
- [17] Stocks N G, Mannella R. Generic noise enhanced coding in neuronal arrays[J]. Phys Rev E, 2001, 64: 030902.
- [18] Stocks N G, Morse R P. Enhanced information transmission with signal-dependent noise in an array of nonlinear elements[J]. Phys Rev E, 2007, 75(2): 021121.
- [19] 郭永峰, 谭建国. 一类非线性神经网络系统的超阈值随机共振现象[J]. 物理学报, 2012, 61(17): 170502.
- [20] 刘洪伟, 王友国, 罗 辑. 噪声改善多元信号的相关性[J]. 南京邮电大学学报: 自然科学版, 2010, 30(3): 70-73.

一类非线性网络系统中噪声改善信号的相关性

作者：[王友国](#)，[郑克](#)，[陆望](#)，[WANG You-guo](#)，[ZHENG Ke](#)，[LU Wang](#)

作者单位：[南京邮电大学 理学院, 江苏 南京, 210023](#)

刊名：[计算机技术与发展](#)

英文刊名：[Computer Technology and Development](#)

年，卷(期)：2014(5)

本文链接：[http://d.g.wanfangdata.com.cn/Periodical\\_wjtz201405023.aspx](http://d.g.wanfangdata.com.cn/Periodical_wjtz201405023.aspx)