

一种求解网络图最大流的新算法

赵礼峰,董 方

(南京邮电大学理学院,江苏南京 210023)

摘 要:给出一种求解网络最大流的新算法,该算法是针对增广链选取的顺序不当而无法得到理想的最大流,且在计算过程中每步都需要画一个网络图等问题进行的改进。利用分层及度差的概念,在选择增广链时优先选择路径最短且度差较大的路径,相同层次度差相同时优先选择容差较大的路径,在饱和的弧上画上终止符。最后用实例进行了验证并和 Ford-Fulkerson 算法做了比较,体现了它的高效性,避免了标号,且只需要在一个图上即可完成。整个运算过程直观性强,计算方便。

关键词:最大流;增广链;增广链算法;度差;容差

中图分类号:TP301.6

文献标识码:A

文章编号:1673-629X(2014)02-0120-03

doi:10.3969/j.issn.1673-629X.2014.02.029

A New Algorithm for Solving Maximum Flow

ZHAO Li-feng, DONG Fang

(College of Science, Nanjing University of Posts and Telecommunications, Nanjing 210023, China)

Abstract: It provided a new algorithm for solving maximum network flow. Due to the improper selection order of augmented chain could not obtain the ideal maximum flow and each step in the process of calculation needs to draw a network diagram, the algorithm does some improvement. The new algorithm makes use of layered network and the concept of degree of difference, gives priority to the shortest path and greater degree of difference when choosing augmenting path. It gives priority to the greater allowance path when degrees of difference are same under the same layer. And draws terminators on the arcs have reached saturation. Finally the algorithm is proved through the example and makes comparison with Ford-Fulkerson algorithm, showing its efficiency, and avoiding the labeling process, the entire process only needs drawing a diagram to be completed. It is strongly intuitive and convenient to calculate.

Key words: maximum flow; augmented chain; augmented chain algorithm; degree of difference; allowance

0 引言

随着计算机技术的迅速发展,网络最大流问题在工程和科学领域应用广泛,许多交通运输、通信网络等实际问题都可转化为网络最大流模型来求解,这就涉及到求网络最大流的算法问题。目前,关于最大流问题较为经典的算法是 Ford-Fulkerson 标号算法^[1]、最短增广链算法^[1-2]、预流推进算法^[3]等等,这些经典算法^[1-12]对网络最大流问题的研究起到了非常重要的推动作用。

尽管这些算法比较经典,但是它们的缺点也比较明显,例如 Ford-Fulkerson 标号算法,首先要进行标号,这个过程需要对每个顶点检查一次,要进行多次标号,计算量较大;另外,就是增广链的选取过于随意,导

致有时计算量非常大,执行效率并不高。因此,要改进算法,降低其计算量和循环次数,必须修正增广链的选取方法,排除任意性。

文中就针对增广链选取的任意性,引进了“度差”^[1,4]的概念,即出弧的条数与入弧的条数之差,这样相对每个顶点计算容差^[5-6]时更简单易便,且计算量也大大减少,即只要查一下入弧和出弧的条数即可。度差越大说明出弧条数大于入弧条数(即分支多),分支多一般相对来说该顶点不易堵塞^[7-8],无论第几条增广链的入弧经过该顶点只要该顶点的入弧未饱和,就完全有网络流入该顶点的出弧的可能性(这种流通能力对于度差为零的顶点同样成立)^[9]。所以在选择增广链时就不是那么无规律可寻,优先选择最短路径

收稿日期:2013-04-19

修回日期:2013-07-26

网络出版时间:2013-11-29

基金项目:国家自然科学基金资助项目(GZ210039)

作者简介:赵礼峰(1959-),男,安徽淮北人,硕士生导师,教授,研究方向为图论及其应用;董 方(1988-),女,硕士研究生,研究方向为图论及其在通信工程中的应用。

网络出版地址: <http://www.cnki.net/kcms/detail/61.1450.TP.20131129.1006.047.html>

且度差较大的链,如果度差相同,优先选择该顶点的容差较大的链,直到从源点到汇点无路可走。该方法避免了选择增广链的随意性,避免漏链少链的情况,并且每次增流时可直接在每条弧上更改剩余流量,避免了多次画图。

1 基本概念

定义 1:对于给定的网络 $D = (V, A, c)$ 和给定的流 $f = \{f_{ij}\}$,若 f 满足下列条件:

- (1) 对每条弧 (v_i, v_j) , 有 $0 \leq f_{ij} \leq c_{ij}$;
- (2) 对于中间点流出量等于流入量,即对每个 $j(j \neq s, t)$ 有 $\sum f_{ij} = \sum f_{ji}$, 则 $f = \{f_{ij}\}$ 为一个可行流。

定义 2:最大流问题就是在一个带源点和汇点的容量网络上求一个流值最大的可行流,这样的可行流称为最大流。

定义 3:若给一个可行流 $f = \{f_{ij}\}$,把网络中使 $f_{ij} = c_{ij}$ 的弧称为饱和弧,使 $f_{ij} < c_{ij}$ 的弧称为非饱和弧。把 $f_{ij} = 0$ 的弧称为零流弧。

定义 4: v 的入度 $d_D^-(v)$ 为顶点 v 在 D 中入弧的数目; v 的出度 $d_D^+(v)$ 为顶点 v 在 D 中出弧的数目。

定义 5:设网络中顶点 v_i 的出度 $d_D^+(v_i)$ 与入度 $d_D^-(v_i)$ 的差值,称为给顶点的“度差”。

定义 6:流入顶点 v_n 的各弧容量和为该顶点的流入流量 α_n ,从该顶点流出的弧容量和为该顶点的流出流量 β_n ,流出流量与流入流量之差 $x_n = \beta_n - \alpha_n$,称为容差。

2 新算法的思想及步骤

2.1 算法的思想

该思想是在现有算法的基础上应用“度差”的概念,对增广链的选取过程进行了一些改进,提出一种新的求解最大流问题的算法。

首先,在网络图的各个顶点(除去源点和汇点)上标上对应的度差,即出度减去入度,正数标正数,负数标负数,零标零。其次,在选取路径时,优先选择路径最短(即经过中间点最少的路径)且度差较大的可行流进行增广;在度差相同的情况下,优先选择容差较大的最短路径进行增流,确保每次增流至少使一条弧达到饱和,并且在已经达到饱和的弧上标上“≠”作为终止符。最后,重复上述步骤,直到找不出从源点 v_s 到汇点 v_t 的增广链,则得到网络的最大流。

文中利用了度差的概念,标记度差只要进行简单计算即可,比标号、容差计算起来更简单方便,计算量也大大减少。另外,在求解最大流的过程中对网络图中的各个顶点进行分层^[1,5]。在增流时直接将可增流

量标记在对应的弧上,这样就省去了标号过程,整个运算过程则可在一个网络图上完成,省去了多次画图的麻烦。

2.2 基本定理

定理 1:设 f 是容量网络 D 中的可行流,则 f 是 D 的最大流当且仅当 D 中不存在 f 增广链。

2.3 算法步骤

- 求网络 $D = (V, A, c)$ 中的最大流 f 。
- Step1:初始化网络图,各节点间弧的流量置为 0;
- Step2:在分层的每个顶点的上方或下方标上度差,对源点和汇点不进行标记;
- Step3:从源点 v_s 出发,判断是否存在一条到汇点 v_t 的最短可增广链,若存在转 Step4,否则转 Step6;
- Step4:选取路径最短且度差较大的链进行增流,若度差相同,则选取相同点容差较大的链进行增广;
- Step5:调整,求该链上各弧剩余流量的最小值 δ ,并将此增广链中对应弧中流量后面相应地标上 $+\delta$ 或 $-\delta$,并和容量 c_{ij} 一起用小括号括起来。在饱和的弧上画上“≠”,此时,表示不存在从 v_i 到 v_j 的有向路径,转 Step3;
- Step6:当不存在 (v_s, v_t) 路径时算法终止,求得网络最大流,算法结束。

3 应用实例及比较

3.1 求网络图的最大流

原网络图如图 1 所示。

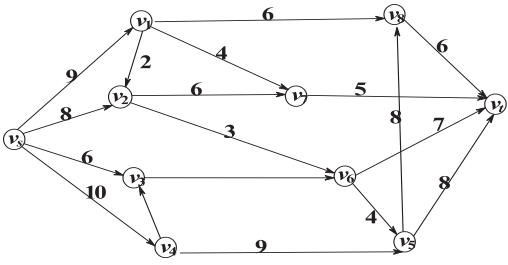


图 1 原网络图

(1)将容量网络中的每个顶点均标上度差的大小,如图 2 所示。

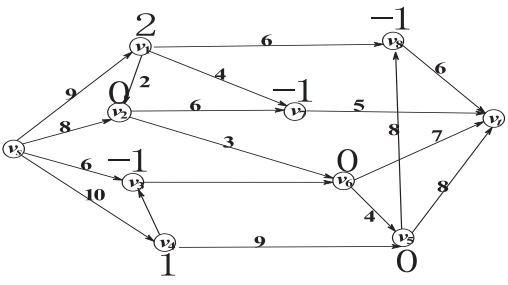


图 2 在除了 v_s, v_t 的每个顶点标上度差

(2)根据在选择可增广链时优先选择路径最短且

度差较大的顶点,找到 $v_s \rightarrow v_1 \rightarrow v_8 \rightarrow v_t$ 和 $v_s \rightarrow v_1 \rightarrow v_7 \rightarrow v_t$, 这两条路径的长度和度差都是相同的,由于 v_7 和 v_8 的容差分别为-5 和-8,所以选择链 $u_1: v_s \rightarrow v_1 \rightarrow v_7 \rightarrow v_t$, 增流为 $\delta = 4$, 在对应弧上标上流量,并且在饱和弧 (v_1, v_7) 上标上“ \neq ”;同理可得增广链 $u_2: v_s \rightarrow v_1 \rightarrow v_8 \rightarrow v_t$, $\delta = 5$ 且 (v_s, v_1) 为饱和弧,画上终止符“ \neq ”,如图3所示。

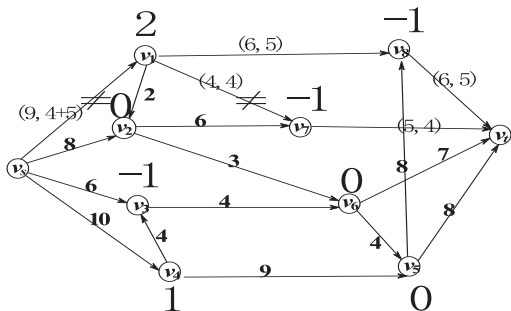


图3 选取增广链 u_1, u_2 并进行增广

(3) 观察图3,可得增广链 $u_3: v_s \rightarrow v_4 \rightarrow v_5 \rightarrow v_t$, $\delta = 8$, 在饱和弧 (v_5, v_t) 上画上终止符“ \neq ”,如图4。

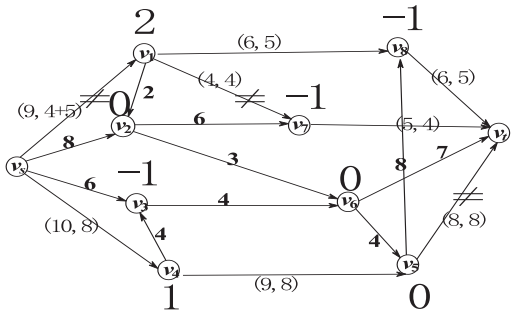


图4 选取增广链 u_3 并进行增广

(4) 观察图4,可得增广链 $u_4: v_s \rightarrow v_2 \rightarrow v_6 \rightarrow v_t$, $\delta = \min\{8, 3, 7\} = 3$, 在饱和弧 (v_2, v_6) 上画上终止符“ \neq ”;同理可得 $u_5: v_s \rightarrow v_2 \rightarrow v_7 \rightarrow v_t$, $\delta = 1$, 在饱和弧 (v_7, v_t) 上画上终止符“ \neq ”,如图5所示。

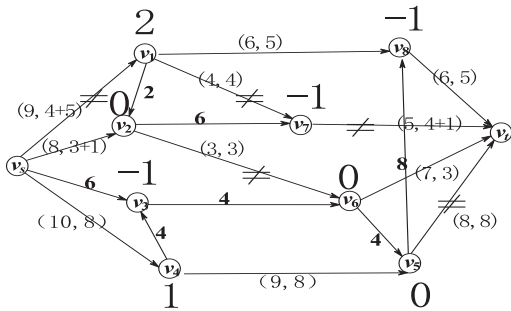


图5 选取增广链 u_4, u_5 并进行增广

(5) 观察图5,可得增广链 $u_6: v_s \rightarrow v_3 \rightarrow v_6 \rightarrow v_t$, $\delta = 4$, 在饱和弧 (v_3, v_6) , (v_6, v_t) 上画上终止符“ \neq ”,如图6所示。

(6) 观察图6,可得增广链 $u_7: v_s \rightarrow v_4 \rightarrow v_5 \rightarrow v_8 \rightarrow$

v_t , $\delta = 1$, 在饱和弧 (v_4, v_5) , (v_8, v_t) 上画上终止符“ \neq ”,如图7所示。

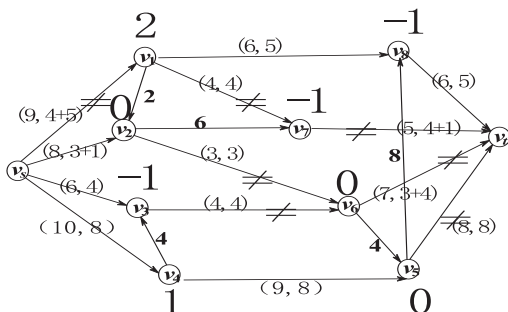


图6 选取增广链 u_6 并进行增广

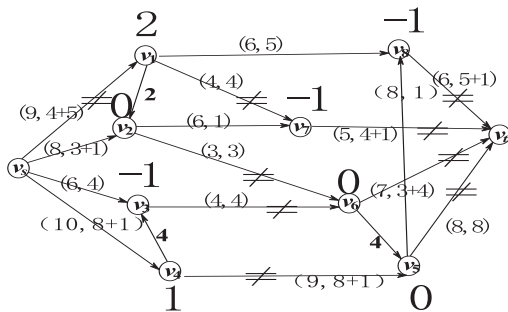


图7 选取增广链 u_7 并进行增广

(7) 观察图7,该网络图中不存在从源点 v_s 到汇点 v_t 的增广链,算法结束。可知最大流 $f_{\max} = \sum \delta = 4 + 5 + 8 + 3 + 1 + 4 + 1 = 26$ 。

3.2 和经典算法2F的比较

如果用 Ford-Fulkerson 算法由于选取不当则需要 10 条链才达到最大流量为 24,步骤繁多且不易操作,可见该算法的高效性,这里就不详细给出。

4 结束语

文中避免了多次标号把复杂的网络简单化,并且借助度差的概念,利用度差比用对每个顶点进行容差标号计算起来更简单易便,并且计算量也大大降低,加快了整个算法的执行速度,对每个顶点仅仅只进行简单的计算,直观性强,而且还针对目前求最大流选取增广链时的不恰当、任意性进行了改进,优化了增广链,排除了任意性,同时又不会重复、漏掉计算增广链,以使改进后的方法更简单易用。通过具体的算例验证了算法的实用性和高效性,并且和经典的 Ford-Fulkerson 算法进行了比较,证明确实具有高效性。

参考文献:

- [1] 谢 政. 网络算法与复杂性理论[M]. 长沙:国防科技大学出版社,2003:116-128.
- [2] 孙泽宇. 基于标号法求解网络最大流算法的研究[J]. 甘肃

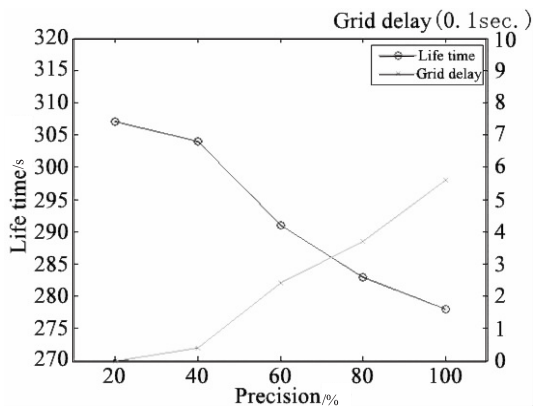


图 5 不同分辨率下的网格延迟和网络生命周期

4 结束语

文中提出一种支持多分辨率查询的蛇形时槽分配数据存储策略,该策略控制同一网格中只有两个传感器来侦听数据,并将同一属性数据存储在同一网格内,以节省电力。当有数据查询时,能满足不同分辨率的查询请求。经实验证明:该方法节省了电力,有效延长了无线传感网络的生命周期。对于数据存储和查询来说,传感器电力的消耗是动态的,不同传感器在处理数据的过程中的电力消耗不尽相同,如能根据传感器的剩余电力来设计时槽分配,对提高整体网络的生命周期会大有益处,这将是进一步研究的方向。

参考文献:

- [1] Liu A F, Wu X Y, Chen Z G, et al. Research on the energy hole problem based on unequal cluster-radius for wireless sensor networks[J]. Computer communications, 2010, 33(3): 302-321.
- [2] Ray S, Demirkol I, Heinzelman W. ADV-MAC: Analysis and optimization of energy efficiency through data advertisements for wireless sensor networks[J]. Ad Hoc networks, 2011, 9(5): 876-892.
- [3] Uster H, Lin Hui. Integrated topology control and routing in
- [4] 联合大学学报(自然科学版), 2009, 23(4): 64-66.
- [5] Pham T L, Lavallee I, Bui M, et al. A distributed algorithm for the maximum flow problem[C]//Proceedings of the 4th international symposium on parallel and distributed computing. [s. l.]: IEEE Computer Society, 2005: 1-8.
- [6] 邱伟星, 王以凡, 沈金龙. 一个求无向网络最大流的算法[J]. 南京邮电学院学报, 1997, 17(4): 170-172.
- [7] 陈 静, 单 锐. 容差修正网络最大流 2F 算法[J]. 长春工业大学学报(自然科学版), 2008, 29(6): 713-716.
- [8] 赵礼峰, 陈 华, 宋常城, 等. 基于一个网络图最大流算法的改进[J]. 计算机技术与发展, 2010, 20(12): 162-165.
- [9] Goldberg A V, Tarjan R E. A new approach to the maximum

wireless sensor networks for prolonged network lifetime[J]. Ad Hoc networks, 2011, 9(5): 835-851.

- [4] Albano M, Chessa S, Nidito F, et al. Q-NIGHT: Adding QoS to data centric storage in non-uniform sensor networks[C]//Proc of IEEE international conference on mobile data management. Mannheim, Germany: [s. n.], 2007.
- [5] Gavidia D, Steen M V. A probabilistic replication and storage scheme for 30 large wireless networks of small devices[C]//Proc of IEEE mobile Ad Hoc and sensor systems. Atlanta, Georgia, USA: [s. n.], 2008.
- [6] Xu J, Tang X, Lee W C. A new storage scheme for approximate location queries in object-tracking sensor networks[J]. IEEE transactions on parallel and distributed systems, 2008, 19(2): 262-275.
- [7] Ganesan D, Estrin D, Heidemann J. DIMENSIONS: Why do we need a new data handling architecture for sensor networks? [J]. SIGCOMM computer communication review, 2003, 33(1): 143-148.
- [8] Wang Y C, Hsieh Y Y, Tseng Y C. Compression and storage schemes in a sensor network with spatial and temporal coding techniques[C]//Proceedings of VTC2008-Spring. Singapore: [s. n.], 2008.
- [9] Cheung Y H, Maxemchuk N F. Telescopic data compression in dense sensor networks that support fire-fighters[C]//Proc of IEEE global telecommunications conference. Washington DC, USA: [s. n.], 2007.
- [10] Madsen T K, Grauballe A, Jensen M G, et al. Reliable cooperative information storage in wireless sensor networks[C]//Proc of IEEE international conference on telecommunications. Beijing, China: [s. n.], 2008.
- [11] Ratnasamy S, Karp B, Li Y, et al. GHT: A geographic hash table for data-centric storage[C]//Proceedings of the first ACM international workshop on wireless sensor networks and applications. Atlanta, USA: [s. n.], 2002.
- [12] Liao W H, Tseng Y C, Sheu J P. GRID: A fully location-aware routing protocol for mobile Ad Hoc networks[J]. Telecommunication systems, 2001, 18(3): 37-60.
- [1] flow problem[J]. Journal of ACM, 1988, 35(4): 921-940.
- [8] 胡雄鹰, 熊 茜, 黎伟东. 基于结点的网络最大流算法[J]. 武汉工程大学学报, 2009, 31(12): 67-69.
- [9] Ford L R, Fulkerson D R. Maximum flow through a network[J]. Canadian journal of math, 1965, 8(5): 399-404.
- [10] 赵礼峰, 白 睿, 宋常城. 求解网络最大流问题的标号算法[J]. 计算机技术与发展, 2011, 21(12): 113-115.
- [11] 谭洁群. 求网络最大流的新方法[J]. 洛阳大学学报, 1997, 12(2): 9-12.
- [12] 谢凡荣. 求解网络最大流问题的一个算法[J]. 运筹与管理, 2004, 13(4): 37-40.

(上接第 122 页)

一种求解网络图最大流的新算法

作者：[赵礼峰](#)，[董方](#)，[ZHAO Li-feng](#)，[DONG Fang](#)
作者单位：[南京邮电大学 理学院](#)，[江苏 南京](#)，[210023](#)
刊名：[计算机技术与发展](#)

英文刊名：[Computer Technology and Development](#)

年，卷(期)：2014(2)

本文链接：http://d.g.wanfangdata.com.cn/Periodical_wjfz201402030.aspx