第 24 卷　第 2 期
2014 年 2 月

计 算 机 技 术 与 发 展
COMPUTER TECHNOLOGY AND DEVELOPMENT

Vol. 24　No. 2
Feb.　2014

基于截尾估计的概率估计方法

李　熔

(南京邮电大学 理学院,江苏 南京 210003)

摘　要:能否以高概率正确重建稀疏信号是压缩感知理论中的重要研究内容。信号的稀疏度及冗余字典原子间的相关特性是研究该内容的关键因素。文中运用累积增量的概念,提出了一种基于截尾概率的累积增量满足约束界的概率估计的方法。运用该方法,判断能否利用选取的测量矩阵正确重构原始信号。通过 Matlab 仿真,验证了将高斯随机矩阵作为观测矩阵,在 OMP 重构算法下,可以高概率地正确重构出原始信号,也验证了文中所提方法的合理性。

关键词:压缩感知;稀疏信号;测量矩阵;累积增量;截尾概率;概率估计

中图分类号:TP301　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1673-629X(2014)02-0101-03

doi:10.3969/j.issn.1673-629X.2014.02.024

Probability Estimation Method Based on Truncated Estimation

LI Rong

(School of Science,Nanjing University of Posts and Telecommunications,Nanjing 210003,China)

Abstract:It's an important research content in compressive sensing theory whether reconstruct the sparse signals with a high probability. The sparsity of the signals and the relevant characteristics of the atoms in the redundant dictionary are the key factors of the study. In this paper,taking use of the concept of cumulative coherence,propose a probability estimation method to estimate the probability of the cumulative coherence which satisfies the constraint boundary that based on the truncated estimation. It can be found whether the selected measurement matrix can correctly reconstruct the original signal with this method. The Matlab simulation verifies that the original signal can be reconstructed using OMP algorithm with a high probability by taking the Gaussian random matrix as the measurement matrix,at the same time,it verifies that the proposed method is reasonable.

Key words:compressive sensing;sparse signals;measurement matrix;cumulative coherence;truncated estimation;probability estimation

0　引　言

2004 年,D. Donoho 等人首次提出压缩感知[1]的概念,针对稀疏信号[2],以远低于奈奎斯特频率的速度进行全局观测而非局部采样,然后用适当的重建算法从观测值中还原出原始信号。在信号逼近和稀疏分解等理论的基础上建立了压缩感知(Compressive Sensing,CS)理论框架[3]。压缩感知理论的突出优点[4]是在获取信号的同时,对数据进行适当的压缩,用比传统方法更少的采样数目去精确恢复特定的信号或图像,避免了对存储资源、传输资源和计算资源的极大浪费,同时又包含有足够的信息量。压缩感知与信号的稀疏重建已成为应用数学和信号处理中一个新的研究方向。

压缩感知理论的核心内容是在数据采样的过程中同时完成压缩过程,而测量矩阵[5]在数据采样和信号重建环节中发挥着至关重要的作用,因此测量矩阵的设计是压缩感知研究的核心问题之一,构造合理有效的测量矩阵对于测量值的获取和原始数据的恢复重构都起到了关键作用[6-7]。测量矩阵的性质不仅影响信号的采样和压缩,也直接影响信号重建效果及重建速度[8]。Candès E 等人建立了著名的限制等距特性(Restricted Isometry Property,RIP)[9]。当随机测量矩阵满足受限等距性,就可从测量值中得到恢复重构原始信号所需的必要信息。RIP 原则虽从理论上给出了测量矩阵应满足的条件,但在实际中,该条件很难用来指导设计测量矩阵。同时,RIP 原则是充分条件,而非必要条件,在验证矩阵是否为合适的测量矩阵方面存在局限性。

近几年来,Tropp 等人[10]经研究表明测量矩阵的

收稿日期:2013-04-26　　**修回日期**:2013-07-29　　**网络出版时间**:2013-11-29

基金项目:国家自然科学基金资助项目(60972041,60972045)

作者简介:李　熔(1988-),女,硕士研究生,研究方向为信息处理理论与应用。

网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/61.1450.TP.20131129.0911.023.html

k-累积增量与信号的正确重建有很大关系。在文献[11]中,给出了两个随机向量的截尾概率估计的方法,文中拟在文献[11]的基础上,提出一种基于截尾概率的累积增量满足约束界的概率估计的方法,从而为随机高斯矩阵能高概率地利用 OMP 算法[12]正确地恢复信号提供理论依据。

1 基于截尾概率的概率估计

1.1 k-累积增量

相干性反映了字典中两个原子间的最大相关,相干性越小,就越容易高概率地恢复重构出原始数据。但是它只描述了字典原子的局部相关性,却无法反映字典整体的相关性。为了能更好地显示字典整体相关性,Tropp 在文献[10]中引入 k-累积增量的概念,将相干性参数引入到子字典中。利用累积增量这个参数,能判断字典中原子之间的整体的相关性,从而判断信号能否被正确重建。

累积增量参数 $\mu_1(k)$ 表示一个固定的原子与其他 k 个原子的绝对内积和的最大值

$$\mu_1(k) = \max_{|\Lambda|=k, 1\leqslant i,j\leqslant N, i\notin\Lambda, j\in\Lambda} \max \sum_{\Lambda} |<\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j>|$$

其中, $\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j$ 分别是字典中第 i 列和第 j 列向量。

在文献[10]推论 3.6 中可以知道:给定超完备字典 $\boldsymbol{A}$,假设信号 $\boldsymbol{s} \in R^N$ 在字典 $\boldsymbol{A}$ 中是 k - 稀疏的,即 $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{Ax}$ 且 $|\boldsymbol{x}| = k$。

如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的累积增量满足

$$\mu_1(k) + \mu_1(k+1) < 1 \tag{1}$$

那么正交匹配追踪算法能够精确重构信号。

由于累计增量随着 k 的增大而增大,所以 $\mu_1(k) \leqslant \mu_1(k+1)$ 。利用 $\mu_1(k)$ 的单调不减性及式(1),得到以下推论:

推论 1:给定超完备字典 $\boldsymbol{A}$,假设信号 $\boldsymbol{s} \in R^N$ 在字典 $\boldsymbol{A}$ 中是 k - 稀疏的,即 $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{Ax}$ 且 $|\boldsymbol{x}| = k$。

如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的累积增量满足

$$\mu_1(k) < 1/2 \tag{2}$$

那么正交匹配追踪算法就能够精确重建信号 s。

推论 1 给出了利用 OMP 算法精确重构稀疏信号时,累积增量应满足的条件。但是,并不是所有的测量矩阵,其累积增量都满足这个条件的。所以,在下面的章节中,给出了一种累积增量满足约束界的概率估计方法。通过该方法,得到高斯矩阵的累积增量小于 0.5 的概率估计,从而得出高斯矩阵在 OMP 重构算法下,正确重构信号的概率。

1.2 累积增量满足约束界的概率估计

文献[11]中给出了两个随机向量的截尾概率估计方法,给出如下结论:

假设 $x_i, y_i, i = 1,2,\cdots,k$ 是独立同分布的高斯随机变量,其中均值为 0,方差为 σ^2。那么

$$\Pr\left(\left|\sum_{i=1}^{k} x_i y_i\right| \geqslant t\right) \leqslant 2\exp\left(-\frac{t^2}{4\sigma^2(k\sigma^2 + t/2)}\right) \tag{3}$$

文中在此结论的基础上,运用累积增量参数 $\mu_1(k)$,给出了高斯随机矩阵满足式(1)的概率估计并得到下述结论。

推论 2:假设矩阵 $\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_N]$ 为 $M\times N$ 维矩阵,且 $\boldsymbol{a}_i, i = 1,2,\cdots,N$ 为 $M\times 1$ 维向量,它们是独立同分布的随机变量,都服从均值为零,方差为 σ^2 的高斯分布,那么该矩阵的 k 阶累积增量满足以下条件的概率估计为

$$P(\mu_1(k) < \varepsilon) \geqslant \left\{\left[1 - 2\exp\left(-\frac{2(\varepsilon-\mu)^2}{kt^2}\right)\right][1 - G]\right\}^{N-k} \tag{4}$$

其中, $G = 2\exp\left(-\dfrac{t^2}{4\sigma^2\left(M\sigma^2 + \dfrac{t}{2}\right)}\right)$, $|<\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j>| < t$, $E\left(\sum_{j=1}^{k} |\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j|\right) = \mu$, ε 是一个正数。

证明:假设累积增量满足条件的概率为事件 A: $\mu_1(k) < \varepsilon$, 两个向量的截尾概率为事件 B: $|<\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j>|_{i\neq j} \leqslant t$, 那么

$$P(A) \geqslant P(A \mid B)P(B)$$

根据文献[9]中的引理 6,有

$$P(B) \geqslant 1 - 2\exp\left(-\frac{t^2}{4\sigma^2(M\sigma^2 + t/2)}\right)$$

选取矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中与其他向量内积最大的 k 个向量的支撑 Λ,那么有

$$\begin{aligned} P(A \mid B) &= P(\mu_1(k) < \varepsilon \mid |<\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j>|_{i\neq j} \leqslant t) \\ &= P(|\mu_1(k) - \mu| < (\varepsilon - \mu) \mid B) \end{aligned}$$

根据文献[9]引理 3,利用 Hoeffding 不等式,有

$$P(|\mu_1(k) - \mu| < (\varepsilon - \mu) \mid B) \geqslant 1 - 2\exp\left(-\frac{2(\varepsilon-\mu)^2}{kt^2}\right)$$

从而得证,即

$$\Rightarrow P(\mu_1(k) < \varepsilon) \geqslant \left\{\left[1 - 2\exp\left(-\frac{2(\varepsilon-\mu)^2}{kt^2}\right)\right]\left[1 - 2\exp\left(-\frac{t^2}{4\sigma^2\left(M\sigma^2 + \frac{t}{2}\right)}\right)\right]\right\}^{N-k}$$

利用这个近似估计累积增量满足约束界概率估计的方法,间接得到了将高斯随机矩阵作为测量矩阵,在 OMP 重构算法下,正确重构稀疏原始信号概率。

2 仿真结果与分析

选取一个 100×560 的随机矩阵,其每一项都服从

$N(0,1/N)$ 高斯分布,其中,事件 B 中的 t,选取为 $t=0.11$,如图 1 所示,给出了该矩阵在不同稀疏度下,其累积增量小于 0.5 的概率估计。

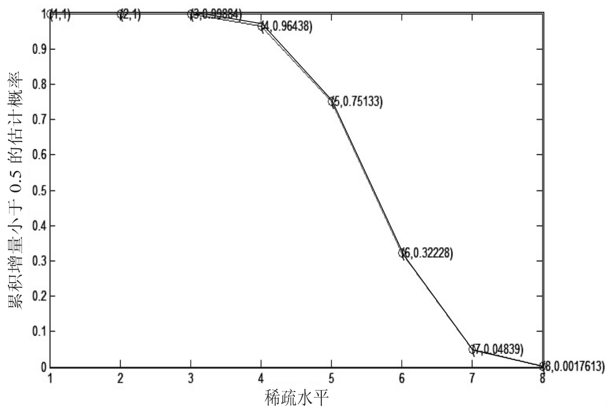

图 1　100×560 的矩阵在不同稀疏度下的累积增量小于 0.5 的概率估计

同样,选取一个 100×360 的随机矩阵,其每一项都服从 $N(0,1/N)$ 高斯分布,其中,$t=0.11$,如图 2 所示,给出了两种不同大小的矩阵在不同稀疏度下,其累积增量小于 0.5 的概率估计的差异。

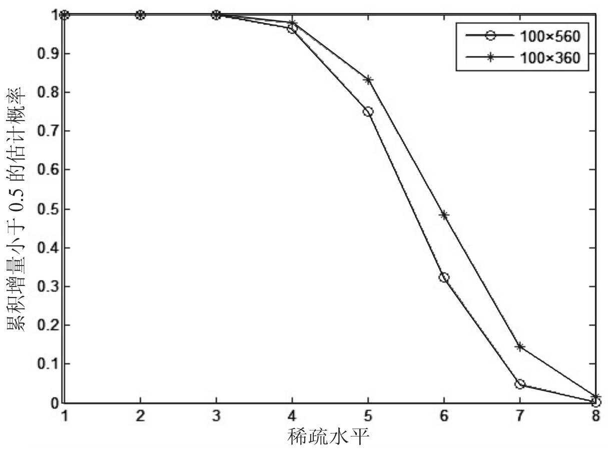

图 2　两种不同大小矩阵下的累积增量小于 0.5 的估计概率的对比

从图 1 中可以看出,随着稀疏度的增加,累积增量小于 0.5 的概率逐渐减小。从图 2 中可以看出,大小为 100×360 的测量矩阵,其累积增量小于 0.5 的估计概率要比大小为 100×560 的测量矩阵的小。它符合理论上的稀疏度与所要估计的概率之间的关系。但是,判断文中给出的估计值是否正确,需要一个判别依据。因此,在下文中给出了判别依据,也就是统计概率。

按照上述给定的 100×560 的随机矩阵,做 500 次实验,统计出累积增量小于 0.5 的概率如表 1 所示。

表 1　不同稀疏度下累积增量小于 0.5 的概率

稀疏度	1	2	3	4	5	6	7
累积增量小于 0.5 的概率/%	100	100	99.9	98.7	76.8	40.5	5.1

比较图 1 和表 1 对应的数据发现,概率统计的结果与文中计算的结果基本吻合。这说明,利用文中的方法所估计出的累积增量小于 0.5 的概率是合理的。

3　结束语

文中在文献[11]提出的随机向量的截尾概率估计方法的基础上,给出了一种近似估计累积增量满足约束界条件的概率的方法。通过 Matlab 仿真,验证了将高斯随机矩阵作为测量矩阵,其累积增量满足约束界的概率估计,从而间接证明了在 OMP 重构算法下,以高斯随机矩阵作为测量矩阵,能以高概率正确重构信号,同时也验证了文中方法的合理性与可行性,具有一定的实用价值。但是对于其他测量矩阵,如伯努利矩阵、托普利兹矩阵等,如何估计其累积增量满足约束界的概率,是进一步要研究的内容。

参考文献:

[1]　Donoho D. Compressed sensing[J]. IEEE trans on information theory,2006,52(4):1289-1306.

[2]　方　红,杨海蓉. 贪婪算法与压缩感知理论[J]. 自动化学报,2011,37(12):1413-1421.

[3]　任肖丽. 压缩感知理论研究简述[J]. 中国科技信息,2010(13):45-49.

[4]　李树涛,魏　丹. 压缩传感综述[J]. 自动化学报,2009,35(11):1369-1377.

[5]　张志禹,满蔚仕,张永宁. 压缩感知理论测量矩阵研究[J]. 工具技术,2012,46(3):70-74.

[6]　李小波. 基于压缩感知的测量矩阵研究[D]. 北京:北京交通大学,2010.

[7]　张贤达. 矩阵分析与应用[M]. 北京:清华大学出版社,2004.

[8]　刘亚新,赵瑞珍,胡绍海,等. 用于压缩感知信号重建的正则化自适应匹配追踪算法[J]. 电子与信息学报,2010,32(11):2713-2717.

[9]　Candes E,Romberg J,Tao T. Robust uncertainty principles: Exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information[J]. IEEE transactions on information theory,2006,52(2):489-509.

[10]　Tropp J A. Greed is good: Algorithmic results for sparse approximation[J]. IEEE trans on information theory,2004,50(10):2231-2242.

[11]　Haupt J,Waheed U,Nowak R,et al. Toeplitz compressed sensing matrices with applications to sparse channel estimation[J]. IEEE transactions on information theory,2010,56(11):5862-5873.

[12]　Tropp J,Gilbert A. Signal recovery from random measurements via orthogonal matching pursuit[J]. IEEE transactions on information theory,2007,53(12):4655-4666.

基于截尾估计的概率估计方法

作者：　李熔，　LI Rong
作者单位：　南京邮电大学 理学院,江苏 南京,210003

刊名：　计算机技术与发展
ISTIC
英文刊名：　Computer Technology and Development
年，卷(期)：　2014(2)