

# 最小费用最大流问题的一种新算法

赵礼峰, 陶晓莉

(南京邮电大学理学院, 江苏南京 210023)

**摘要:** 现有的最小费用最大流算法都有自身的缺陷, 增广链的选取不当会给计算带来不便, 同时费用也达不到理想的效果。鉴于对最小费用最大流算法的增广链选取和最小费用的探索, 文章通过对费用差的定义给出了一种求最小费用最大流的新算法。新算法的原则是优先选择费用差最小的有向路径进行增广, 当费用差相同时就选择修正后的路径。通过对最小费用最大流算法的改进, 新算法易理解且便于计算。通过实例说明了新算法的有效性和执行效率。

**关键词:** 最小费用最大流; 费用差; 费用和; 增广

中图分类号: TP301.6

文献标识码: A

文章编号: 1673-629X(2014)01-0130-03

doi: 10.3969/j.issn.1673-629X.2014.01.033

## A New Algorithm for Problem of Minimum Cost Maximum Flow

ZHAO Li-feng, TAO Xiao-li

(School of Science, Nanjing University of Posts and Telecommunications, Nanjing 210023, China)

**Abstract:** The existing algorithm for minimum cost maximum flow has its defect, improper selection of augmented chain will bring inconvenience in calculation, also the cost cannot reach the ideal effect. In view of the exploration of selecting the augmented chain and making the cost minimum, in this paper, a new algorithm for the minimum cost maximum flow is given by the definition of cost difference. The new algorithm principle is that the minimum cost difference of the directed path is preferred to augment, when the cost difference at the same time, the revised path was chosen. Through the improvement of the minimum cost maximum flow algorithm, the new algorithm is easy to understand and convenient to calculate. A practical example shows the validity and efficiency of the new algorithm.

**Key words:** minimum cost maximum flow; cost difference; cost and; augmentation

## 0 引言

最小费用最大流问题就是计算出从发点到收点的流量最大, 费用最小问题, 它对于解决实际问题有广泛的应用。最小费用最大流问题的算法有两种类型: 一种是要求费用最小, 流量相对较大; 另一种是流量最大, 费用相对较小。目前没有一种确定的方法使得这两个要求都达到, 但是都对基本的算法进行了改进。传统的最小费用最大流算法<sup>[1-4]</sup>有负回路算法、最小费用路算法、原始-对偶算法, 后来很多学者在这些算法的基础上进行了改进, 提出了一系列新算法, 比如: 改进的标号法<sup>[5]</sup>、“排序”算法<sup>[6-7]</sup>、单位费用算法<sup>[8]</sup>、蚁群算法<sup>[9]</sup>等, 更有很多学者运用计算机语言对其进行改进和仿真, 譬如: SQL 语言的改进算法<sup>[10]</sup>、电站最小费用的 MATLAB 仿真<sup>[11]</sup>等<sup>[12-13]</sup>。

文中在最小费用路算法的研究和探讨的基础上, 通过对费用差的定义, 提出了一种求解最小费用最大流的新算法。

## 1 理论基础

### 1.1 基本定义

定义1(容量-费用网络): 设  $G = (V, A, c)$  是一个带始点  $v_s$  和终点  $v_t$  的容量网络。 $\omega$  是定义在  $A$  上的非负函数,  $\forall a = (v_i, v_j) \in A$ ,  $\omega(a)$  表示弧  $a$  上通过单位流量的费用, 记  $\omega(a) = \omega_{ij}$ 。称网络  $D$  为容量-费用网络, 记  $D = (V, A, c, w)$ 。

设  $f$  是容量-费用网络  $D$  上的一个可行流, 定义  $f$  的费用为  $\omega(f) = \sum_{(v_i, v_j) \in A} \omega_{ij} \cdot f_{ij}$ 。

收稿日期: 2013-03-13

修回日期: 2013-06-18

网络出版时间: 2013-11-12

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(GZ210039)

作者简介: 赵礼峰(1959-), 男, 教授, 硕士研究生导师, 研究方向为图论及其在通信中的应用; 陶晓莉(1988-), 女, 硕士研究生, 研究方向为图论及其在通信中的应用。

网络出版地址: <http://www.cnki.net/kcms/detail/61.1450.TP.20131112.1653.057.html>

定义 2(费用差): 设  $P$  是一条  $(v_s, v_t)$  路, 单位流量的费用差为路  $P$  上最大的单位流量的费用与最小的单位流量的费用的差, 简称费用差, 记为:  $\tilde{\omega} = \omega_{\max} - \omega_{\min}$ 。

定义 3(费用和): 设  $P$  是一条  $(v_s, v_t)$  路, 费用和为路  $P$  上所有弧的单位流量的费用与流量的乘积的和, 记为:  $\sum_{(v_i, v_j) \in P} \omega_{ij} \cdot f_{ij}$ 。

定义 4(弧集): 给定一个带发点  $v_s$  和收点  $v_t$  的容量网络  $D = (V, A, C)$  及  $D$  上的可行流  $f$  后, 定义  $A^+(f) = \{(v_i, v_j) \mid (v_i, v_j) \in A, f_{ij} < c_{ij}\}$ ,  $A^-(f) = \{(v_i, v_j) \mid (v_i, v_j) \in A, f_{ji} > 0\}$ 。

定义 5(剩余容量): 令  $c_{ij}(f) = \begin{cases} c_{ij} - f_{ij}, & (v_i, v_j) \in A^+(f) \\ f_{ji}, & (v_i, v_j) \in A^-(f) \end{cases}$ , 称  $c_{ij}(f)$  为弧  $(v_i, v_j)$  关于  $f$  的剩余容量。

1.2 线性规划模型

设  $D = (V, A, c, w)$  是带发点  $v_s$  和收点  $v_t$  的容量-费用网络, 常数  $v_0 \geq 0$ , 则  $D$  中最小费用流问题的线性模型为:

$$\begin{cases} \min & \sum_{(v_i, v_j) \in A} \omega_{ij} \cdot f_{ij} \\ & \sum_{v_j \in N^+(v_i)} f_{sj} - \sum_{v_j \in N^-(v_i)} f_{js} = v_0 \\ \text{s. t.} & \sum_{v_j \in N^+(v_i)} f_{ij} - \sum_{v_j \in N^-(v_i)} f_{ji} = -v_0 \\ & \sum_{v_j \in N^+(v_i)} f_{ij} - \sum_{v_j \in N^-(v_i)} f_{ji} = 0, \forall v_i \in V \setminus \{v_s, v_t\} \\ & 0 \leq f_{ij} \leq c_{ij}, \forall (v_i, v_j) \in A \end{cases}$$

2 算法思想和步骤

2.1 算法思想

要算出从发点到收点的最小费用最大流, 关键是路径的选择, 路径的选择不同, 最终得出的结论也会不同, 因此, 要选出最优路径。文中引入费用差的概念, 通过费用差来选择路径, 这样选择路径所得的结果相对比较好。

首先计算出从发点到收点的所有路径的费用差, 选择费用差最小的那条路径进行增广, 如若至少有两条路径的费用差是一样的, 就依据修正原则进行选择。修正原则是算出所有有向路径的费用和, 选择费用和最小的那条路径; 如若至少有两条路径的费用和是一样的, 则选择路径最短的有向路径。如果起初的单位流量的费用都是一样的, 那么此时的最小费用最大流问题等价于最大流问题, 算法运算过程就如同最大流的算法。

2.2 算法步骤

- Step1: 取零流  $f$  作为初始可行流。
- Step2: 找出所有的  $(v_s, v_t)$  路, 并且计算出每条路径上弧的费用差, 若当前没有  $(v_s, v_t)$  路则转 Step4。
- Step3: 根据新算法步骤选择费用差最小的那条路径进行增广, 若至少有两条路径的单位费用差一样, 那么根据修正原则选择路径进行增广, 增广的流量为  $\sigma = \min\{c_{ij}(f)\}_{(v_i, v_j) \in P}$ 。这样每次至少使一条弧达到饱和, 当弧饱和时就删去这条弧, 未达到饱和的弧就对其容量进行修改, 修改后的容量应为其剩余容量。
- Step4: 当前网络中已经没有  $(v_s, v_t)$  路时结束增广, 这时算出路径最小费用最大流  $\omega = \sum_{(v_i, v_j) \in P} \omega_{ij} \cdot f_{ij}$ 。

3 新算法在产品运输模型中的应用

3.1 产品运输模型

现有一个工厂, 由于销售量的增加欲将一批产品通过单行公路运到城市的某仓库。已知在不同的单行公路上, 每千克产品的运输费用是不同的, 每条单行公路只能承有限量的货物, 问应该怎样安排运输路线才能使总的费用最低。

现把这个运输系统看作是容量-费用网络  $D = (V, A, c, w)$ , 如图 1 所示。工厂看作是发点  $v_s$ , 仓库看作是收点  $v_t$ , 公路间的交叉点看作各个顶点  $v_i$ , 对于任意一条公路, 令公路的两端点是  $v_i$  和  $v_j$ , 那么每一条公路看作一条弧  $(v_i, v_j) \in A$ , 产品的单位运输费用  $\omega_{ij}$  表示, 公路的承载量用容量  $c_{ij}$  表示, 那么此问题就可以转化成求容量网络的最小费用最大流问题。

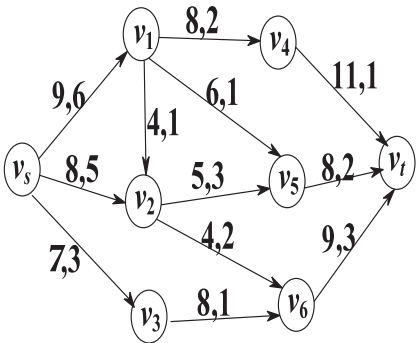
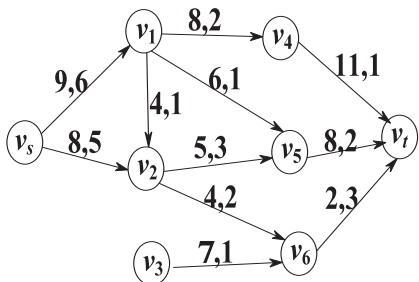


图 1 容量费用网络图

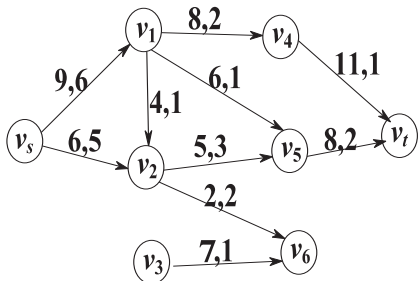
3.2 模型求解

求出上述模型中从  $v_s$  到  $v_t$  的最小费用最大流。

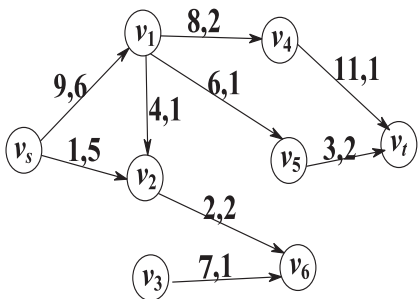
(1) 首先算出所有  $(v_s, v_t)$  路的费用差,  $v_s v_1 v_4 v_t$  的费用差为  $6-1=5$ ;  $v_s v_1 v_5 v_t$  的为  $6-1=5$ ;  $v_s v_1 v_2 v_5 v_t$  的为  $6-1=5$ ;  $v_s v_1 v_2 v_6 v_t$  的为  $6-1=5$ ;  $v_s v_2 v_5 v_t$  的为  $5-2=3$ ;  $v_s v_2 v_6 v_t$  的为  $5-2=3$ ;  $v_s v_3 v_6 v_t$  的为  $3-1=2$ 。根据新算法选择  $v_s v_3 v_6 v_t$ , 增广的流量为  $\sigma_1 = \min\{7, 8, 9\} = 7$ , 增广后的图为图 2。

图 2 选取增广链  $v_s v_3 v_6 v_t$  并进行增广

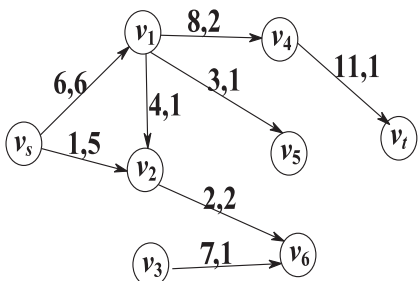
(2) 根据新算法,  $v_s v_2 v_5 v_t$  和  $v_s v_2 v_6 v_t$  的费用都是 3, 那么根据修正原则计算出每条有向路径的费用和:  $v_s v_2 v_5 v_t$  的费用和为 71,  $v_s v_2 v_6 v_t$  的费用和为 54, 那些选择  $v_s v_2 v_6 v_t$ . 增广的流量为  $\sigma_2 = \min\{8, 4, 2\} = 2$ , 增广后的图为图 3.

图 3 选取增广链  $v_s v_2 v_6 v_t$  并进行增广

(3)  $v_s v_2 v_6 v_t$  增广后, 此时应按  $v_s v_2 v_5 v_t$  增广, 增广的流量为  $\sigma_3 = \min\{6, 5, 8\} = 5$ , 增广后的图如图 4.

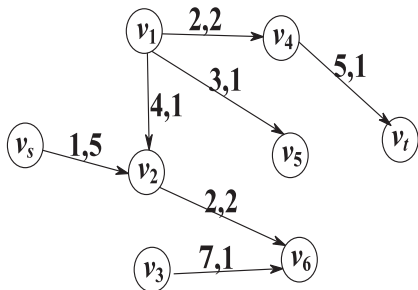
图 4 选择增广链  $v_s v_2 v_5 v_t$  并进行增广

(4) 此时所有的  $(v_s, v_t)$  路为  $v_s v_1 v_4 v_t$  和  $v_s v_1 v_5 v_t$ , 并且两者的费用差均为 5,  $v_s v_1 v_4 v_t$  的费用和为 81,  $v_s v_1 v_5 v_t$  的费用和为 66, 故选择  $v_s v_1 v_5 v_t$  进行增广, 增广的流量为  $\sigma_4 = \min\{9, 6, 3\} = 3$ , 增广后的图如图 5.

图 5 选择增广链  $v_s v_1 v_5 v_t$  并进行增广

(5) 当前图只剩下一条有向路径  $v_s v_1 v_4 v_t$ , 对其增广, 增广的流量为  $\sigma_5 = \min\{6, 8, 11\} = 6$ , 增广后的图

如图 6.

图 6 选择增广链  $v_s v_1 v_4 v_t$  并进行增广

当前已经不存在  $(v_s, v_t)$  路了, 所以不能进行增

广, 计算出最大流  $v(f) = f + \sum_{i=1}^5 \sigma_i = 23$ , 最小费用最大流为  $\omega = \sum_{\langle v_i, v_j \rangle \in P} \omega_{ij} \cdot v(f_{ij}) = 200$ .

## 4 结束语

文中提出的最小费用最大流的新算法的主要特点是路径的选择方法, 通过选择适当的路径进行增广从而达到要求, 该算法过程清晰, 直观性强, 适用于小规模网络, 对于大规模网络就不是特别适用。

## 参考文献:

- [1] 谢政. 网络算法与复杂性理论[M]. 北京: 国防科技大学出版社, 2003.
- [2] 王桂平, 王衍, 任嘉辰. 图论算法理论、实现及应用[M]. 北京: 北京大学出版社, 2011.
- [3] Cormen T H L, Eiserson C E, Rivest R L. Introduction to algorithms[M]. 2nd ed. Cambridge, USA: Mitpress, 2001.
- [4] Loachim I. A dual programming algorithm for the shortest path problem[J]. Networks, 1998, 31(2): 192-204.
- [5] 程德文, 吴育华. 求最小费用最大流的改进标号法[J]. 系统管理学报, 2009, 18(2): 237-240.
- [6] 金友良, 张同全. 最小费用排序问题[J]. 云南民族大学学报(自然科学版), 2007, 16(3): 222-224.
- [7] 赵礼峰, 宋常城, 白睿. 基于最小费用最大流问题的“排序”算法[J]. 计算机技术与发展, 2011, 21(12): 82-85.
- [8] 赵礼峰, 白睿, 宋常城. 求解最小费用最大流的新方法[J]. 计算机技术与发展, 2012, 22(5): 94-96.
- [9] 夏林林, 叶茂英, 杨凌云, 等. 求解最小费用流问题的蚁群算法[J]. 内江师范学院学报, 2010, 25(6): 30-32.
- [10] 刘冰, 卢虎生, 高学东, 等. 最小费用流问题的一种改进算法[J]. 运筹与管理, 2004, 13(3): 56-60.
- [11] 冯雷, 顾晶涛. 电站最小费用 MATLAB 优化仿真[J]. 计算机仿真, 2007, 24(12): 218-221.
- [12] 谢凡荣. 运输网络中求最小费用最大流的一个算法[J]. 运筹与管理, 2000, 9(4): 33-38.
- [13] 张远福, 谭毓澄, 余剑敏. 制造网络的一个最小费用最大流算法[J]. 江西师范大学学报(自然科学版), 2007, 31(6): 622-624.

最小费用最大流问题的一种新算法

作者：[赵礼峰](#)，[陶晓莉](#)，[ZHAO Li-feng](#)，[TAO Xiao-li](#)

作者单位：[南京邮电大学 理学院, 江苏 南京, 210023](#)

刊名：[计算机技术与发展](#)

ISTIC

英文刊名：[Computer Technology and Development](#)

年，卷(期)：2014(1)

本文链接：[http://d.wanfangdata.com.cn/Periodical\\_wjfz201401033.aspx](http://d.wanfangdata.com.cn/Periodical_wjfz201401033.aspx)