

# 张量线性判别分析算法研究

赵越<sup>1</sup>, 徐鑫<sup>1</sup>, 乔利强<sup>2</sup>

(1. 渤海大学 大学计算机教研部, 辽宁 锦州 121013;

2. 东北大学 信息学院, 辽宁 沈阳 110819)

**摘要:**针对传统线性判别分析中存在的小样本问题及对 TensorLDA 算法中两个投影矩阵不能同时计算、低维特征提取不充分的问题,文中研究并实现了张量子空间下的张量线性判别分析(TensorLDA)算法。并且提出了 It-TensorLDA 算法,即先用单位矩阵初始化,再利用优化准则求另一个投影矩阵,并进行多次迭代的改进方法。采用 ORL 数据库测试算法的性能,在 ORL 人脸数据库上 It-TensorLDA 比 TensorLDA 的平均识别率高 1.88%,比 Fisherfaces 的平均识别率高 3.03%。因此,文中算法有效避免了小样本问题,提高了人脸识别效果。

**关键词:**线性判别分析;张量;子空间;张量线性判别分析;特征提取

**中图分类号:**TP301

**文献标识码:**A

**文章编号:**1673-629X(2014)01-0073-04

doi:10.3969/j.issn.1673-629X.2014.01.019

## Research of Tensor Linear Discriminant Analysis Algorithm

ZHAO Yue<sup>1</sup>, XU Xin<sup>1</sup>, QIAO Li-qiang<sup>2</sup>

(1. Teaching and Research Institute of College Computer, Bohai University, Jinzhou 121013, China;

2. College of Information Science & Engineering, Northeastern University, Shenyang 110819, China)

**Abstract:** Aiming at problems of small sample existed in the traditional linear discriminant analysis and two projection matrixes of TensorLDA algorithms cannot calculate, low-dimensional feature extraction is not sufficient, study and implement TensorLDA based on tensor subspace. And the It-TensorLDA algorithm is presented, which first initializes with unit matrix, then uses the optimized criterion to get another projection matrix, carrying on many times iteration. Apply ORL human dataset to test the performance of algorithm. The experiments show that in ORL dataset It-TensorLDA is 1.88% higher than TensorLDA and 3.03% compared with Fisherfaces. So, the algorithm avoids the small sample problem, enhances the efficiency of face recognition.

**Key words:** linear discriminant analysis; tensor; subspace; tensor linear discriminant analysis; feature extraction

## 0 引言

线性代数,例如向量、矩阵等,在数据处理中起到了巨大的作用,被广泛应用于各个领域中。典型的线性算法有主成分分析方法(Principal Component Analysis, PCA)<sup>[1]</sup>、线性判别分析方法(Linear Discriminant Analysis, LDA)<sup>[2]</sup>,但是线性函数及算法只能处理单个因素的变化,已经不能满足复杂数据的处理。而多重线性代数(张量)的应用弥补了这种缺陷。

针对传统线性判别分析中存在的小样本问题,学者将 LDA 扩展到张量子空间下,提出张量线性判别分析(Tensor Linear Discriminant Analysis, TensorLDA)<sup>[3]</sup>。但 TensorLDA 算法中存在两个投影矩阵不能同时计算、低维特征提取不充分的问题。针对该问

题文中提出了先用单位矩阵初始化,再利用优化准则求另一个投影矩阵,并进行多次迭代的改进方法。

## 1 线性判别分析

线性判别分析方法(LDA)是 Fisher 判别分析在多元问题上的扩展<sup>[4-6]</sup>。与 PCA 一样都属于基于子空间的特征提取方法,即用低维的子空间描述高维的数据特征。PCA 是非监督的,不需要样本的类别信息,提取的是样本中最具代表性的特征,使数据的重构误差最小。而 LDA 是监督的,需要预先知道样本的类别,提取最有利于分类的特征,使同类样本更加接近,不同类样本互相分离,以使不同类数据之间的可分类性最好。

收稿日期:2013-03-02

修回日期:2013-06-22

网络出版时间:2013-11-12

基金项目:国家自然科学基金资助项目(60970157)

作者简介:赵越(1979-),女,辽宁抚顺人,博士研究生,讲师,研究方向为人工智能增强实现。

网络出版地址: <http://www.cnki.net/kcms/detail/61.1450.TP.20131112.1639.032.html>

但传统线性判别分析在某些应用中(如人脸识别等)存在因训练样本不足引起类内散布矩阵奇异的小样本问题。当样本的个数大于样本的维数时,总的类内离散度矩阵  $S_w$  是非奇异的,可以直接通过求解  $S_w^{-1}S_bW = \lambda W$  来求解最优投影方向。当样本的维数大于样本的个数时,总的类内离散度矩阵  $S_w$  奇异无法直接进行特征值分解。这时就遇到了(如人脸识别中)很普遍的小样本问题。

为了解决小样本问题,许多学者提出了多种方法,比较典型的有:Belhumeur、Hespanha 等提出的 Fisher-faces 法<sup>[7]</sup>;Chen<sup>[8]</sup>等提出的零空间法;Yu<sup>[9]</sup>等提出来的直接 LDA (Direct LDA, D-LDA) 方法;Wang 和 Tang<sup>[10]</sup>提出的双空间 (Dual-Space) 法。但这些方法存在分类阶段复杂,需要选择恰当的融合技术等问题。鉴于这些问题,学者们将 LDA 扩展到张量子空间下,提出了张量线性判别分析方法。

## 2 张量线性判别分析

张量线性判别分析方法是传统线性判别分析方法在张量子空间上的扩展<sup>[11-12]</sup>。它在张量域对样本进行处理,并提取样本的特征。相比于向量,有效保留了样本的结构信息,并且更充分地利用了收集到的信息。同时还避免了 LDA 中存在的小样本问题,提高了学习性能。

TensorLDA 算法在监督模型中应用<sup>[13]</sup>,充分保留样本的结构信息。TensorLDA 算法的目标是求出最大可分性的张量子空间,当把数据点投影到张量子空间时,不同类的数据点会互相分离,同类的数据点会互相靠近<sup>[14]</sup>。与传统的 LDA 算法相似,TensorLDA 的目标函数如下:

$$\max_{U,V} = \frac{\sum_{i=1}^k n_i \|M_i^{(Y)} - M^{(Y)}\|^2}{\sum_{i=1}^k \sum_{j \in C_i} \|Y_j - M_i^{(Y)}\|^2} \quad (1)$$

其中,  $Y_i = U^T X_i V \in R^{l_1 \times l_2}$  为投影后样本;  $M^{(Y)}$  为投影后样本总体平均值,由公式(2)给出;  $M_i^{(Y)}$  为投影后每一类样本的平均值,由公式(3)给出。

$$M^{(Y)} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n Y_j \quad (2)$$

$$M_i^{(Y)} = \frac{1}{n_i} \sum_{j \in C_i} Y_j \quad (3)$$

由  $\|A\|^2 = \text{tr}(AA^T)$ , 可得

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \sum_{j \in C_i} \|Y_j - M_i^{(Y)}\|^2 &= \\ \sum_{i=1}^k \sum_{j \in C_i} \text{tr}((Y_j - M_i^{(Y)})(Y_j - M_i^{(Y)})^T) &= \\ \text{tr}(\sum_{i=1}^k \sum_{j \in C_i} U^T (X_j - M_i^{(X)}) V V^T (X_j - \end{aligned}$$

$$M_i^{(X)})^T U) = \text{tr}(U^T S_w^V U) \quad (4)$$

其中

$$S_w^V = \sum_{i=1}^k \sum_{j \in C_i} (X_j - M_i^{(X)}) V V^T (X_j - M_i^{(X)})^T$$

接着计算:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k n_i \|M_i^{(Y)} - M^{(Y)}\|^2 &= \\ \sum_{i=1}^k n_i (\text{tr}((M_i^{(Y)} - M^{(Y)})(M_i^{(Y)} - M^{(Y)})^T)) &= \\ \text{tr}(\sum_{i=1}^k n_i U^T (M_i^{(X)} - M^{(X)}) V V^T (M_i^{(X)} - M^{(X)})^T U) &= \text{tr}(U^T S_b^V U) \end{aligned} \quad (5)$$

其中

$$S_b^V = \sum_{i=1}^k n_i (M_i^{(X)} - M^{(X)}) V V^T (M_i^{(X)} - M^{(X)})^T$$

同理,  $\|A\|^2 = \text{tr}(A^T A)$ , 可得:

$$\sum_{i=1}^k \sum_{j \in C_i} \|Y_j - M_i^{(Y)}\|^2 = \text{tr}(V^T S_w^U V) \quad (6)$$

$$S_w^U = \sum_{i=1}^k \sum_{j \in C_i} (X_j - M_i^{(X)}) U U^T (X_j - M_i^{(X)})^T \quad (7)$$

及

$$\sum_{i=1}^k n_i \|M_i^{(Y)} - M^{(Y)}\|^2 = \text{tr}(V^T S_b^U V) \quad (8)$$

$$S_b^U = \sum_{i=1}^k n_i (M_i^{(X)} - M^{(X)})^T U U^T (M_i^{(X)} - M^{(X)}) \quad (9)$$

保持数据结构的最优比例应该同时最大化  $U^T S_w^V U / U^T S_b^V U$  和  $V^T S_w^U V / V^T S_b^U V$ 。  $U$  和  $V$  可通过计算下列特征式得到:

$$S_b^V a = \lambda S_w^V a \quad (10)$$

$$S_b^U a = \lambda S_w^U a \quad (11)$$

因为矩阵  $S_b^V, S_b^U, S_w^V$  和  $S_w^U$  都是与  $U$  和  $V$  相关的,无法确定,所以,  $U$  和  $V$  不能独自计算。为简化问题,增加以下约束条件:  $U$  和  $V$  是标准正交的,即  $UU^T = U^T U = I$  和  $VV^T = V^T V = I$ 。增加条件后下面四个矩阵就可以根据训练数据独自计算得到。

$$S_w^U = \sum_{i=1}^k \sum_{j \in C_i} (X_j - M_i^{(X)})^T (X_j - M_i^{(X)}) \quad (12)$$

$$S_b^U = \sum_{i=1}^k n_i (M_i^{(X)} - M^{(X)})^T (M_i^{(X)} - M^{(X)}) \quad (13)$$

$$S_w^V = \sum_{i=1}^k \sum_{j \in C_i} (X_j - M_i^{(X)}) (X_j - M_i^{(X)})^T \quad (14)$$

$$S_b^V = \sum_{i=1}^k n_i (M_i^{(X)} - M^{(X)}) (M_i^{(X)} - M^{(X)})^T \quad (15)$$

## 3 改进型张量线性判别分析 (It-TensorLDA)

针对投影矩阵  $U$  和  $V$  不能同时计算的问题,定义

了两个优化函数来确定  $U$  和  $V$ 。对于一个固定的  $V, U$  通过下面这个优化函数来实现:

$$J(U) = \max_{\text{trace}}((U^T S_w^V U)^{-1} (U^T S_b^V U)) \quad (16)$$

其中,  $S_w^V$  和  $S_b^V$  由下面定义得出:

$$S_b^V = \sum_{i=1}^k n_i (M_i^{(X)} - M^{(X)}) V V^T (M_i^{(X)} - M^{(X)})^T \quad (17)$$

$$S_w^V = \sum_{i=1}^k \sum_{j \in C_i} (X_j - M_i^{(X)}) V V^T (X_j - M_i^{(X)})^T \quad (18)$$

对于固定的  $U, V$  通过下面优化函数来实现:

$$J(V) = \max_{\text{trace}}((V^T S_w^U V)^{-1} (V^T S_b^U V)) \quad (19)$$

其中,  $S_w^U$  和  $S_b^U$  由下面定义给出:

$$S_b^U = \sum_{i=1}^k n_i (M_i^{(X)} - M^{(X)})^T U U^T (M_i^{(X)} - M^{(X)}) \quad (20)$$

$$S_w^U = \sum_{i=1}^k \sum_{j \in C_i} (X_j - M_i^{(X)})^T U U^T (X_j - M_i^{(X)}) \quad (21)$$

最终得到  $V$  是由  $(S_w^U)^{-1} S_b^U$  的特征向量构成,  $U$  是由  $(S_w^V)^{-1} S_b^V$  的特征向量构成。如果要把原始张量空间降为  $l_1 \times l_2$  维张量子空间,则在  $U$  中选择前  $l_1$  个列向量,在  $V$  中选择前  $l_2$  个列向量组成投影矩阵。为了得到更好的实验效果,可以在  $U$  中选择前  $l_1$  个列向量以及在  $V$  中选择前  $l_2$  个列向量组成的投影矩阵带入公式(17)、公式(18)和公式(20)、公式(21)中进行迭代计算。TensorLDA 改进后的算法为 It-TensorLDA。

总之,It-TensorLDA 算法按下面步骤求解:

(1) 按上面所述计算  $S_w^U, S_b^U, S_w^V, S_b^V$ 。

(2) 用单位矩阵初始化固定投影矩阵  $V$ , 计算投影矩阵  $U = [u_1, u_2, \dots, u_m]$ , 其中  $u_i$  是矩阵  $(S_w^V)^{-1} S_b^V$  的特征值所对应的特征向量。

(3) 利用前面得到的投影矩阵  $U$ , 计算投影矩阵  $V = [v_1, v_2, \dots, v_n]$ , 其中  $v_i$  是矩阵  $(S_w^U)^{-1} S_b^U$  的最大特征值对应的特征向量。

(4) 要把原始的张量空间投影到  $l_1 \times l_2$  维的张量子空间中,则在  $U$  中选择前  $l_1$  个列向量,在  $V$  中选择前  $l_2$  个列向量组成投影矩阵。然后再将  $U$  和  $V$  带入公式中迭代计算,直到满足迭代次数。

## 4 实验结果与分析

为验证算法的有效性,文中在 ORL 人脸数据集上进行人脸识别测试实验。实验中该算法(It-TensorLDA)分别与 TensorLDA 以及 Fisherfaces 进行比较,对算法的性能进行验证。

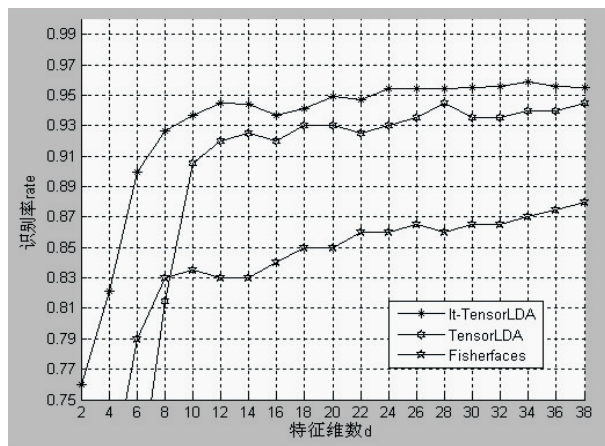
### 4.1 实验测试环境

实验的运行环境为:操作系统—Windows XP Pro-

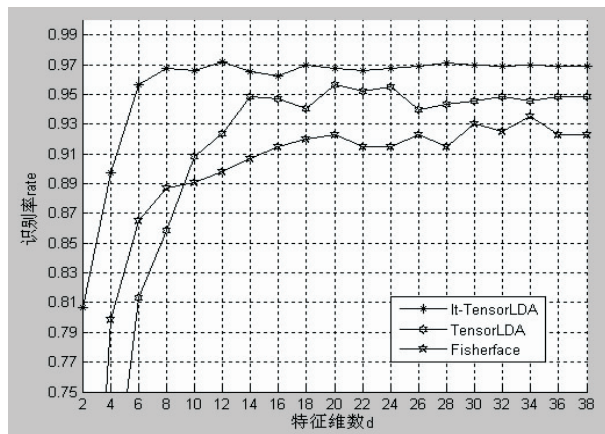
fessional(SP3);处理器—Intel(R) CoreTM2 CPU 8400 @ 2.66 GHz;内存—DDR2 667 2 GB,在 Matlab 2009 (b)集成开发环境中编写和测试。

### 4.2 ORL 人脸数据库测试

实验中选取每个人的 2、3、4、5、6、7、8 幅图像作为训练样本集,剩下的样本作为测试样本集。为了避免不同样本选取的影响,重复实验 10 次,每次选取的样本都是随机的,最终的实验结果是这 10 次的平均值。考察 It-TensorLDA、TensorLDA 以及 Fisherfaces 在不同特征维数下识别率的变化情况,需要说明的是 Fisherfaces 的有效特征维数是  $40-1=39$  维,It-TensorLDA 和 TensorLDA 中  $U$  和  $V$  有效特征维数分别为 112 和 92。为了比较方便,统一压缩到 39 维之内,It-TensorLDA 中的特征维数是同时指  $U$  和  $V$  的维数,这样并不影响问题本质。分类则采用基于 Euclidean 距离的最近邻分类器。图 1(a)为每类选取 5 ( $40 \times 5$ ) 个样本作为训练样本,5 ( $40 \times 5$ ) 个作为测试样本识别率随特征维数的变化情况。图 1(b)为每类选取 7 ( $40 \times 7$ ) 个样本作为训练样本,3 ( $40 \times 3$ ) 个作为测试样本识别率随特征维数的变化情况。



(a) 5 个训练下不同维数对应的识别率



(b) 7 个训练下不同维数对应的识别率

图 1 ORL 人脸库中不同训练样本下识别率随特征维数的变化

表 1 是 ORL 人脸数据库上几种改进 LDA 算法识别性能的比较,其中的识别率指的是在每个训练样本下达到的最大识别率。

从表 1 中可以看出,Fisherfaces 在 ORL 人脸数据库上的平均识别率为 91.65%,TensorLDA 和 It-TensorLDA 的平均识别率为 92.80% 和 94.68%,分别比 Fisherfaces 的平均识别率高 1.15% 和 3.03%,It-TensorLDA 比 TensorLDA 的平均识别率高 1.88%。It-TensorLDA 的识别效果更好。

表 1 ORL 人脸数据库上几种改进 LDA 算法识别性能比较 %

方法\识别率	3	4	5	6	7	8	平均
Fisherfaces	85.32	87.54	90.80	93.17	95.24	97.83	91.65
TensorLDA	87.25	89.80	92.32	94.05	95.14	98.26	92.80
It-TensorLDA	87.86	93.33	95.20	96.25	96.67	98.75	94.68

5 结束语

文中提出的 It-TensorLDA 算法,首先对 TensorLDA 算法用单位矩阵初始化,再利用优化准则求另一个投影矩阵,并进行多次迭代。经 ORL 人脸数据库测试,对于小样本问题,其算法识别性能优于 TensorLDA 和 Fisherfaces 算法。

参考文献:

[1] Turk M, Pentland A P. Face recognition using eigenfaces [C]//Proc of IEEE conference on computer vision and pattern recognition. USA;Maui,1991;586-591.

[2] 刘青山,卢汉清,马颂德. 综述人脸识别中的子空间方法[J]. 自动化学报,2003,29(6):900-911.

[3] 温浩. 张量子空间人脸识别算法研究[D]. 西安:西安电子科技大学,2010.

(上接第 72 页)

[J]. 科技信息,2008(13):58-58.

[3] 李冰,陈自力. 软件测试数据生成方法研究[J]. 测试技术学报,2004,18(Sup):27-29.

[4] 李丹. 软件测试需求的开发与管理[J]. 电子产品可靠性与环境试验,2008,26(5):55-59.

[5] 刘庆峰,胡勤霞,张芝龙. 软件测试质量管理设计分析与思考[J]. 国防技术基础,2010(6):14-17.

[6] 张维俊,胡欣. 军用软件过程对成本的影响分析[J]. 船舶电子工程,2009(4):110-112.

[7] 马亮,张刚. 测试用例自动生成方法的现状及研究

[4] Ye Lieping,Janardan R,Park C H. An optimization criterion for generalized discriminant analysis on undersampled problems[J]. IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence,2004,33(8):982-984.

[5] 凌志刚,梁彦,潘泉,等. 基于张量子空间学习的人行为识别方法[J]. 中国图象图形学报,2009,14(3):394-400.

[6] 张艳君. 基于 PCA 和 LDA 融合的人脸鉴别方法研究[D]. 南昌:华东交通大学,2006.

[7] Belhumeur P,Hespanha J,Kriegman D. Eigenfaces vs Fisherfaces;Recognition using class specific linear projection[J]. IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence,1997,19(7):711-720.

[8] Chen Lifen,Liao H Y M,Ko M T. A new LDA-based face recognition system which can solve the small sample size problem[J]. Pattern recognition,2000,33(10):1713-1726.

[9] Yu H,Yang J. A direct LDA algorithm for high-dimensional data with application to face recognition[J]. Pattern recognition,2001,34(11):2067-2070.

[10] Wang Xiaogang,Tang Xiaou. Dual-space linear discriminant analysis for face recognition[C]//Proc of IEEE computer society conference on computer vision and pattern recognition. USA;Washington,2004;1063-1069.

[11] 郭志强. 基于子空间分析的人脸识别算法研究[D]. 武汉:武汉理工大学,2010.

[12] 杜慧. 张量和小波特征的洛伦兹度量学习及其应用[D]. 大连:大连理工大学,2010.

[13] Christian T,Joselqncacio G,Javier S,et al. Improving face recognition by combination of natural and Gabor faces[J]. Pattern recognition letters,2010,31(11):1453-1460.

[14] Yin H,Liu H. Nonnegative matrix factorization with bounded total variational regularization for face recognition[J]. Pattern recognition letters,2010,31(16):2468-2473.

[J]. 现代电子技术,2008(6):126-129.

[8] 时冬妮. 软件测试流程研究[J]. 硅谷,2009(2):77-78.

[9] 赵全斌. Excel 工程应用[M]. 北京:清华大学出版社,2009.

[10] 格林. Excel 2007 参考大全[M]. Excel Home,译. 北京:人民邮电出版社,2009.

[11] Walkenbaeh J. 中文 Excel 2007 高级 VBA 编程[M]. 冯飞,焦瑜净,译. 北京:清华大学出版社,2009.

[12] Jelen B,Syrstad T. Excel 2007 VBA 与宏完全剖析[M]. 郭兵英,译. 北京:人民邮电出版社,2008.

张量线性判别分析算法研究

作者：赵越, 徐鑫, 乔利强, ZHAO Yue, XU Xin, QIAO Li-qiang

作者单位：赵越, 徐鑫, ZHAO Yue, XU Xin(渤海大学 大学计算机教研部, 辽宁 锦州, 121013), 乔利强, QIAO Li-qiang(东北大学 信息学院, 辽宁 沈阳, 110819)

刊名：计算机技术与发展

ISTIC

英文刊名：Computer Technology and Development

年, 卷(期):2014(1)

本文链接：[http://d.g.wanfangdata.com.cn/Periodical\\_wjfz201401019.aspx](http://d.g.wanfangdata.com.cn/Periodical_wjfz201401019.aspx)