偏微分方程的 MATLAB 数值解法及可视化

冯桂莲
(青海民族大学,青海 西宁 810007)

摘 要:偏微分方程的数值解法在数值分析中占有很重要的地位,很多科学技术问题的数值计算包括了偏微分方程的数值解问题。在学习初等函数时,总是先画出它们的图形,因为图形能帮助了解函数的性质。而对于偏微分方程,画出它们的图形并不容易,尤其是没有解析解的偏微分方程,画图就显得更加不容易了。为了从偏微分方程的数学表达式中看出其所表达的图形、函数值与自变量之间的关系,通过 MATLAB 编程,数值求解了泊松方程,并将其结果可视化,给出了解析解与数值解的误差。

关键词:偏微分方程;MATLAB;泊松方程;数值解法;可视化
中图分类号:TP31 **文献标识码**:A **文章编号**:1673-629X(2013)12-0120-04
doi:10.3969/j.issn.1673-629X.2013.12.029

Numerical Solution and Visualization by MATLAB of Partial Differential Equations

FENG Gui-lian
(Qinghai Nationalities University,Xining 810007,China)

Abstract:The numerical solution of partial differential equations plays an important role in numerical analysis,the numerical calculation of many science technology includes the numerical solution problem of the partial differential equations. In the study of primary function, always draw their graphics,because the graphics can help to understand the nature of the function. But for the partial differential equations,painting their graphics will not be easy,in particular for the partial differential equations that have no analytical solution,drawing is more difficult. In order to look out the relationship between graphics and function values and variables from the partial differential equations,through MATLAB programming,soluted the Poisson equation with numerical method,and visualizated the results. Painted the error between analytical solutions and numerical solutions.

Key words:partial differential equations;MATLAB;Poisson equation;numerical solution;visualization

0 引 言

偏微分方程是广泛应用于科学研究与工程技术的各个领域的一种数学工具。例如应用椭圆型方程与抛物型方程的领域有固体中稳恒的与非稳恒的热传导现象、可渗透介质中的流动与扩散问题、绝缘与导电材料中的静电场问题以及流场的势;应用双曲型方程的领域有声波和电磁波的传播问题和薄膜的横振动;应用本征值方程的领域有薄膜和结构力学中的固有振动问题等。

偏微分方程的数值解法在数值分析中占有很重要的地位,很多科学技术问题的数值计算包括了偏微分方程的数值解问题。近三十多年来,它的理论和方法都有了很大的发展,而且在各个科学技术领域中的应用也愈来愈广泛[1]。

在学习初等函数时,总是先画出它们的图形,因为图形能帮助了解函数的性质。而对于偏微分方程,画出它们的图形并不容易,尤其是没有解析解的偏微分方程,画图就显得更加不容易了。数学物理方程主要是偏微分方程。所以文中主要研究如何用 MATLAB 数值求解泊松方程,并将其数值解绘制成三维图形的形式,从而可以从复杂的数学表达式中看出其所表达的图像、函数值与自变量之间的关系。

收稿日期:2013-03-13 **修回日期**:2013-06-20 **网络出版时间**:2013-09-29
基金项目:国家民委科研项目(12QHZ002);教育部"春晖计划"2012 年科研项目(Z2012041)
作者简介:冯桂莲(1979-),女(藏族),青海湟源人,副教授,硕士,CCF 会员,主要从事计算机专业教学和计算机软件与理论、计算机图形学的研究工作。
网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/61.1450.TP.20130929.1548.051.html

1　MATLAB 的图形绘制

MATLAB 中提供了将工程和科学数据可视化所需的全部图形功能。这些功能包括二维和三维绘图函数、三维卷可视化函数、用于交互式创建图形的工具以及将结果输出为各种常用图形格式的功能。MATLAB 还提供了一些用于将二维矩阵、三维标量和三维向量数据可视化的函数。三维绘图函数可以绘制曲面图、轮廓图、网状图、成像图、锥形图、切割图、流程图以及等值面图等等[2]。

MATLAB 的偏微分方程工具箱对于一般常见的偏微分方程,它都能解,是一个很实用的数值计算工具。尤其是在边界条件比较简单的情况下,使用者几乎可以完全不必学习编程仅仅在图形用户界面窗口进行操作,就能得到方程的数值解。这对许多需要使用偏微分方程而不擅长编程的物理学工作者,是一个不可多得的工具。

2　MATLAB 可解偏微分方程的类型

2.1　偏微分方程的基本概念

含有未知函数 $u(x_1,x_2,\cdots,x_n,t)$ 的偏导数的方程称为偏微分方程。这里 u 是 $n+1$ 个自变量的函数。在很多应用问题中,专门用 t 表示时间变量, $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 表示空间变量。其中遇到方程和未知函数不止一个时,出现的偏微分方程组,用到的 Laplace 算子是

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial {x_1}^2}+\frac{\partial^2}{\partial {x_2}^2}+\cdots+\frac{\partial^2}{\partial {x_n}^2}$$

记

$$\nabla=e_1\frac{\partial}{\partial x_1}+e_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\cdots+e_n\frac{\partial}{\partial x_n}$$

其中,$e_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是 R_n 中坐标轴上正向的单位向量,有 $\Delta=\nabla\cdot\nabla$。

对于一个 n 阶常微分方程,常常可以将其解写成依赖于 n 个任意常数的通解形式。但是对于偏微分方程,情况就要复杂得多,一般很难用通解的形式表示。如果在 R_n 的某个区域 Ω 内求解方程,即要求 $x\in\Omega$ 时,$u=u(x,t)$ 满足方程,一般在 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 上给出 u 的条件,称之为边界条件。在含时间变量 t 的问题中,在超平面 $t=t_0$ 给出的条件称为初始条件。除了边界条件和初始条件外,有时还会出现其他的定解条件。给出了方程和定解条件,就构成了一个定解问题。

2.2　MATLAB 可解偏微分方程的类型

定义在二维有界区域 Ω 上的下列形式的方程可以用 MATLAB 求解。

(1)椭圆型。基本形式为:

$$-\nabla\cdot(c\nabla u)+au=f$$

(2)抛物型。基本形式为:

$$d\frac{\partial u}{\partial t}-\nabla(c\nabla u)+au=f$$

具有初始条件为 $u_0=u(t_0)$。

(3)双曲型。基本形式为:

$$d\frac{\partial^2 u}{\partial^2 t}-\nabla(c\nabla u)+au=f$$

具有初始条件为 $u_0=u(t_0)$,$u_0'=u(t_0)'$。

(4)本征值方程。基本形式为:

$$-\nabla\cdot(c\nabla u)+au=\lambda du$$

其中,u 是偏微分方程的解;c,a,f,d 是标量复函数形式的系数,在抛物型和双曲型方程中,它们也可以是 t 的函数, λ 是待求的本征值。

当系数 c,a,f 是 u 的函数时,称之为非线性方程组,形式为:

$$-\nabla\cdot(c(u)\nabla u)+a(u)u=f(u)$$

这也可以用 MATLAB 求解[3]。

对于高阶的方程组系统,可以用指令求解。对于椭圆型方程,可以用自适应网格算法求解,这种方法也能与非线性解法联合使用。

3　偏微分方程的边界条件

解方程所需要的边界条件可以是以下两种之一:

(1)Dirichlet 边界条件:

$$hu=r$$

(2)Generalized Neumann 边界条件:

$$n\cdot(c\nabla u)+qu=g$$

其中,n 为边界外法向单位向量;g,q,h,r 是在边界上定义的复函数。对于本征值问题,仅限于齐次条件即 $g=0,r=0$。对于非线性问题,系数 g,q,h,r 可以与 u 有关。对于抛物型方程和双曲型方程,系数可以与时间 t 有关[4]。

在数学物理方法教材中,Dirichlet 边界条件也称第一类边界条件,而 Generalized Neumann 边界条件则称为第三类边界条件,如果 $q=0$ 则称第二类边界条件。

在有限元法中,Dirichlet 边界条件称为基本边界条件,诺伊曼条件也称自然边界条件[5]。

4　偏微分方程的 MATLAB 求解过程

虽然偏微分方程工具箱有一个十分方便的操作界面,但是使用偏微分方程工具箱的指令能够完成一些更灵活的任务,比如想画出比直线、椭圆、多边形更复杂的几何区域,设定非标准式的边界条件,指定更复杂的方程系数等[6]。

不同的指令用不同的数据,要学会使用指令就要弄清数据结构与指令间的关系。

求解偏微分方程的过程如图 1 所示。在图中,用矩形框表示指令,椭圆是用矩阵或 M 文件表示的数据,箭头表示指令所要用的数据。

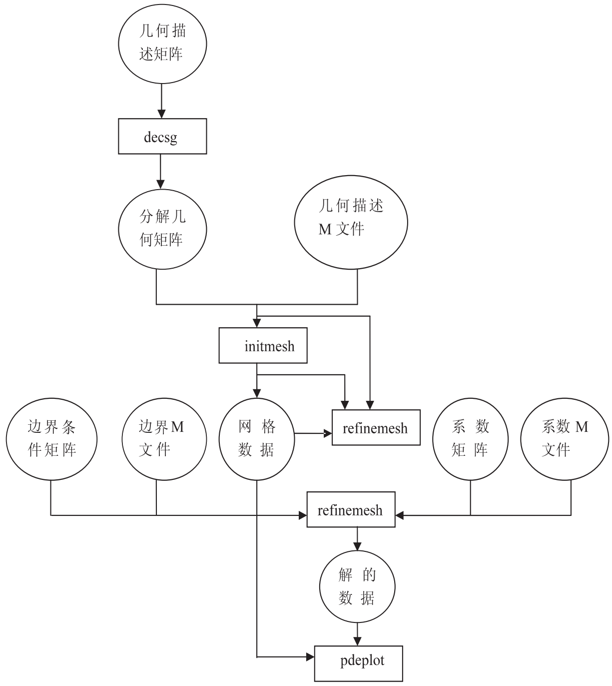

图 1　求解偏微分方程的流程图

下面对不同的数据结构和 M 文件给予简要的描述[7]。

4.1　几何区域内部

用一个几何描述矩阵、一组公式或一个命名的空间矩阵来加以说明。这些数据结构可以参看指令 decsg 的用法。

在这个层次上,问题的几何描述是一组重迭的实体。

4.2　分解的几何区域

由分解几何矩阵或几何 M 文件来描述。在这个层次上,几何区域被描述为一组由边界线和交界线所分开的最小区域。它也是由指令 decsg 所建立。也可以由图形用户界面输出。

与分解几何矩阵等效的几何 M 文件可以由指令 wgeom 建立,它们的数据结构可以参看指令 decsg 和 pdegeom。

4.3　边界条件

由矩阵或 M 文件来表示。边界条件由边界线上的函数来定义。矩阵可由图形用户界面输出。M 文件可由指令 wbound 建立。边界条件的数据结构参看指令 assempde 和 pdebound[8]。

4.4　方程系数

由系数矩阵或系数 M 文件描述每个方程的 c,a,f,d。系数是每个子区域上的函数。其数据结构参看指令 assempde。

4.5　网　格

一个三角形网格由网格数据来描述,它包括节点矩阵、边界矩阵和三角形矩阵。在网格中,最小区域分割为三角形的子区域而边界或交界则是它们的边缘。由分解区域建立的网格数据可由指令 initmesh 实现,再由指令 refinemesh 和 jigglemesh 进一步细化。指令 adaptmesh 建立的网格是求解过程的一部分。网格可以由指令 pdemesh 画出,网格数据的结构参看指令 initmesh[9]。

4.6　解

方程的解由解矢量来表示。它包括每个独立变量在网格节点上的值,它可能是几个不同时刻的值或者对应不同本征值的值。解矢量是指令 assempde,pdenolin. adapmesh,parabolic,hyperbolic,pdeeig。根据网格、边界条件和方程系数解出。由于解矢量的意义依赖于相应的数据网格,所以它们总是要一起使用[5]。

4.7　数据的最后处理和表现

得到网格及其相应的解以后,有多种工具用以处理数据和将其可视化。指令 pdeintrp 和 pdeprtni 可将定义在三角形节点上的函数和定义在三角形中点上的函数进行转换,tri2grid 将三角形网格上的函数转换为矩形网格上的函数,pdegrad 和 pdecgrad 计算解的梯度,pdecont,pdesurf 是 pdeplot 的一种简便用法[10]。

5　偏微分方程工具箱的功能演示

偏微分方程工具箱(PDE Toolbox)就是 MATLAB 中求解二维偏微分方程(含时或不含时)的工具,查看偏微分方程工具箱的演示程序可以简捷地了解偏微分方程工具箱的基本功能,操作如下:

在指令窗口键入指令 pdedemos,打开如图 2 所示的窗口。

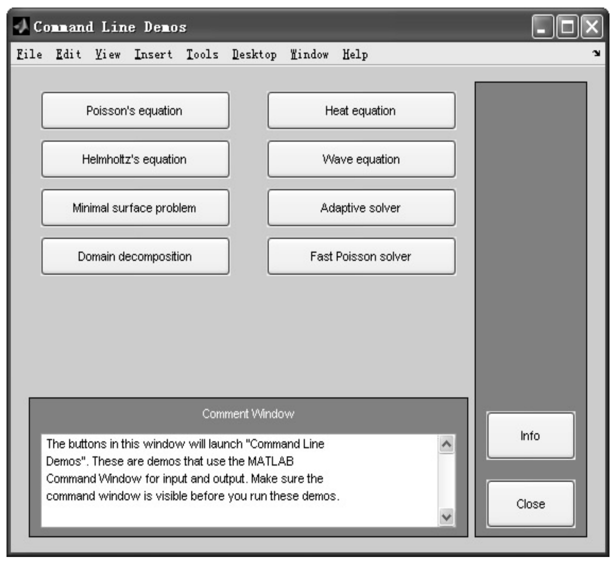

图 2　Command Line Demos 窗口

窗口的左边是 8 个演示例子的按钮,下面是注解信息框,右边是信息提示按钮和退出按钮。

这八个演示程序分别是泊松方程、亥姆霍兹方程、最小表面问题、区域分解方法、热传导方程、波动方程、椭圆型方程自适应解法和泊松方程快速解法。

6　泊松方程的 MATLAB 解法及可视化

6.1　定解问题

所解的问题是在单位圆内求解泊松方程

$-\Delta u = 1$

在单位圆的边界上有 $u=0$ 。

6.2　解的可视化

求解该问题的源程序已经在 MATLAB7.0 下调试通过,运行结果如图 3、图 4 所示。

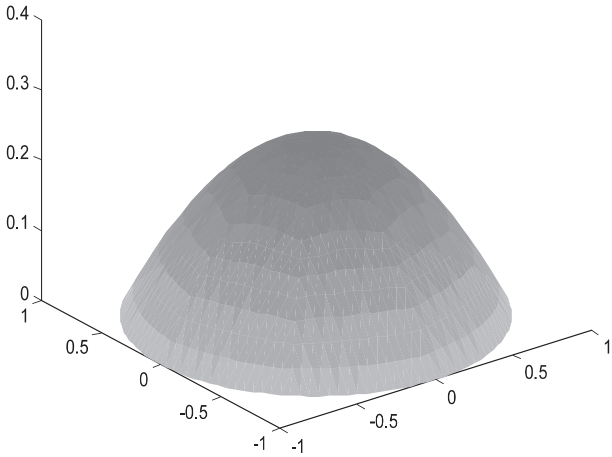

图 3　泊松方程数值解的图形

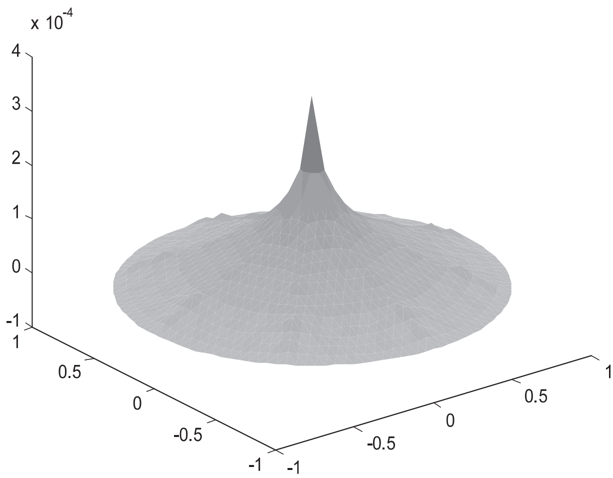

图 4　泊松方程数值解与精确解的误差

7　结束语

解偏微分方程已经成为科学与工程计算的核心内容,包括一些大型的计算和很多已经成为常规的计算。原则上,可以用 FORTRAN 或 C 语言来完成这些计算,但很少有人这样去做,原因是成本太高、编程太复杂。

而 MATLAB 是一种用于算法开发、数据可视化、数据分析以及数值计算的高级技术计算语言和交互式环境,所以使用 MATLAB 可以较使用传统的编程语言(如 C、C++ 和 Fortran)更快地解决技术计算问题。

另外,MATLAB 中提供了将工程和科学数据可视化所需的全部图形功能,包括二维和三维绘图函数、三维可视化函数、用于交互式创建图形的工具以及将结果输出为各种常用图形格式的功能[11]。

可以通过添加多个坐标轴、更改线的颜色和标记、添加批注、图例以及绘制形状,对图形进行自定义。

参考文献:

[1]　陆金甫,关　治. 偏微分方程数值解法[M]. 第 2 版. 北京:清华大学出版社,2003.

[2]　Hanselman D,Littlefield B. 精通 Matlab 7[M]. 朱仁峰,译. 北京:清华大学出版社,2006:317-326.

[3]　彭芳麟. 数物理方程的 MATLAB 解法与可视化[M]. 北京:清华大学出版社,2004:207-208.

[4]　于万波. 基于 MATLAB 的计算机图形与动画技术[M]. 北京:清华大学出版社,2007:4-16.

[5]　张志涌. 精通 MATLAB6.5 版[M]. 北京:北京航天航空大学出版社,2003:118-123.

[6]　梁昆淼. 数学物理方法[M]. 第 2 版. 北京:高等教育出版社,1998:156-178.

[7]　吴崇试. 数学物理方法[M]. 第 2 版. 北京:北京大学出版社,2003:212-223.

[8]　彭芳麟. 理论力学计算机模拟[M]. 北京:清华大学出版社,2003:32-38.

[9]　关　治,陆金甫. 数值分析基础[M]. 北京:高等教育出版社,1998:78-86.

[10]　Ames W F. Numericalmethods for partial differential equations[M]. 2nd ed. New York:Academic Press,1977:145-151.

[11]　Thomas J W. Numerical partial differential equations finite difference methods[M]. New York:Springer-Verlag,1997:113-121.

偏微分方程的MATLAB数值解法及可视化

作者： 冯桂莲， FENG Gui-lian
作者单位： 青海民族大学,青海 西宁,810007

刊名： 计算机技术与发展
ISTIC
英文刊名： Computer Technology and Development
年，卷(期)： 2013(12)