

# 交替方向法在小波域图像修复中的应用

张孟资<sup>1</sup>, 张立强<sup>2</sup>

(1. 陆军军官学院 科研部, 安徽 合肥 230031;  
2. 陆军军官学院 研究生管理大队, 安徽 合肥 230031)

**摘 要:** 图像修复作为图像处理的重要部分被应用于诸多领域, 而小波域内的图像修复是指通过使用不完整的或者不精确的小波系数来恢复原始图像。总体变换模型(TV 模型)广泛应用于图像的重构, 并提供较高的恢复质量。提出了用一种无约束的 TV 规范、 $l_2$  数据拟合模型来恢复图像。该模型可用交替方向法(ADM)求解。ADM 每次迭代计算的消耗由两个傅里叶变换和两个小波变换决定, 此变换可进行快速计算, 其迭代部分的收敛性是稳定的。通过实验分析, 可以得出 ADM 算法在小波图像修复问题中具有高效、稳定的特征。

**关键词:** 图像修复; 交替方向法; 小波变换; 总体变换模型

**中图分类号:** TP391.41

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1673-629X(2013)10-0235-03

doi:10.3969/j.issn.1673-629X.2013.10.059

## Application of Alternating Direction Method in Wavelet Domain Image Inpainting

ZHANG Meng-zi<sup>1</sup>, ZHANG Li-qiang<sup>2</sup>

(1. Scientific Research Department, Academy of Army Officer, Hefei 230031, China;  
2. Graduate Department, Academy of Army Officer, Hefei 230031, China)

**Abstract:** Image inpainting is an important image processing task in many applications. Wavelet domain refers to the recovery of an image from incomplete or inaccurate wavelet coefficients. To reconstruct the image, Total Variation (TV) models have been widely used in the literature and they produce high-quality reconstructed images. Consider an unconstrained TV-regularized,  $l_2$ -data-fitting model to recover the image. The model is solved by the Alternating Direction Method (ADM). The per-iteration computational cost of ADM is dominated by two Fourier transforms and two wavelet transforms, all of which admit fast computation. Present numerical results to show the efficiency and stability of ADM for solving wavelet domain image inpainting problems.

**Key words:** image inpainting; alternating direction method; wavelet transform; total variation model

### 0 引 言

图像修复是根据图像损坏的程度, 对相应缺失部分或者毁坏部分在像素域内或者变换域内进行填充<sup>[1]</sup>。而小波域内的图像修复是指通过使用不完整的或者不精确的小波系数来恢复原始图像。假设  $u^*$  是待修复图像。若图像无大范围的缺失, 假设  $u^*$  是一个  $n \times n$  的区域(非正方形区域同样适用)。根据处理标准, 将二维图像用一维矢量来表示。因此, 在文中, 将把  $n \times n$  的图像用  $R^n$  上的矢量来表示。那么, 图像修复问题可以通过式(1)来解决。

$$f = (PTu^* + w) \in R^p \quad (1)$$

其中,  $T \in R^{n^2 \times n^2}$  是一个变换矩阵;  $P \in R^{p \times n^2}$  是一个包含有  $n^2$  阶矩阵中  $p$  ( $p < n^2$ ) 行的投影矩阵;  $w \in R^p$  是指包含在原始图像观察过程中, 或者在系数改变后被压缩传送的过程中引入的噪声污点;  $f \in R^p$  表示有待处理的不完整、模糊的变换系数。而且, 该系数的位置(包括缺失的那部分)由  $P$  来决定。也就是说,  $T$  是恒等矩阵,  $f$  包含  $p$  列中剩余像素的近似值。像素域内修复, 其实是采用插入的方法<sup>[2]</sup>。

对于变化像素域的修复与缺失像素的修复完全不同。因为每一个单独数据的突变, 都会很大程度上影响整个图像。因此, 像素域中的待修复部分就很难精

准确定。文中,讨论如何从不完整的、不准确的小波系数中复原原始图像  $u^*$ ,  $T$  是正交小波变换,下采样矩阵  $P$  可根据相应的“阈值”规则确定,即那些远大于阈值的系数被保留,而剩余的将被舍弃。 $P$  被当作阈值压缩算子来使用。其中  $Tu^*$  的二进制表示被量化,因此只要高于规定值的位被保留,剩余低于规定值的位被舍弃,在文中,只考虑  $P$  是向下采样算子。

## 1 总体变换模型(TV 模型)

在文献[1]中,作者 Rudin, Osher 首次提出 TV 模型用于图像去噪与消除旋转。TV 模型的优势在于通过它能够图像分成块状结构并可以很好地保护边缘部分。关键的是 TV 模型是非平滑处理方式<sup>[1]</sup>。受到 TV 图像重建方法已成功运用的启发,文中提出将 TV 规则用到小波领域的图像修复技术中。如式(2)数据模型可以重建原始图像,

$$TV(u) = \min_u \sum_i \|D_i u\|_2 + \frac{\mu}{2} \|PW_u - f\|_2^2 \quad (2)$$

其中,  $W_u \in R^{n^2 \times n^2}$  表示一个离散的标准正交变换矩阵;模糊的小波系数  $f$  由式(1)给出;  $\|D_i u\|_2$  表示  $l_2$  范数,  $\sum_i \|D_i u\|_2$  是  $u$  的总体变化的离散形式,  $\sum_i$  是所有像素的积;  $\mu > 0$  是一个标量的平衡调整。文中假设噪声污点是高斯随机噪声,并且用  $l_2$  范数的平方代入。

## 2 重构式和 ADM

解决式(2)的主要难点在于其所涉及的 TV 规范是非可微的<sup>[3-4]</sup>。通过研究发现,交替方向法(ADM)可以解决这个问题<sup>[5-6]</sup>。

通过引入辅助变量  $w = [w_1, \dots, w_n]$ , 其中每个  $w_i$  是实数  $R^2$  范围内的一个列向量。所以式(2)可以被等效为:

$$\min_{u, w} \left\{ \sum_i \|w_i\| + \frac{\mu}{2} \|Pv - f\|_2^2 \mid v = W_u, w_i = D_i u, \forall i \right\} \quad (3)$$

这里  $w = [w_1, \dots, w_n]$  是  $2 \times n^2$  的矩阵。方便起见,  $w$  的第  $j$  行记为  $w_j^T, j = 1, 2$ 。因此,约束  $\{w_i = D_i u, \forall i\}$  就等效于  $w_j = D^{(j)} u, j = 1, 2$ 。

考虑重构式(2)的目的是将选择算子  $P$ 、有限差分算子  $D$  和小波变换算子  $W$  分开,以充分利用其特殊结构。这也是作为有效执行 ADM 算法的关键思想。

式(3)中的最小化问题,旨在同时解决所有变量  $(u, v, w)$ , 变量  $w$  和  $v$  是彼此独立的,因此可以同时求解它们的最小值。其次,固定  $u$ , 那么  $W$  的最小值取决

于每个  $w_i$  的最小值,  $v$  的最小化是可分离的部分。根据临界点方法来表达 ADM 方法之间的关系,则有  $(u, \lambda, \eta)^k := (u^k, \lambda^k, \eta^k)$ , 因此对于式(3)的 ADM 的迭代算法可写成如下形式:

$$\left. \begin{aligned} (v, w)^{k+1} &= \operatorname{argmin}_{v, w} (u^k, v, w, \lambda^k, \eta^k) \\ u^{k+1} &= \operatorname{argmin}_u (u, v^{k+1}, w^{k+1}, \lambda^k, \eta^k) \\ \lambda_i^{k+1} &= \lambda_i^k - \gamma \beta_1 (w_i^{k+1} - D_i u^{k+1}), \forall i \\ \eta^{k+1} &= \lambda^k - \gamma \beta_2 (v^{k+1} - W u^{k+1}) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

其中,  $\lambda_i \in R^2; \eta \in R^{n^2}$ ,  $\eta$  是乘数;  $\gamma$  是松弛系数;  $\beta_1, \beta_2$  是惩罚系数,均大于 0。

ADM 算法继承了 Gauss-Seidel 迭代的核心<sup>[7-8]</sup>, 即对于  $u$  的最小化求解运用了  $v$  和  $w$  的最新迭代。

下面给出解决式(4)的 ADM 算法的计算方式。

根据待修复图像的投影矩阵输入数据  $P$ 、小波系数  $f$  及模型参数  $\mu > 0$ , 给定  $\beta_1, \beta_2 > 0$  和  $\gamma \in (0, (\sqrt{5} + 1)/2)$ 。初始化参数:  $u = u^0, \lambda = \lambda^0$  和  $\eta = \eta^0$ 。令  $k = 0$ , 计算:  $v^{k+1}, w^{k+1}$  和  $u^{k+1}$ , 通过式(5), 更新  $\lambda^k$  和  $\eta^k$ :

$$\left. \begin{aligned} \lambda_i^{k+1} &= \lambda_i^k - \gamma \beta_1 (w_i^{k+1} - D_i u^{k+1}), \forall i \\ \eta_i^{k+1} &= \eta^k - \gamma \beta_2 (v_i^{k+1} - W u^{k+1}) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

最后,  $k: \leftarrow k + 1$ 。

这里注意到, ADM 方法每次迭代的成本主要由两个 DWT(正 DWT 用于计算  $Wu^k$ , 反的用于计算  $v^k$ ) 和两个 FFT(快速傅里叶变换) 决定(两个 FFT 用于计算  $u^{k+1}$ )。每个计算长度为  $N$  的矢量的复杂度是  $O(N \log N)$ 。其他的所有计算均为线性复杂度。同时, 如果式(2)中各向同性的 TV 模型换成各向异性的 TV 模型(即  $TV(u) = \sum_i \|D_i u\|_1$ ), 那么这个 ADM 也是可用的。因此, 式(4)中的 ADM 可以很容易被推广到其他问题上, 包括利用余弦变换的图像修复问题<sup>[9]</sup>。

## 3 实验结果与分析

实验环境为: Window XP 操作系统, Matlab 7.9, 配置为双核 2.4 GHz 的 Inter CPU 和 2 G 内存的联想计算机。通过实验来比较 ADM 和应用较多的优化传输算法(OpT 算法)的实际效率, 由于梯度下降法没有优化传输算法速度快、准确, 因此没必要加入比较。

在实验初始步骤中, 令  $u^0 = W^T P^T f, \lambda^0 = 0, \eta^0 = 0$ 。图像恢复的质量由信噪比(SNR)来评定:  $SNR = 20 \ln \frac{\|u^*\|}{\|u - u^*\|}$  其中,  $u^*, u$  分别代表原始图像和重构图像, 当连续两个点之间的相对变化渐小时, 则停止运算, 即:  $\frac{\|u^k - u^{k-1}\|}{\|u^{k-1}\|} \leq \text{tol}$ , 其中公差  $\text{tol} > 0$ 。在实验比较中, 采用三个尺寸不同的图像: Cameraman (256

×256)、Babara(512×512)、Man(1 024×1 024),如图 1 所示。

生成小波系数  $f$  前的原始图像的强度值缩放到  $[0,1]$ 。在原始图像中插入零均值高斯噪声,其标准差为 0.039 2 (相当于图像强度值  $\text{std}=10$ ,其在  $0 \sim 255$  之间变化),模型参数  $\mu$  设为 50。对于每幅图像,用随机选择的 30%、50%、70% 小波系数来测试该算法。采用松散的公差 (如  $\text{tol} = 5 \times 10^{-4}$ ) 来终止 ADM。用三个层级的数据 (30%、50% 和 70%) 来分别测试三个图像。图 2 给出了最终的目标函数值、SNR 值和 CPU 消耗时间。

从图 2 的前两个图可以看出,所有结果中,两个算法获得的目标函数值和 SNR 值大致接近。因为它们解决的是同一问题。但从第三幅图来看,ADM 比 OpT

收敛快多了。当图像尺寸越大,ADM 比 OpT 收敛越快。例如,对于 1 024×1 024 的“Man”图像,采用 30% 数据的情况下,OpT 需要消耗 CPU 时间 1 900s,而 ADM 仅需 250s。ADM 相对 OpT 的另一个优势在它 对数据量的大小并不十分敏感。ADM 的 CPU 消耗时间在 30%、50%、70% 数据量上大致相当,然而 OpT 随着数据量减小,其需要更长的时间。这些比较结果清楚地表明了 ADM 的优越性。

为了更好地观测 ADM 的收敛变化,用不同百分比 (30%、50% 和 70%) 的可用数据来测试 Cameraman (256×256) 图像 (如图 1(a))。当公差取值相对严格时 (如  $\text{tol} = 10^{-5}$ ),ADM 将由  $\frac{\|u^k - u^{k-1}\|}{\|u^{k-1}\|} \leq \text{tol}$  终止。测试结果如图 3 所示。

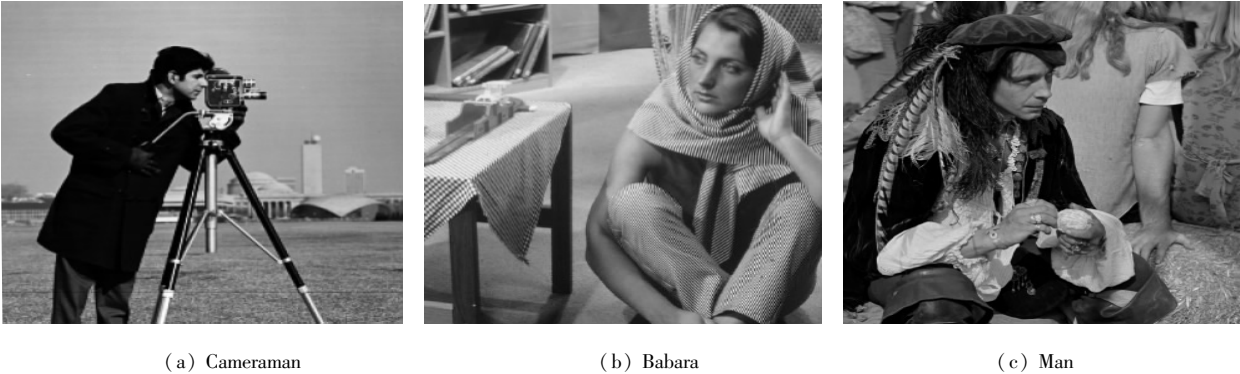


图 1 测试用图

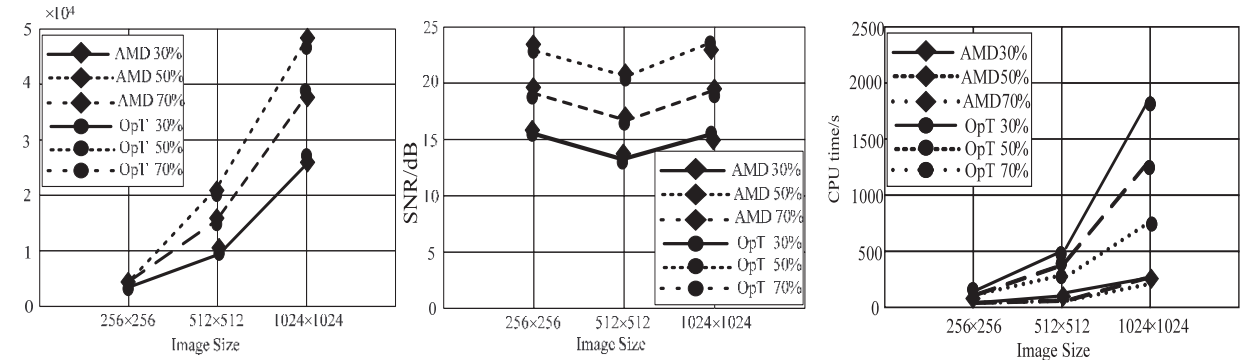


图 2 ADM 与 OpT 在三幅图像下的目标函数值、SNR 值和 CPU 消耗时间对比

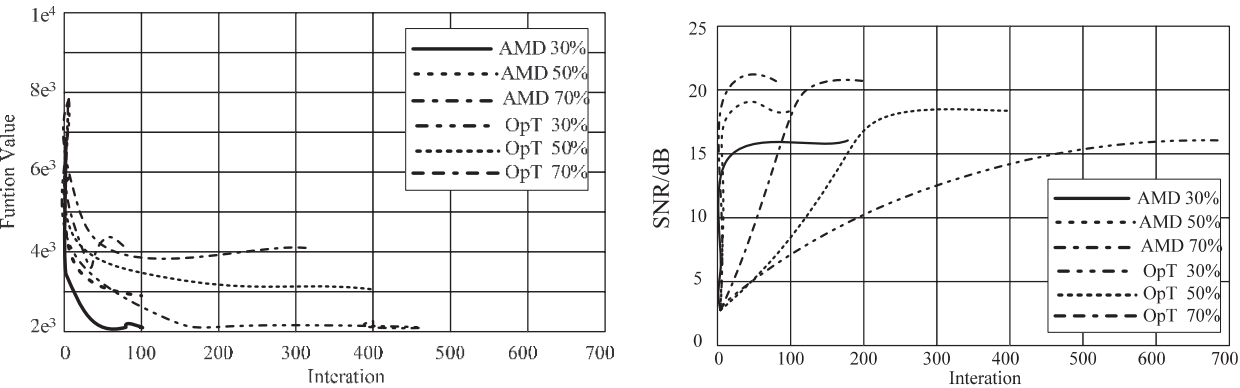


图 3 ADM 与 OpT 算法目标函数值与 SNR 值的对比

在三层级的测试中,ADM 仅需 50 ~ 60 次迭代,便可取得相对较小的目标函数值和相对较大的 SNR 值。相反,OpT 算法可以提高处理后的图像质量,但速度很低。OpT 需要至少在有 70% 可用数据的情况下进行约 250 次迭代。在仅有 30% 数据的情况下,OpT 需要多于 600 次迭代才能达到与 ADM 算法 50 ~ 60 次迭代获得的处理质量接近的效果。

#### 4 结束语

提出了一种能解决变化小波域图像修复问题的快速交替方向算法,此算法是经典拉格朗日算法的一个变体。在每次迭代中,算法的总计算耗费取决于两个 DWT 和两个 FFT 算法。在 Matlab 中运用 ADM,可以看出 CPU 消耗时间的 60% 是用于 DWT、FFT 及其各自逆运算的运算上。剩下的 CPU 消耗时间用于计算有限的差异、函数值、SNR 值等。实验结果表明,ADM 稳定、高效,并比现有方法如优化传输算法效率更高。

#### 参考文献:

[1] Rudin L, Osher S. Total variation based image restoration with

free local constraints[C]//Proc. of 1st IEEE ICIP. [s. l.]: [s. n.], 1994:31-45.

[2] Chan R, Wen Y W, Yip A M. A Fast Optimization Transfer Algorithm for Image Inpainting in Wavelet Domains[J]. IEEE Trans. on Image Proc., 2009, 18(7):1467-1476.

[3] Tao M, Yuan X M. Recovering low-rank and sparse components of matrices from incomplete and noisy observations[J]. SIAM J. Optim, 2011, 21(1):57-81.

[4] Esser E. Applications of Lagrangian-based alternating direction methods and connections to split Bregman[R]. [s. l.]: [s. n.], 2009.

[5] 张平, 檀结庆, 何蕾. 基于离散小波变换的图像修补方法[J]. 计算机应用研究, 2007, 24(9):287-289.

[6] 田艳艳, 祝轩, 彭进业, 等. 一种基于整体变分的图像修补算法及其应用[J]. 计算机工程与应用, 2008, 44(26):180-182.

[7] 李晨, 王军锋. 一种新的提升小波自适应阈值图像去噪算法[J]. 计算机技术与发展, 2012, 22(7):78-80.

[8] 郑波. 基于提升小波变换的图像去噪[J]. 广西质量监督导报, 2007(6):30-31.

[9] 王益艳, 王晖, 傅博, 等. 基于小波变换的图像自适应阈值去噪算法[J]. 微计算机应用, 2008, 29(1):15-18.

(上接第 234 页)



图 3 软件系统界面图

#### 4 结束语

该项目的实施,将实现有鲜明的藏民族特色,活泼生动,健康益智的藏汉英三语幼儿早教点播系统;将填补在藏民族地区,没有有效的多语言学习系统的空白,能更好地实现传播和弘扬民族文化,培养幼儿综合语言表达能力这一目标。系统的资源管理功能使得可用的教学资源在一定程度能够进行扩展,如果后续资源的制作可以有效地进行,那么该系统完全可以投入使用。

#### 参考文献:

[1] 金锦兰. 延边地区幼儿教育的问题与对策[D]. 延吉: 延边大学, 2007.

[2] 徐海波, 王羽. UI 群英汇: 用户体验 · 交互 · 视觉设计方法论[M]. 北京: 清华大学出版社, 2012.

[3] Savitch W. Absolute C++[M]. The United States of America: Machinery Industry Press, 2006.

[4] 范文庆, 周彬彬, 安靖. Windows API 开发详解: 函数、接口、编程实例[M]. 北京: 人民邮电出版社, 2011.

[5] 明日科技, 刘锐宁, 宋坤. Visual C++ 开发典型模块大全[M]. 北京: 人民邮电出版社, 2009.

[6] Reddy M. API Design for C++[M]. The United States of America: Morgan Kaufmann, 2011.

[7] 赵娜, 赵锦新, 李彤. 软件演化过程的资源优化配置[J]. 计算机应用研究, 2007, 24(7):71-74.

[8] 李师贤, 蒋爱军, 梅晓勇, 等. C++ Primer[M]. 中文版. 北京: 人民邮电出版社, 2006.

[9] Woods D, Brail G, Jacobson D. APIs: A strategy guide[M]. The United States of America: O'Reilly Media, 2011.

[11] 盖岭兴, 施笑安, 周兴社. 自适应实时资源管理技术研究[J]. 计算机应用研究, 2007, 24(10):61-64.

# 交替方向法在小波域图像修复中的应用

作者：[张孟资](#)，[张立强](#)，[ZHANG Meng-zi](#)，[ZHANG Li-qiang](#)

作者单位：[张孟资, ZHANG Meng-zi \(陆军军官学院 科研部, 安徽 合肥, 230031\)](#)，[张立强, ZHANG Li-qiang \(陆军军官学院 研究生管理大队, 安徽 合肥, 230031\)](#)

刊名：[计算机技术与发展](#)

ISTIC

英文刊名：[Computer Technology and Development](#)

年，卷(期)：2013(10)

本文链接：[http://d.g.wanfangdata.com.cn/Periodical\\_wjz201310059.aspx](http://d.g.wanfangdata.com.cn/Periodical_wjz201310059.aspx)