

无网格伽辽金法节点分布求解精度的研究

刘建华,姜冬菊

(河海大学 力学与材料学院 工程力学系,江苏 南京 210098)

摘要:基于移动最小二乘法的无网格伽辽金法(EFG)计算精度的影响因素有很多。为了分析无网格伽辽金法对节点布置的影响,文中通过分析经典的悬臂梁问题,定义了一个能量范数作为误差指标,用Matlab程序开发了无网格法计算程序。研究了离散节点的布置方法及节点个数对无网格伽辽金法求解精度的影响。考察了均匀布点法及随机布点法情况下的无网格法的计算精度,提出了两种布点方法结合起来应用的混合布点方法,得出了一些有益的结论。

关键词:无网格;伽辽金法;节点布置;计算精度

中图分类号:TP18

文献标识码:A

文章编号:1673-629X(2013)10-0075-05

doi:10.3969/j.issn.1673-629X.2013.10.019

Research on Nodes Factors Affecting Computational Precision of Element-free Galerkin Method

LIU Jian-hua, JIANG Dong-ju

(Department of Engineering Mechanics, College of Mechanics and Materials, Hohai University, Nanjing 210098, China)

Abstract: Computational precision of MLS-based EFG is affected by many factors. In order to analyze the influence of element-free Galerkin method for nodes distribution, by analyzing the classical cantilever beam problem, define an energy norm as error index, simultaneously, develop element-free computational program based on Matlab. Furthermore, study the layout method and the impact on computational precision of element-free Galerkin method by node number. Also, investigate the computational precision and efficiency of EFG under uniform distribution method and the method of random distribution. Propose a mixed combination of the two distribution methods. The above analysis gives some useful conclusions.

Key words: element-free; Galerkin method; distribution of nodes; computational precision

0 引言

现代固体力学中由于面对许多没有精确解的复杂问题,一般需要用数值解法来求解问题。近些年来主要发展的数值解法是有元法、有限差分法和边界元法等,而其中有限元法以其完备的数学理论、灵活性、高精度等特点在应用上最为广泛。但有限元法计算前都要剖分网格,在针对求解裂隙分析和局部应变、多相介质耦合以及求解域高梯度问题时一般会有不断划分新网格的前处理问题^[1]。近年来一种新兴的不需要划分网格的数值方法即无网格法已经出现,它为解决上述问题提供了新的希望。目前所研究的无网格法主要有基于全局弱式的无网格法如无网格伽辽金法(EFG)^[2]和径向基点插值法(RPIM)^[3]及再生核粒子法(RKPM)^[4]、基于局部弱式的无网格法如Petrov-

Galerkin法^[5]以及局部径向基点插值法(LRPIM)^[6]、基于配点技术的无网格如无网格配点法^[7]和广义有限差分法(GFDM)^[8]以及有限点法(FPM)^[9]、基于弱式和配点技术相结合的无网格如无网格弱-强式法(MWS)^[10]等,其中无网格伽辽金法具有概念简单、方便实现、精度高等优点,在工程 and 实际运用中得到了广泛的发展。

无网格方法不需要网格划分,但仍然需要布置合理的离散计算节点,因此节点布置一直是无网格法计算中倍受关注的问题。随着无网格的发展,国内外对于无网格法节点的布置方案的研究越来越多。Liu^[11]曾经基于再生核粒子法提出了节点密度参数,定义了理想的节点分布。刘红生,杨玉英,李晶^[12]提出节点非均匀自动布置的节点分布及背景网格生成方法。朱

收稿日期:2012-12-18

修回日期:2013-03-23

网络出版时间:2013-07-24

基金项目:国家自然科学基金资助项目(51209079);中央高校基本科研业务费资助项目(2009B15814)

作者简介:刘建华(1985-),男,硕士研究生,研究方向为结构优化设计;姜冬菊,副教授,研究方向为结构优化设计。

网络出版地址: <http://www.cnki.net/kcms/detail/61.1450.TP.20130724.0953.020.html>

合华等^[13]提出由节点或网格加密区步长和区域内辐射比自动布置节点的方法。署恒木,黄朝琴^[14]研究了基于节点敏感性分析的无网格法节点布置方法。张妹慧,汪继文^[15]研究了 SPH 法中初始时粒子配置。

文中以无网格伽辽金法为基础,分别研究了适用于无网格法的均匀和随机的不同节点布置方案对计算结果的影响,最后提出将两种布点方法结合起来应用,为无网格法的应用提供节点布置方案支持。

1 无网格伽辽金法的基本理论

无网格伽辽金法是基于移动最小二乘法^[16](MLS)构造位移近似函数,只需要节点信息然后通过背景网格对节点进行数值积分。无网格伽辽金法与有限元方法相比在理论上可以构造出任意高阶的场函数,收敛效率更高。

1.1 移动最小二乘法形函数

假设在求解域 Ω 中的位移函数 $u(\mathbf{x})$ 给定点的函数值 $u(\mathbf{x}_I)$ 是已知的,则由移动最小二乘法可以确定 $u(\mathbf{x})$ 的近似函数:

$$u^h(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) = \sum_{i=1}^m P_i(\bar{\mathbf{x}}) a_i(\mathbf{x}) = \mathbf{P}^T(\bar{\mathbf{x}}) \mathbf{a}(\mathbf{x}) \quad (1)$$

其中

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = [a_1(\mathbf{x}), a_2(\mathbf{x}), \dots, a_m(\mathbf{x})] \quad (2)$$

$a_i(\mathbf{x})$ 为待定的系数矩阵, m 为基函数项数。

$$\mathbf{P}^T(\bar{\mathbf{x}}) = [P_1(\bar{\mathbf{x}}), P_2(\bar{\mathbf{x}}), \dots, P_m(\bar{\mathbf{x}})] \quad (3)$$

$P_i(\mathbf{x})$ 为基函数。基函数应满足如下条件:

$$P_1(\bar{\mathbf{x}}) = 1, P_i(\bar{\mathbf{x}}) \in Q^k(\Omega), i = 1, 2, \dots, m \quad (4)$$

式(4)中 $Q^k(\Omega)$ 表示函数空间,在域 Ω 中函数具有直到 k 阶连续导数。基函数的选取通常为单项式,也可以使用多项式、奇函数、三角函数等其他函数。

设 n 个节点在计算点 \mathbf{x} 的邻域 Ω_k 中,待定系数 $a_i(\mathbf{x})$ 是坐标 \mathbf{x} 的函数,则 $u^h(\mathbf{x})$ 近似函数在点 \mathbf{x} 处的误差的加权平方和为:

$$L_2 = \sum_{I=1}^n w_I(\mathbf{x}) [u^h(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) - u(\mathbf{x}_I)]^2 = \sum_{I=1}^n w_I(\mathbf{x}) \left[\sum_{i=1}^m P_i(\mathbf{x}_I) a_i(\mathbf{x}) - u_I \right]^2 \quad (5)$$

式(5)中, u_I 为节点 \mathbf{x}_I 的位移精确值; $w_I(\mathbf{x})$ 为节点 $\mathbf{x}_I (I = 1, 2, \dots, n)$ 处的一个权函数,在节点 \mathbf{x}_I 周围的局部区域 Ω_I 中大于零,该区域外则为零。节点 \mathbf{x}_I 局部区域 Ω_I 一般称为权函数 $w_I(\mathbf{x})$ 的影响域,或称为节点 \mathbf{x}_I 的支撑域。在二维空间中,权函数的影响域通常采用圆形域或矩形域。

使式(5)的求解误差最小,有:

$$\frac{\partial L_2}{\partial a_j(\mathbf{x})} = 2 \sum_{I=1}^n w_I(\mathbf{x}) \left[\sum_{i=1}^m P_i(\mathbf{x}_I) a_i(\mathbf{x}) - \right.$$

$$\left. u_I \right] P_j(\mathbf{x}_I) = 0 \quad (6)$$

其中 $j = 1, 2, \dots, m$, 简化后表示为:

$$\sum_{I=1}^m \left[\sum_{i=1}^n w_I(\mathbf{x}) P_i(\mathbf{x}_I) - P_j(\mathbf{x}_I) \right] a_i(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^n w_I(\mathbf{x}) P_j(\mathbf{x}_I) u_I \quad (7)$$

得

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) \mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{x}) \mathbf{u} \quad (8)$$

其中:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^N w_I(\mathbf{x}) \mathbf{P}(\mathbf{x}_I) \mathbf{P}^T(\mathbf{x}_I) = \mathbf{P}^T \mathbf{w}(\mathbf{x}) \mathbf{P} \quad (9)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = [w_1(\mathbf{x}) P(\mathbf{x}_1), w_2(\mathbf{x}) P(\mathbf{x}_2), \dots, w_n(\mathbf{x}) P(\mathbf{x}_n)] = \mathbf{P}^T \mathbf{w}(\mathbf{x}) \quad (10)$$

故可以得到待定系数 $\mathbf{a}(\mathbf{x})$:

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{B}(\mathbf{x}) \mathbf{u} \quad (11)$$

将式(11)代入(1)中可得到

$$u^h(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) = \Phi(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) \mathbf{u} \quad (12)$$

式中, $\Phi(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})$ 为形函数,表达式为

$$\Phi(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{P}^T(\bar{\mathbf{x}}) \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{B}(\mathbf{x}) \quad (13)$$

形函数导数为:

$$\Phi_{,j} = \mathbf{P}_{,j}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{P}^T (\mathbf{A}_{,j}^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}_{,j}) \quad (14)$$

式中

$$\mathbf{A}_{,j}^{-1} = -\mathbf{A}^{-1} \mathbf{A}_{,j} \mathbf{A}^{-1} \quad (15)$$

1.2 权函数

由式(14)可知,形函数 $\Phi(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})$ 的确定与所选取的基函数 $P_i(\mathbf{x})$ 和权函数 $w_i(\mathbf{x})$ 有关。权函数可以改变形函数的连续性,因此权函数 $w_I(\mathbf{x})$ 的选取必须满足:

- ① 大于零的条件;
- ② 以保证近似函数连续可导的条件;
- ③ 在该点权函数应取得最大值,由近及远逐渐衰减并在其影响域之外为零。

满足上述条件下权函数的选择有很多种,如幂函数、指数函数、三次样条权函数和更高次的样条权函数等。文中选用三次样条作为权函数,即

$$w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) = w(r) = \begin{cases} 2/3 - 4r^2 + 4r^3, & r = 0.5 \\ 4/3 - 4r + 4r^2 - 4r^3/3, & 0.5 < r \leq 1 \\ 0, & r > 1 \end{cases} \quad (16)$$

式中, $r = \frac{d_I}{d_{ml}} = \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_I|}{d_{ml}}$, $d_I = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_I|$ 为节点 \mathbf{x}_I 与采样点 \mathbf{x} 之间的距离, d_{ml} 为权函数影响域半径。

1.3 积分方案

在无网格伽辽金法的积分计算中,采用背景网格积分算法。如用均匀的背景网格划分整体计算域,得

到每个背景网格的边长。将每个独立于研究对象的背景网格作积分并求和以取代整体计算域的积分。一般情况下采用高斯积分对背景网格积分,然后由每个背景网格中的节点数来决定其高斯点的阶数 n_Q 。矩形网格中高斯积分点定义为 $n_Q \times n_Q$,其中

$$n_Q = \sqrt{n_B} + 2$$

(17)

式中 n_B 是每个背景网格中的节点数目。对于求解问题时应使用的背景网格数目,通常取 $m_c \times m_c$ 。

$$m_c = \sqrt{n_N}$$

(18)

式中 n_N 是无网格计算域内布置的总节点数。
设域 Ω 内高斯点总数为 n ,对于坐标为 (x_i, y_i) 的高斯点其积分权系数为 ω_i ,则任意一函数 $F(x, y)$ 在全域内的数值积分表示为:

$$\iint_{\Omega} F(x, y) d\Omega = \sum_{i=1}^n \omega_i F(x_i, y_i)$$

(19)

在边界 Γ 设共有 n 个坐标为 (x_i, y_i) 的高斯节点,积分权系数为 ω_i ,函数 $F(x, y)$ 在该边界上的数值积分为:

$$\int_{\Gamma} F(x, y) d\Gamma = \sum_{i=1}^n \omega_i F(x_i, y_i)$$

(20)

2 节点布置分析

在无网格伽辽金法的计算中节点布置方案主要有均匀布置节点、随机布置节点和两种方法相结合的混合布点法。

2.1 均匀布置节点

对于无网格伽辽金法均匀节点分布是指在每个背景网格中有相同个数的节点。在规则解域中主要是人为指定每一维的节点数,在计算域内的每一维平均分布节点。对矩形二维计算域其节点坐标可表示为:

$$\begin{cases} x_i = \frac{L_b * (i - 1)}{n_1 - 1}, i = 1, 2, \dots, n_1 \\ y_j = \frac{H * (j - 1)}{n_2 - 1}, j = 1, 2, \dots, n_2 \end{cases}$$

(21)

其中, x_i, y_j 为节点坐标值; n_1, n_2 分别为 x, y 维的节点布置个数; L_b, H 分别为二维计算域横纵坐标的长度。

2.2 随机布置节点

在计算域内指定节点的个数,而节点的坐标具有随机性、任意性的节点布置方式统称为随机节点分布。对矩形二维计算域其节点坐标算法可用基于随机函数表示为:

$$\begin{cases} x_i = \text{rand} * L_b, i = 1, 2, \dots, n \\ y_i = \text{rand} * H \end{cases}$$

(22)

其中, x_i, y_i 为节点坐标值; n 为计算域内节点个数; L_b, H 分别为二维计算域 x, y 坐标的长度。

2.3 混合布置节点

在无网格法节点布置中,均匀布点法和随机布点法的节点布置方法各有优势。文中提出两种方法结合起来应用的混合布置节点方法,即在无网格伽辽金法的计算中,节点分布由两部分组成,一部分节点为均匀分布,其余部分的节点为随机分布。

3 算例分析

3.1 MLS 对不同节点分布的曲线拟合

无网格伽辽金法是基于移动最小二乘法(MLS)构造位移近似函数,故先分析节点分布对 MLS 的数值模拟情况。如由 MLS 模拟的曲线函数表达式为:

$$y = \sin(x^2 + e^{\frac{x^2}{3}}), x \in [0.0, 2.0]$$

(23)

用三种方式布置相同数目的节点:

- ①在计算域内均匀布置 15 个节点;
- ②在计算域内随机布置 15 个节点;
- ③混合布置节点,具体为 10 个均匀节点,5 个随机节点。

图 1 分别给出了上述三种情况下布置的节点分布图;图 2 和图 3 则分别给出了函数及一阶导数的近似结果,图中包含函数相应的精确解、随机布置节点方法的解、均匀布置节点方法的解和混合布置节点方法得出的解。

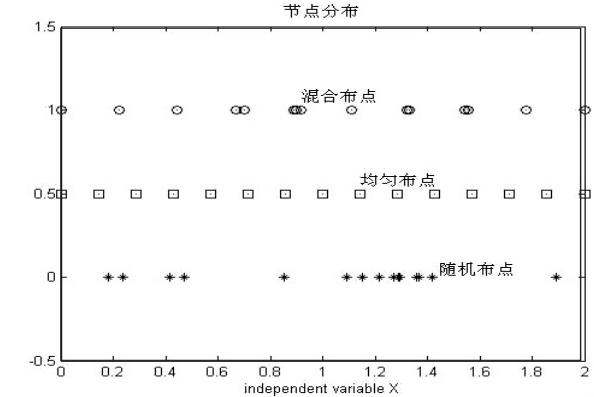


图 1 节点分布情况

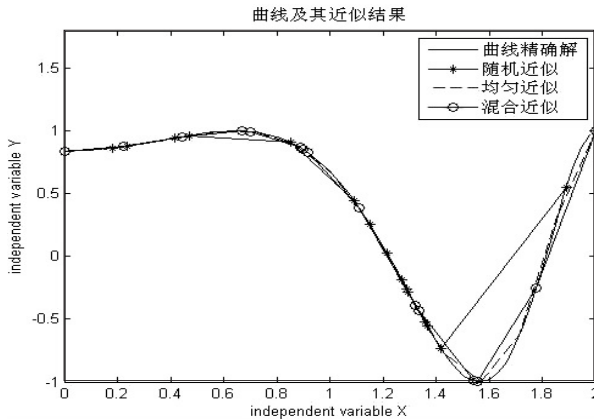


图 2 函数的近似结果

从拟合结果图 2 及图 3 可知,与全部利用随机节点分布相比,均匀节点及混合节点方法更贴近计算函数的真实情况,有较好的精度。通过多次模拟计算分析,一般情况下混合节点分布可以取均匀的节点个数大约是随机节点个数的 3 倍时,精度较好。

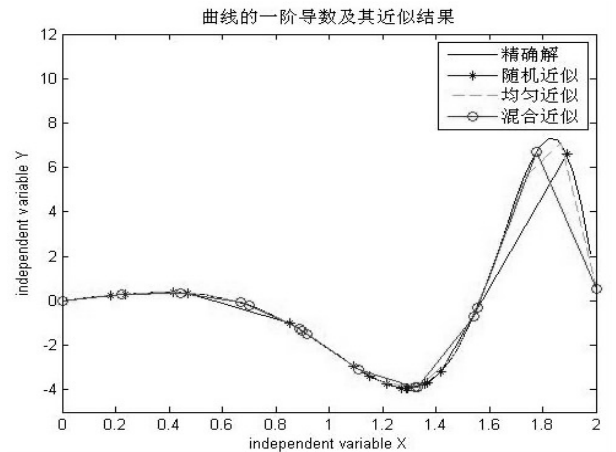


图 3 一阶导数的近似结果

3.2 二维悬臂梁算例

以下算例中各变量以及参数的单位均满足无因次关系。悬臂梁是固体力学中的一个典型问题。为进行定量分析,现考虑问题为:梁长 48,高 12,单位厚度的一自由端施加表面力的悬臂梁。抛物线载荷 $P = -1\,000$ 作用于悬臂梁自由端。材料参数为:弹性模量 $E = 3 \times 10^7$,泊松比 $\nu = 0.3$ 。将设计域的背景积分网格划分为 10×4 ,每个积分网格中取 4×4 个高斯点,其中影响域半径的乘子 $\alpha = 3.5$ 。

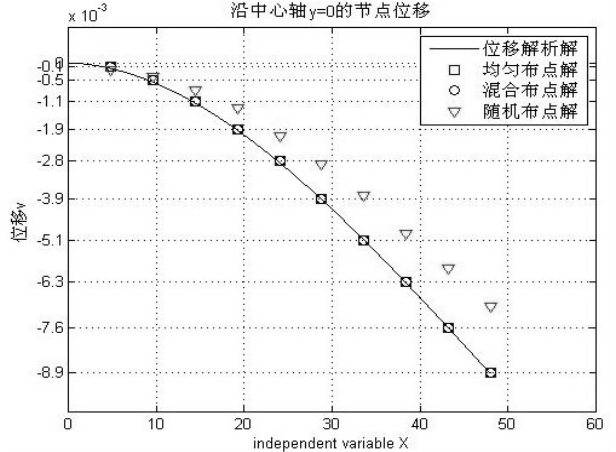


图 4 三种布点方法采用 55 个节点时沿中心轴 $y = 0$ 的节点位移

图 4 和图 5 给出了分别利用均匀布点法、随机布点法及混合布置节点法在计算域中布置 55 个节点时,沿 $y = 0$ 的背景网格节点的位移及 $x = L/2$ 的背景网格节点的切应力。

从图 5 中可知,均匀布点法及混合布点法的数值解跟解析解拟合较好。

工程计算中应变或应力的精度较位移更重要,为误差分析的需要定义能量范数误差为:

$$e_e = \sqrt{\frac{1}{2} \int_{\Omega} (\boldsymbol{\epsilon}^e)^T \mathbf{D} (\boldsymbol{\epsilon}^e) d\Omega} \tag{24}$$

其中, $\boldsymbol{\epsilon}^e = \boldsymbol{\epsilon}^{\text{Num}} - \boldsymbol{\epsilon}^{\text{Exact}}$; $\boldsymbol{\epsilon}$ 为应变向量。表 1 给出了分别利用均匀布点法、随机布点法及混合布置节点法针对不同节点个数时的背景网格节点能量范数 e_e 。从表 1 中可见,影响域不变其所对应的能量范数误差随节点个数变化的情况。对应于节点个数大于 55 而小于 189 时的能量范数误差较小结果非常理想。当节点太少(18 个)或太多时,EFG 的结果误差均有所增加。在节点个数为 55 个和 112 个时,所得到的能量范数误差混合布点方法最小,可以看出混合布点方法能够提高 EFG 无网格法求解的精确度。

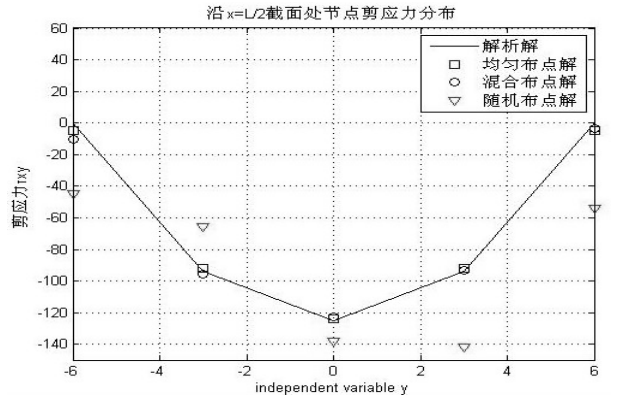


图 5 三种布点方法采用 55 个节点时沿 $x = L/2$ 截面处节点剪应力分布

表 1 不同布点方式的能量范数

节点个数	范数		
	均匀布点方法	混合布点方法	随机布点方法
18	0.245 0	0.492 0	0.626 3
55	0.161 7	0.118 4	0.414 5
112	0.163 6	0.149 5	0.160 6
189	0.166 3	0.257 6	0.556 6
403	0.212 8	0.915 2	3.610 8

4 结束语

- (1)文中分析比较了无网格伽辽金法在均匀节点分布及随机节点分布情况下的计算结果,符合 EFG 法计算结果精度较高、稳定性较好的优点。
- (2)无网格伽辽金法计算中,相比于单纯的随机布点法,均匀布点法及混合布点法是稳定的布点方法。
- (3)由于无网格法具有只需节点信息而无需单元信息的优点,故提出了随机节点与均匀节点相结合的混合方法。通过计算说明,与单纯的一种节点布置相比,混合布点法符合实际情况,在处理问题上能够得到较高的精度。
- (4)采用混合布点法可避免计算点的定义域内节

点按一定规律排列,使得式(9)中 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ 矩阵非奇异。

参考文献:

[1] 张 雄,刘 岩. 无网格法[M]. 北京:清华大学出版社, 2004.

[2] Belytschko T, Lu Y Y, Gu L. Element-free Galerkin method [J]. International Journal for Numerical Method in Engineering, 1994, 37: 229-256.

[3] Wang J G, Liu G R. A point interpolation meshless method based on radial basis functions[J]. Int J Numer Meth Eng, 2002, 54(11): 1623-1648.

[4] Liu W K, Jun S, Zhang Y F. Reproducing kernel particle methods[J]. Int J Numer Methods Eng, 1995, 20: 1081-1106.

[5] Atluri S N, Shen S P. The meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) method [M]. Encino, USA: Tech Science Press, 2002.

[6] Liu G R, Gu Y T. A local radial point interpolation method (LR-PIM) for free vibration analysis of 2-D solids[J]. Journal of Sound and Vibration, 2001, 246(1): 29-46.

[7] Liu G R, Gu Y T. A truly meshless method based on the strong-weak form[C]//Proceeding of the 1st Asian Workshop in Meshfree Methods. Singapore: [s. n.], 2002: 259-261.

[8] Krok J, Orkisz J. A unified approach to the FE generalized

variational FD method for nonlinear mechanics, concept and numerical approach[M]. [s. l.]: Springer-Verlag, 1989: 353-362.

[9] Oñate E, Perazzo F, Miquel J. A finite point method for elasticity problems[J]. Computers and Structures, 2001, 79: 2151-2163.

[10] Liu G R, Gu Y T. A meshfree method: Meshfree weak-strong (MWS) form method, for 2-D solids[J]. Computational Mechanics, 2003, 33(1): 2-14.

[11] Liu W K. Moving least square reproduce kernel method part i: methodology and convergence[J]. Computer Methods in Applied Mechanics Engineering, 1997, 143(10): 422-433.

[12] 刘红生,杨玉英,李 晶. 无网格法中节点非均匀自动布置及背景网格生成[J]. 岩土力学, 2007, 28(1): 201-205.

[13] 朱合华,叶勇庚,李晓军,等. 任意形状区域的自动布点技术[J]. 工程力学, 2004, 21(5): 94-99.

[14] 署恒木,黄朝琴. 基于节点敏感性分析的无网格法节点布置研究[J]. 中国石油大学学报(自然科学版), 2007, 31(1): 95-99.

[15] 张姝慧,汪继文. SPH 法中初始时粒子配置的分析[J]. 计算机技术与发展, 2007, 17(6): 36-38.

[16] 庞作会,葛修润,郑 宏,等. 一种新的数值方法—无网格伽辽金法 (EFGM) [J]. 计算力学学报, 1999, 16(3): 320-329.

(上接第 74 页)

图 4 是行人的阴影的去除结果, (c) 是利用 HSV 颜色空间检测的结果, 部分目标被认为是阴影去除, 导致人的内部不够完整。相对于 (c), 用 RGB 与 LBP 结合的方法检测出的结果 (d) 要更精确一些, 这种阴影检测与去除方法对于行人也有很好的效果。

5 结束语

文中提出了一种基于 RGB 颜色空间与纹理信息结合的阴影检测方法, 利用阴影覆盖前后的像素具有一定的相似性, 其 RGB 颜色的特征向量具有夹角较小的特点, 再结合纹理特性, 实现了图像的去影。文中提出的去影算法可以从运动区域中分离出运动目标与阴影, 并去除阴影, 有利于对目标进行下一步的跟踪、分类和识别, 且具有很强的适应性, 满足目标检测算法对实时性的要求。

参考文献:

[1] 薛丽霞, 罗艳丽, 王佐成. 基于帧间差分的自适应运动目标检测方法[J]. 计算机应用研究, 2011, 28(4): 1551-1552.

[2] 付 萍, 方 帅, 徐心和, 等. 视频监控系统中运动目标检测的阴影去除方法[J]. 计算机工程, 2007, 33(10): 22-24.

[3] Brisson M, Zaccarin A. Learning and removing cast shadows

through a multi-distribution approach[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2007, 29(7): 1133-1146.

[4] 陈柏生, 陈锻生. 基于归一化 rgb 彩色模型的运动阴影检测[J]. 计算机应用, 2006, 26(8): 1879-1881.

[5] 张 丽, 李志能. 基于阴影检测的 HSV 空间自适应背景模型的车辆追踪检测[J]. 中国图象图形学报, 2003, 8(7): 778-782.

[6] 余孟泽, 刘正熙, 骆 键, 等. 融合纹理特征和阴影属性的阴影检测方法[J]. 计算机工程与设计, 2011, 32(10): 3431-3434.

[7] 蔡英凤, 张为公, 王 海. 边缘特征与局部纹理特性融合的阴影消除算法[J]. 江苏大学学报, 2012, 33(2): 144-149.

[8] 侯宏录, 李宁鸟, 刘迪迪, 等. 智能视频监控中运动目标检测的研究[J]. 计算机技术与发展, 2012, 22(2): 49-52.

[9] 屠礼芬, 仲思东, 彭 祺. 基于混合差分法的运动目标检测[J]. 科学技术与工程, 2012, 12(2): 325-329.

[10] Song Xuehua, Ding Yan, Gen Jianfeng. Shadow removal of vehicles in a video system based on RGB chroma model[C]//Proc of International Conference on Computer Science and Software Engineering. Hongkong: [s. n.], 2008: 977-980.

[11] 李 媛, 张艳珠, 渠 彪, 等. HSV 空间特征和纹理特征的阴影检测算法研究[J]. 沈阳理工大学学报, 2012, 31(4): 11-15.

无网格伽辽金法节点分布求解精度的研究

作者：[刘建华](#)，[姜冬菊](#)，[LIU Jian-hua](#)，[JIANG Dong-ju](#)
作者单位：[河海大学 力学与材料学院 工程力学系](#)，[江苏 南京](#)，[210098](#)
刊名：[计算机技术与发展](#)

英文刊名：[Computer Technology and Development](#)

年，卷(期)：2013(10)

本文链接：http://d.g.wanfangdata.com.cn/Periodical_wjfz201310019.aspx